

التمرين 01:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A, B, C, D و Ω نقط لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + i$, $z_B = 2 - i$, $z_C = 3 + 2i$, $z_D = 5 + 8i$ و $z_\Omega = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

1- أ- أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب- عين طبيعة وعناصر التحويل النقطي R الذي مركزه A ويحول B إلى C

2- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه B ويحول C إلى D

3- نضع: $S = hoR$

أ- تحقق أن $S(B) = D$

ب- ما هي طبيعة وعناصر التحويل S ؟

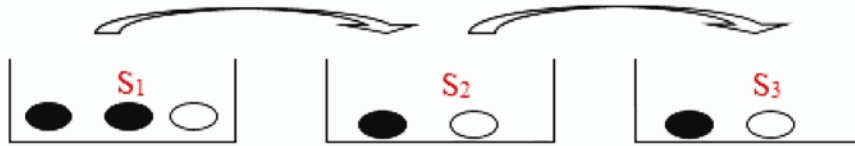
4- لتكن E, F, G نقط حيث: $S(D) = E$, $S(E) = F$, $S(F) = G$ و $S(G) = D$

أ- بين أن النقط Ω, E و B في استقامية

ب- بين أن النقط Ω, G و B في استقامية

التمرين 02:

لدينا n كيس $S_1, S_2, \dots, S_n$ يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



S_1 يحوي قريصتان سوداوان وواحدة بيضاء وكل الأكياس الأخرى تحوي قريصة سوداء وقريصة بيضاء.

نقترح دراسة تطور السحوبات المتتالية لقريصة حسب البروتوكول التالي:

■ نسحب قريصة من S_1 :

■ نضعها في S_2 ثم نسحب قريصة من S_2 :

■ نضعها في S_3 وهكذا....

■ من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $1 \leq k \leq n$, نرمز بـ E_k الحادثة " القريصة المسحوبة من S_k بيضاء " و $\overline{E_k}$ حادته المعاكسة.

■ احتمال الحادثة E_k هو p_k .

1- بداية العملية:

أ- مثل بشجرة السحب في S_1 ثم في S_2 .

ب- أذكر p_1 ثم أحسب p_2 .

2- علاقة بين p_k و p_{k+1} :

أ- عين $p_{E_k}(E_{k+1})$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$

ب- أتمم الشجرة المقابلة و التي تمثل السحوبات في الكيسين S_k و S_{k+1} , $(1 \leq k \leq n)$.

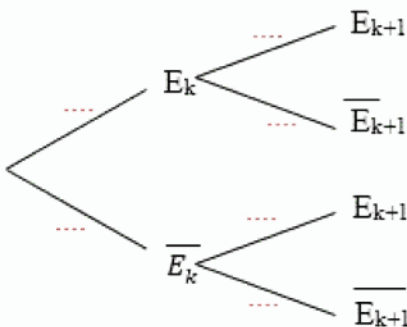
ج- استنتج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$

3- دراسة متتالية (p_n) :

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

ج- ما هو التفسير العملي لهذه النتيجة؟



التمرين 03:

- 1- أ - بين أن النقط $A(1;2;4)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $C(4;-1;1)$ و $D(-5;-1;0)$ و $G(-2;3;-1)$ نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
- ب - بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة
- ج - استنتج أن G مرجح للنقط A ، B و C تنتمي إلى نفس المستوي
- 2- أ - بين أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
- ب - استنتج معادلة ديكراتية للمستوي (ABC)
- 3- أ - أحسب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ والطولين AB و AC
- ب - استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos \widehat{BAC}$ و $\sin \widehat{BAC}$
- ج - استنتج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
- 4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$
- أ - عين طبيعة وعناصر (S)
- ب - عين معادلتين ديكراتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) الماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

التمرين 04:

- الجزء I : f دالة معرفة على $] -\infty; 1]$ ب: $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- 2 - عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$
- 3 - أرسم (C_f) و (Δ)
- الجزء II : (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
- 1 - مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (دون حسابها) موضعا خطوط الإنشاء
- 2 - ضع تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها
- 3- أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$
- ب - ادرس اتجاه تغير (u_n)
- ج - استنتج أن (u_n) متقاربة
- 4- أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$
- ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$
- ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$
- د - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 05:

- f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟
- 2- أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول التغيرات.
- 3- عين نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$
- 4- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$
- 5- أنشئ (C_f) و (T)
- 6- باستعمال مكاملة بالتجزئة؛ أحسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت ذات معادلات: $x = e$ ، $x = 1$ و $y = 0$
- 7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276
2. ليكن x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما. بين أن العددين $(x+y)$ و (xy) أوليان فيما بينهما.
3. a و b عددان طبيعيين غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.
- أ - برهن أن: $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$ حيث $PGCD$ هو القاسم المشترك الأكبر.
- ب - أوجد كل الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق: $a+b = 276$ و $m = 1440$

