



بكالوريا دورة سبتمبر 2020

سلسلة الروائع

بكالريات تجريبية لشعبة علوم تجريبية
بعضها مرفق بحلول



Musta Maths

2020





BAC 2020 SE –ALG– 01-062020



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2020

elbassair.net

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الاول (05 نقاط):

يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1;1;1;1 و 3 كرات سوداء مرقمة بـ : 2;0;0 لا يمكن التمييز بينها باللمس



نسحب عشوائيا 3 كرات في ان واحد ولتكن الحوادث التالية

A " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس اللون "

B " مجموع ارقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 2 "

C " الكرات المسحوبة ارقامها مختلفة مثنى مثنى "

1-احسب احتمال الحوادث: A ; B ; C و $A \cap B$

نسحب الان عشوائيا كرتين و بالارجاع وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج جداء الرقمين المحصل عليهما

(2) حدد قيم المتغير العشوائي X

(3) بين ان: $p(X=2) = \frac{8}{49}$ ثم اعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني (04 نقاط):

(U_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $U_0 = 1$ $U_1 = 2$ و $U_n = 2U_{n-1} + 3U_{n-2}$ (1) نعتبر (V_n) متتالية معرفة على N* كما يلي : $V_n = \alpha U_n + \beta U_{n-1}$ حيث α و β عدنان حقيقيان غير منعدمان .(ا) -أحسب U₂ و U₃(ب) -أحسب V₁ ; V₂ و V₃ بدلالة α و β (ج) -بين أنه إذا كانت V₁ ; V₂ و V₃ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$ نضع $\alpha = \beta$ (2)(ا) -برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V₁(ب) -استنتج أنه من أجل كل عدد n من N* : $U_n + U_{n-1} = 3^n$ (3) - نضع $\beta = -3\alpha$:(ا) -برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول(ب) -استنتج أنه من أجل كل عدد n من N* : $U_n - 3U_{n-1} = (-1)^n$

(ج)- بَيِّنْ أَنْ : $[(V_n) \text{ متتالية هندسية }]$ معناه $[\beta = \alpha \text{ أو } \beta = -3\alpha]$.
التمرين الثالث (05 نقاط) :

1- جد العددين المركبين Z_1 و Z_2 حيث :
$$\begin{cases} Z_1 + 2Z_2 = 6 + 3i \\ iZ_1 - Z_2 = 2i \end{cases}$$

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ; B ; C و D

التي لواحقها على الترتيب: $Z_A = 4 - i$; $Z_B = 4 + i$; $Z_C = 1 + 2i$; $Z_D = -i$

2- (أ)- برهن أن النقط A ; B ; C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(ب)- اكتب العدد المركب: $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم الاسي

(ج)- استنتج طبيعة المثلث BCD ثم احسب مساحته

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و يحول النقطة B إلى النقطة D

3- (أ)- اعط العبارة المركبة للتشابه S محددًا نسبته وزاويته

(ب)- جد Z_F لاحقة النقطة F علما ان O هي صورة F بالتشابه S

لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة و التي تحقق : $|2iZ + 2 - 9i| = 1$

4- (أ)- تحقق ان النقطة B تنتمي إلى (E)

(ب)- عين طبيعة المجموعة (E) و عناصرها المميزة

التمرين الرابع (06 نقاط) :

g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -x - \ln x$

1- (أ)- ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(ب) - بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.5 < \alpha < 0.6$

(ج)- استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

2- (أ)- أثبت أنه من أجل كل x من: $]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

(ب)- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها (حساب النهايات مطلوب)

لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \ln x$

3- (أ)- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ فسر النتيجة بيانيا ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (C_h)

(ب)- احسب كل من $f(1)$; $f(2)$; $f(e)$ ثم انشئ المنحنى (C_f) حيث $f(\alpha) \approx -1.3$

تصحيح الموضوع المقترح رقم 03 لشعبة علوم تجريبية



حل التمرين الاول (05 نقاط) :

