



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: تقني رياضي

دورة: 2021

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = 3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 1$

(1) أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n < \frac{9}{2}$

ب. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثم احسب حدّها الأول.

ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

ج. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \dots + \frac{1}{3}u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

(1) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $a = 3n + 2$ ، $b = 5n + 1$ و نضع: $d = \text{PGCD}(a; b)$

مجموعة القيم الممكنة لـ d هي: (أ) $\{1; 3\}$ (ب) $\{1; 7\}$ (ج) $\{1; 5\}$

(2) نضع: $A(\alpha) = \ln(e^{3\alpha} + e^\alpha) + \ln(e^{4\alpha} + e^{2\alpha}) + \ln(e^{5\alpha} + e^{3\alpha})$ ، حيث α عدد حقيقي.

من أجل كلّ عدد حقيقي α العبارة المبسطة لـ $A(\alpha)$ هي:

(أ) $6\alpha + \ln(e^{2\alpha} + 1)$ (ب) $6 + 3\ln(e^{2\alpha} + 1)$ (ج) $6\alpha + 3\ln(e^{2\alpha} + 1)$

(3) حلّ المعادلة التفاضلية $y' = -2y + 4$ الذي يحقق $y(0) = 2021$ هو الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

(أ) $h(x) = 2019e^{-2x} + 2$ (ب) $h(x) = 2019e^{2x} + 2$ (ج) $h(x) = 2021e^{-2x} - 2$



- (4) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n ، المجموع $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ يساوي:
- (أ) $-\ln(n+1)$ (ب) $\ln(n+2)$ (ج) $1 - \ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9
- (2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9
- (3) بيّن أنّ العدد $2021^{1442} + 1691^{1954} - 8$ مضاعف للعدد 9
- (4) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n} + 2021^{6n+1} + 1443$ مضاعف للعدد 9
- (5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2021^{1442} + 1691^{1954} + 5n$ عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[9]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) الدالة العددية g معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 5 + e^{x-1}$
- (1) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty[$
- (2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,71 < \alpha < 1,72$
- ب . استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$
- (II) الدالة العددية f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 + (-x^2 - 2x + 3)e^{1-x}$
- (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)e^{1-x}$
- ب . استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0; \alpha]$
- ج . بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f
- (2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)
- (3) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يُطلب تعيين فاصلتها (لا يطلب كتابة معادلة (T))
- (4) أ . بين أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1 + \sqrt{6})$
- ب . ارسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ: $f(\alpha) \approx 1,1$ ، $f(\sqrt{5}) \approx 1,4$ و $f(1 + \sqrt{6}) \approx 3,1$)
- (5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ: $h(x) = -x + 1 + (-x^2 + 2x + 3)e^{1+x}$
- (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
- أ . تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(-x)$
- ب . اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C) ثمّ ارسمه.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E) \dots 13x - 9y = 1$ ، ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

(1) أ . تَحَقَّقْ أَنَّهُ إِذَا كَانَتْ الثَّنَائِيَّة $(x; y)$ حَلًّا للمعادلة (E) فَإِنَّ: $x \equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

(2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع: $A_n = 3^{4n} + 3^{4n+1} + 3^{4n+2} - 3$ حيث n عدد طبيعي.

بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

(3) بفرض أَنَّ $(x; y)$ حلٌّ للمعادلة (E) حيث x و y عدنان طبيعيان.

عَيِّنْ قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n + 3^{y-x} + 2023^{2022}$ القسمة على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عَيِّنْهُ مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
(1) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 3x + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ هي دالة:	زوجية.	لا زوجية ولا فردية.	فردية.
(2) الدالة العددية g معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{(x-1)e^x - x + 1}{e^x + 1}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم. تكون: $y = x + a$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لـ (C) من أجل:	$a = 1$	$a = -1$	$a = 0$
(3) العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8 ويكتب $\overline{5\alpha 15}$ في نظام تعداد أساسه 7 من أجل:	$\alpha = 6$	$\alpha = 5$	$\alpha = 4$
(4) β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^\beta + 1$ ، $e^\beta + 2$ ، $2e^\beta$ بهذا الترتيب حدودا متتابة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي:	$\ln(\sqrt{5} - 1)$	0	$\ln(1 + \sqrt{5})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 3 + e^{-2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$

(1) أ . تَحَقَّقْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$

ب. برهن بالتراجع أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عدد طبيعي n ، $3 < u_n < 4$

(2) أ . ادرس اتجاه تَغْيَرِ المتتالية (u_n)

ب. استنتج أَنَّ (u_n) متقاربة.



- (3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$
 أ . بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدّها الأول.
 ب. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$
 ج. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 (4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$
 احسب P_n بدلالة n

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2 \ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$
 (1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$
 (2) أ . بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,89 < \alpha < 1,90$
 ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$
 (II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x - 2 + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$
 (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)
 (1) أ . احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.
 ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 (2) أ . بين أنّه من أجل كلّ x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$
 ب. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0; \frac{1}{\alpha}]$
 ج. شكّل جدول تغيّرات الدالة f
 (3) أ . احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)]$ ثم استنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.
 ب. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ)
 (4) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C) عند A
 (5) ارسم (T)، (Δ) و (C) (نأخذ: $\frac{1}{\alpha} \approx 0,53$ و $f(\frac{1}{\alpha}) \approx 0,73$)
 (6) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 أ . بين أن الدالة h زوجية.
 ب. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $h(x) = -f(x)$
 ج. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثم ارسمه.