التمرين 01:

$$z_{\Omega} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \text{ و } z_D = 5+8i, z_C = 3+2i, z_B = 2-i, z_A = 1+i$$

1- أ - كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2-i)(1+2i)}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$ABC \text{ مثلث قائم ومتساوي الساقين في } A \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل النقطي R :

$$R(B)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C \text{ صورة } B \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه } A \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ أي } R(B)=C$$

2- تعيين نسبة التحليki h :

h تحليki مركزه B ونسبته k

$$k = 3 \Leftrightarrow 3(1+3i) = k(1+3i) \Leftrightarrow 5+8i-2+i = k(3+2i-2+i) \Leftrightarrow z_D - z_B = k(z_C - z_B) \Leftrightarrow h(C)=D$$

h تحليki مركزه B ونسبته k

3- نضع: S=hoR

أ - التحقق من أن S(B)=D

$$S(B) = hoR(B) = h[R(B)] = h(C) = D$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل S :

$$S : S=hoR \text{ تشابه مباشر مركزه } \omega, \text{ نسبته } 3 \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2}$$

$$5 + 8i - z_{\omega} = 3i(2 - i - z_{\omega}) \Leftrightarrow z_D - z_{\omega} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_{\omega}) \Leftrightarrow S(B) = D$$

$$\omega = \Omega \Leftrightarrow z_{\omega} = \frac{-2-2i}{-1+3i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = z_{\Omega} \Leftrightarrow (-1+3i)z_{\omega} = -2-2i \Leftrightarrow$$

S تشابه مباشر مركزه Ω ، نسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

4- لتكن E ، F ، G نقط حيث: S(D)=E ، S(E)=F ، S(F)=G

أ - تبين أن النقط Ω ، E و B في استقامية:

$$E = S(D) = S[S(B)] = SoS(B)$$

SoS : تشابه مباشر مركزه Ω ونسبته $3 \times 3 = 9$ وزاويته $2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi$: SoS تحليki مركزه Ω ونسبته 9-

$$\overrightarrow{\Omega E} = -9\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow SoS(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega E} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, E \text{ و } B \text{ في استقامية}$$

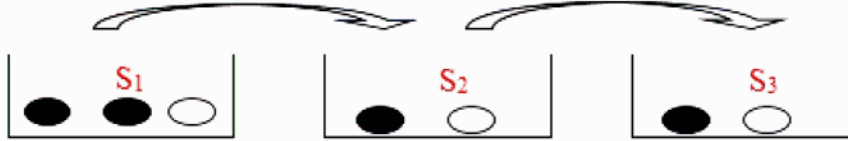
ب - تبين أن النقط Ω ، G و B في استقامية:

$$G = S(F) = S[S(E)] = SoS[S(D)] = SoSoS(B)$$

SoSoS : تشابه مباشر مركزه Ω ونسبته $3^4 = 81$ وزاويته $4 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi \equiv 0[2\pi]$: SoSoS تحليki مركزه Ω ونسبته 81

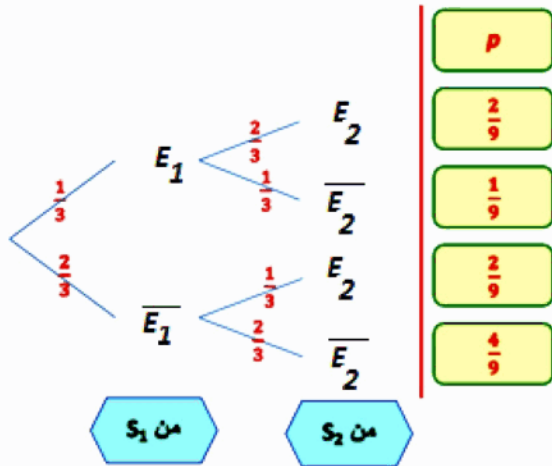
$$\overrightarrow{\Omega G} = 81\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow SoSoSoS(B) = G \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega G} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, G \text{ و } E \text{ في استقامية}$$

لدينا n كيس $S_1, S_2, \dots, S_n$ يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. عدد طبيعي غير معدوم.