لدينا الكيس به 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1;1;1;1
3 كرات سوداء مرقمة بـ : 2;0;0

طريقة السحب سحب 3 كرات في ان واحد ← توفيق

1- حساب احتمال الحادثة : A " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس اللون "

عدد الحالات الممكنة $C_7^3 = 35$ عدد الحالات الملائمة لـ A $C_4^3 = 4$ ومنه $p(A) = \frac{4}{35}$

حساب احتمال الحادثة B " مجموع ارقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 2 "

عدد الحالات الملائمة لـ B : $C_4^2 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^2 = 6 \times 2 + 1 \times 1 + 13$ ومنه $p(B) = \frac{13}{35}$

حساب احتمال الحادثة C " الكرات المسحوبة ارقامها مختلفة مثلي مثلي "

عدد الحالات الملائمة لـ C : $C_4^3 \times C_2^1 \times C_1^1 = 8$ ومنه $p(C) = \frac{8}{35}$

حساب احتمال الحادثة $A \cap B$ الكرات المسحوبة تحمل نفس اللون و نفس الارقام ومنه $p(A \cap B) = p(A) = \frac{4}{35}$

طريقة السحب الثانية سحب كرتين على التوالي و بالارجاع ← قائمة
 X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج جداء الرقمين المحصل عليهما

(2)- قيم المتغير العشوائي X هي 0 ; 1 ; 2 ; 4

اثبات ان : $p(X = 2) = \frac{8}{49}$ عدد الحالات الممكنة هو $7^2 = 49$

عدد الحالات الملائمة : $(1 - 2)$ او $(2 - 1)$ ومنه : $2^2 + 2^2 = 8$ أي : $p(X = 2) = \frac{8}{49}$

(3)- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

$X = x_i$	0	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{24}{49}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{8}{49}$	$\frac{1}{49}$

= 1

حساب الامل الرياضي : $E(X) = \frac{16}{49} + \frac{16}{49} + \frac{4}{49} = \frac{36}{49}$

حل التمرين الثاني (04 نقاط) :

لدينا : $U_0 = 1$ $U_1 = 2$ و $U_n = 2U_{n-1} + 3U_{n-2}$

(1)- نعتبر (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $V_n = \alpha U_n + \beta U_{n-1}$ حيث α و β عدنان حقيقيان غير منعدمان .



و $U_3 = 2U_2 + 3U_1 = 20$

(ا)- حساب U_2 و U_3 لدينا $U_2 = 2U_1 + 3U_0 = 7$

(ب)- حساب : V_1 ; V_2 و V_3 بدلالة α و β

لدينا $V_1 = \alpha U_1 + \beta U_0 = 2\alpha + \beta$ $V_2 = \alpha U_2 + \beta U_1 = 7\alpha + 2\beta$ $V_3 = \alpha U_3 + \beta U_2 = 20\alpha + 7\beta$

ج-اثبات انه كانت : V_1 ; V_2 و V_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

لدينا V_1 ; V_2 و V_3 حدود متتابعة من متتالية هندسية ومنه $V_2^2 = V_1 \times V_3$

ومنه : $(7\alpha + 2\beta)^2 = (2\alpha + \beta) \times (20\alpha + 7\beta)$ أي : $49\alpha^2 + 4\beta^2 + 28\alpha\beta = 40\alpha^2 + 7\beta^2 + 34\alpha\beta$

ومنه : $9\alpha^2 - 3\beta^2 - 6\alpha\beta = 0$ أي : $3(3\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta) = 0$ أي : $3\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$

(2)-بوضع : $\alpha = \beta$:

نجد ان $V_n = \alpha U_n + \alpha U_{n-1}$ أي $V_n = \alpha[U_n + U_{n-1}]$ ومنه : $V_{n+1} = \alpha[3U_{n-1} + 3U_n]$

أي $V_{n+1} = \alpha[2U_n + 3U_{n-1} + U_n]$ ومنه : $V_{n+1} = 3V_n$ أي $V_{n+1} = \alpha[3U_{n-1} + 3U_n]$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $V_1 = 3\alpha$