1 - بداية العملية:

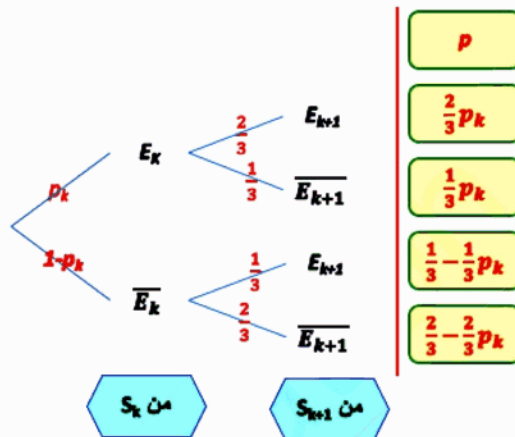
أ - تمثيل بشجرة السحب في S_1 ، ثم في S_2 :



ب - أذكر p_1 ثم حساب p_2 :
 $p_2 = p(E_2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ و $p_1 = \frac{1}{3}$

2- علاقة بين p_k و p_{k+1} :

أ - إتمام الشجرة :



ب - استنتاج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$

لدينا: $p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3}$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) = \frac{1}{3}$

$$p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3} \quad \text{ومنه} \quad p_{k+1} = p_k \times p_{E_k}(E_{k+1}) + (1-p_k) p_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) = \frac{2}{3} p_k + \frac{1}{3} (1-p_k) = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$$

3 - دراسة متتالية (p_n) :

أ - نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

○ نتحقق من صحتها من أجل $n=1$

لدينا: $p_1 = \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ (صحيحة)

○ نفرض أنها صحيحة من أجل n ولنبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أن $p_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$(صحيحة) \quad p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 1 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

○ الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتاج النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

ج - التفسير العملي لهذه النتيجة:

عندما نعيد العملية عدد كبير من المرات بالقدر الكافي نجد فإن احتمال سحب كرة بيضاء يقترب من $\frac{1}{2}$

1- أ - تبيان أن النقط $A(1;2;4)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $C(4;-1;1)$ ، $D(-5;-1;0)$ و $G(-2;3;-1)$ نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 ب - تبيان أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة:

$$\vec{AB}(-2; 1; -2) \quad \vec{AC}(3; -3; -3)$$

لدينا: $\vec{AB} \neq \frac{-2}{3} \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow A$ ، B و C ليست على استقامة واحدة

ب - تبيان أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي:

$$\vec{GA}(-3; 1; -5) \quad \vec{GB}(-1; 0; -3) \quad \vec{GC}(-6; 4; -2)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ -5 = -3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -\alpha - 6\beta \\ 1 = 4\beta \\ -5 = -3\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \vec{GA} = \alpha \vec{GB} + \beta \vec{GC} \quad \text{حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ حقيقيين}$$

لدينا: $\vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{GB} + \frac{1}{4} \vec{GC} \Leftrightarrow \vec{GA}$ ، $\vec{GB}$ و $\vec{GC}$ مرتبطة خطيا $\Leftrightarrow A$ ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي

ج - استنتاج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها:

$$(1) \dots G = \{(A, 4); (B, -6); (C, -1)\} \Leftrightarrow 4\vec{GA} - 6\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{GB} + \frac{1}{4} \vec{GC}$$

2- أ - تبيان أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) :

$$G \in (ABC) \Leftrightarrow (1)$$

$$\vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$\vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \perp \vec{AB} \\ \vec{DG} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \cdot \vec{AB} = -6 + 4 + 2 = 0 \\ \vec{DG} \cdot \vec{AC} = 9 - 12 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{لدينا: } G \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{DG}) \perp (ABC) \\ G \in (ABC) \end{cases} \quad \text{لدينا: } G \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } D \text{ على المستوي } (ABC)$$

ب - استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$$(ABC): 3x+4y-z+d=0 \Leftrightarrow \vec{DG}(3; 4; -1) \text{ ناظمي للمستوي } (ABC)$$

$$(ABC): 3x+4y-z-7=0 \text{ ومنه } d=-7 \Leftrightarrow 3+8-4+d=0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$$

3- أ - حساب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ والطولين AB و AC :

$$AC = 3\sqrt{3} \quad , \quad AB = 3 \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 - 3 + 6 = -3$$

ب - استنتاج القيم المضبوطة لكل من $\sin \widehat{BAC}$ و $\cos \widehat{BAC}$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-3}{9\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \sqrt{1 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{26}{27}} = \frac{\sqrt{78}}{9} \quad \text{وبالتالي}$$

ج - استنتاج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2} = \frac{9\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{78}}{9}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ u. a.}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times DG = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{26} = 13 \text{ u. v.} \quad \text{لدينا: } DG = \sqrt{26} \text{ وبالتالي}$$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$

أ - تعيين طبيعة وعناصر (S) :

$$4\vec{MA}^2 - 6\vec{MB}^2 - \vec{MC}^2 = -54 \Leftrightarrow 4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

$$4(\vec{MG} + \vec{GA})^2 - 6(\vec{MG} + \vec{GB})^2 - (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$-3MG^2 + 4GA^2 - 6GB^2 - GC^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$GC^2 = 56 \quad , \quad GB^2 = 10 \quad , \quad GA^2 = 35$$

$$MG^2 = 26 \Leftrightarrow -3MG^2 + 140 - 60 - 56 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

(S) سطح كرة مركزه G ونصف قطره $R = \sqrt{26}$

ب - تعيين معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) الماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

$$(P): 3x+4y-z+d=0 \quad \text{وبالتالي: } (P) \text{ هو ناظمي للمستوي } (ABC) \Leftrightarrow \vec{DG}(3; 4; -1) \text{ ناظمي للمستوي } (P)$$

$$d = -33 \text{ أو } d=19 \Leftrightarrow \frac{|7+d|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Leftrightarrow d(G; (P)) = \sqrt{26} \Leftrightarrow (P) \text{ مماس لسطح الكرة } (S)$$

$$\text{ومنه } (P_1): 3x+4y-z+19=0 \text{ و } (P_2): 3x+4y-z-33=0$$

الجزء I : f دالة معرفة على $] -\infty; 1]$: $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 1- أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f تقبل الاشتقاق على $] -\infty; 1[$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \Leftrightarrow f$ متزايدة تماما على $] -\infty; 1[$

جدول تغيرات f : $f(1) = -1$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

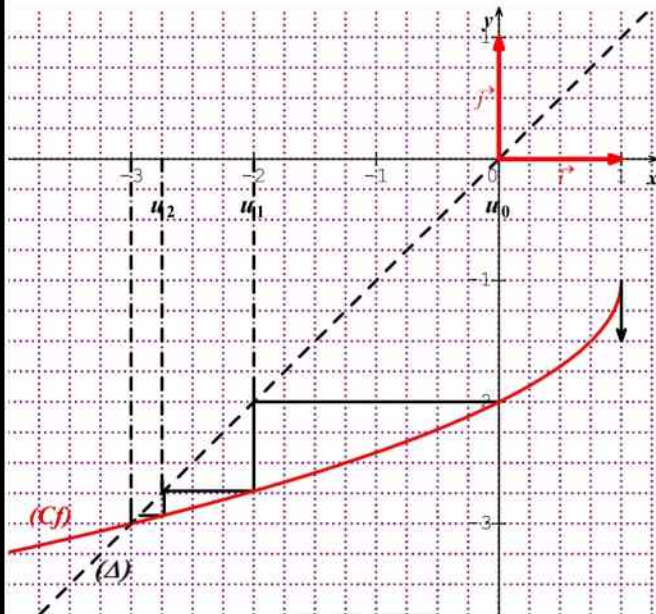
2- تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + 3x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ 1 - x = x^2 + 2x + 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = -x - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{1-x} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هي $(-3; -3)$

3- رسم (C_f) و (Δ)



الجزء I : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = -1 - \sqrt{1-u_n} \end{cases}$

2- تخمين حول تغيرات (u_n) وتقاربها:

(u_n) متناقصة تماما

(u_n) متقاربة وتقارب 3-

3- أ- البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$:

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 0 \in [-3; 0]$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي نفرض أن $-3 \leq u_n \leq 0$

- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي نبرهن أن $-3 \leq u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-3 \leq u_n \leq 0 \Leftrightarrow f(-3) \leq f(u_n) \leq f(0)$

(لأن f متزايدة على $[-3; 0]$)

$$-3 \leq u_{n+1} \leq -2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq u_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \text{(صحيحة)}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$

ب- دراسة اتجاه تغير (u_n)

(C_f) يقع تحت (Δ) على $[-3; 0] \Leftrightarrow (f(x) \leq x \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0)$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow$$

$$(u_n) \text{ متناقصة تماما} \Leftrightarrow$$

ج- استنتاج أن (u_n) متقاربة

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \\ (u_n) \text{ متناقصة تماما} \\ f(-3) = -3 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \text{ أي } (u_n) \text{ متقاربة وتقارب } -3 \Leftrightarrow$$

4 - أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2\sqrt{1-x} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1-x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$$

لدينا: $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ، $[-3; 0]$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\Leftrightarrow$
 ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{4} dx \leq \int_{-3}^{u_n} f'(x) dx \leq \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [-3; 0]; \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq [f(x)]_{-3}^{u_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq f(u_n) - f(-3) \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

ج - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$:

من السؤال السابق نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(u_0 + 3) \leq u_1 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_1 + 3) \leq u_2 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_2 + 3) \leq u_3 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_2 + 3) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{4}(u_{n-1} + 3) \leq u_n + 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + 3) \end{cases}$$

بالضرب نجد:

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n + 3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 3) \leq u_n + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + 3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \Leftrightarrow$$

د - استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \right] = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \right] = -3 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

الاستنتاج: $x = 0$ و $y = 0$ معادلتين لمقاربين للمنحنى (C_f)

2- دراسة اتجاه تغير f :

f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ بـ $f'(x) = \frac{2x-4x\ln x}{x^4} = \frac{2-4\ln x}{x^3}$ و $]0; +\infty[$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

f متزايدة تماماً على $]0; \sqrt{e}]$ ومتناقصة تماماً على $[\sqrt{e}; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	0

3- نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln x}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

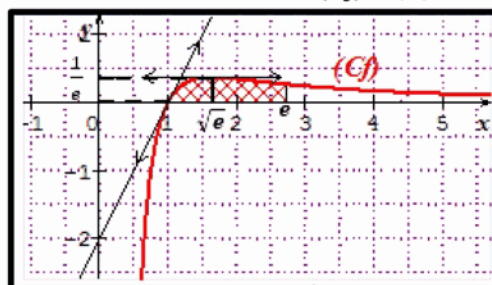
إحداثيتي نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ هي $(1; 0)$

4- معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$:

$$f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2$$

$$(T): y = 2x - 2 \Leftrightarrow (T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

5- إنشاء (C_f) و (T) :



6- حساب المساحة:

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{2}{x} \end{cases} \text{ نضع:}$$

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^e = \left(-\frac{4}{e} + 2 \right) u.a. \approx 0,53 u.a.$$

7- المناقشة:

$$(\Delta): y = f(m)$$

$$(x'x): y = 0$$

$$(\Delta'): y = \frac{1}{e}$$

من البيان نستنتج ما يلي:

$$0 < m \leq 1 \Leftrightarrow f(m) \leq 0 \text{ حل وحيد}$$

$$0 < f(m) < \frac{1}{e} \Leftrightarrow m \in]1; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[\text{ حلان متمايزان}$$

$$m = \sqrt{e} \Leftrightarrow f(m) = \frac{1}{e} \text{ حل مضاعف}$$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. حساب القاسم المشترك الأكبر للعدين: 1440 و 276 :

$$PGCD(276; 1440) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 276 = 12 \times 23 \\ 1440 = 12 \times 120 \\ PGCD(23; 120) = 1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

2. تبين أن العدين $(x+y)$ و (xy) أوليان فيما بينهما:

x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

لدينا: $x \wedge y = 1 \Leftrightarrow$ يوجد عدنان صحيحان α و β حيث: $\alpha x + \beta y = 1$ (مبرهنة بيزو)

$$\begin{cases} \alpha(x+y) + (\beta - \alpha)y = 1 \\ \beta(x+y) + (\alpha - \beta)x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(مبرهنة بيزو) \begin{cases} (x+y) \wedge y = 1 \\ (x+y) \wedge x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x+y) \wedge (xy) = 1 \Leftrightarrow$$

3. a و b عدنان طبيعيين غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.

أ - برهان على أن: $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$

$$\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = d \text{ نضع:}$$

$$m = d a' b' \Leftrightarrow md = ab = d^2 a' b' \text{ لدينا:}$$

$$PGCD(a+b; m) = PGCD(d(a'+b'); da'b') = d PGCD(a'+b'; a'b') = d = PGCD(a; b)$$

(لأن $(a' + b') \wedge (a'b') = 1$ من السؤال السابق)

ب - إيجاد $(a; b)$:

$$m=1440 \text{ و } a+b=276$$

$$\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = PGCD(a+b; m) = PGCD(276; 1440) = 12$$

$$a'b' = 120 \Leftrightarrow 12a'b' = 1440 \Leftrightarrow m = d a' b' \text{ لدينا:}$$

$$a' + b' = 23 \Leftrightarrow a + b = 12(a' + b') = 276 \text{ و}$$

$$a' \text{ و } b' \text{ هما حلا المعادلة: } x^2 - 23x + 120 = 0$$

$$x_2 = 8, x_1 = 15 \quad \Delta = 23^2 - 4(120) = 49$$

$$(a; b) = (180; 96) \text{ أو } (a; b) = (96; 180) \Leftrightarrow (a'; b') = (15; 8) \text{ أو } (a'; b') = (8; 15) \text{ وبالتالي}$$