(ب)-الاستنتاج أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $U_n + U_{n-1} = 3^n$

لدينا : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ أي $V_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$ ومنه : $V_n = \alpha \times 3^n$ ومنه : $\alpha \times 3^n = \alpha[U_n + U_{n-1}]$

وعليه : $U_n + U_{n-1} = 3^n$

(3)- بوضع : $\beta = -3\alpha$

لدينا بنفس الطريقة السابقة : $V_n = \alpha U_n - 3\alpha U_{n-1}$ أي : $V_n = \alpha[U_n - 3U_{n-1}]$ ومنه :

$V_{n+1} = \alpha[U_{n+1} - 3U_n]$ و بالتعويض نجد ان : $V_{n+1} = \alpha[-U_n + 3U_{n-1}]$ ومنه :

$V_{n+1} = -\alpha[U_n - 3U_{n-1}]$ ومنه : $V_{n+1} = -V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = -1$ وحدها الأول $V_1 = -\alpha$



عبارة الحد العام : لدينا $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ ومنه $V_n = -(\alpha) \times (-1)^{n-1}$ أي $V_n = \alpha \times (-1)^n$

ومنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: لدينا $\alpha(-1)^n = \alpha[U_n - 3U_{n-1}]$ أي $U_n - 3U_{n-1} = (-1)^n$

(ج)- تبيان : (V_n) متتالية هندسية [معناه $\beta = \alpha$ أو $\beta = -3\alpha$]

لدينا (V_n) متتالية هندسية معناه : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$ أي : $(\alpha - \beta)(3\alpha + \beta) = 0$

أي اما $\beta = \alpha$ او $\beta = -3\alpha$ و هو المطلوب

حل التمرين الثالث (05 نقاط) :



1- إيجاد العددين المركبين Z_1 و Z_2 حيث : $\begin{cases} Z_1 + 2Z_2 = 6 + 3i \\ iZ_1 - Z_2 = 2i \end{cases}$

لدينا $\begin{cases} Z_1 + 2Z_2 = 6 + 3i \\ iZ_1 - Z_2 = 2i \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} Z_1 + 2Z_2 = 6 + 3i \\ -Z_1 - iZ_2 = -2 \end{cases}$ وبالجمع طرفا لطرف نجد ان $(2-i)Z_2 = 4 + 3i$

وعليه : $Z_2 = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+4i+6i-3}{5} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$ ومنه $Z_2 = 1+2i$ و بالتعويض نجد ان $Z_1 = 4-i$

لدينا : $Z_A = 4-i$; $Z_B = 4+i$; $Z_C = 1+2i$; $Z_D = -i$

2-(أ)- البرهان أن النقط A ; B ; C و D تنتمي الى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

لدينا : $Z_A - 2 = 2-i$; $Z_B - 2 = 2+i$; $Z_C - 2 = -1+2i$ و $Z_D - 2 = -2-i$

ولدينا من جهة اخرى : $|Z_A - 2| = |Z_B - 2| = |Z_C - 2| = |Z_D - 2| = \sqrt{5}$ ومنه فان النقط A ; B ; C و D

تنتمي الى الدائرة التي مركزها $(Z_w = 2)$ وطول نصف قطرها يساوي $\sqrt{5}$



(ب)-كتابة العدد المركب: $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم الاسي

لدينا : $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-i - 4 - i}{1 + 2i - 4 - i}$ ومنه : $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-4 - 2i}{-3 + i}$ أي : $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-4 - 2i}{-3 + i}$

ومنه : $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = 1 + i$ و الشكل الاسي : $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



(ج)- طبيعة المثلث BCD المثلث BCD قائم في C و متساوي الساقين

حساب مساحة المثلث BCD : لدينا : $S = \frac{1}{2} BC \times CD = \frac{1}{2} BC^2$ أي : $S = 5u.a$

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و يحول النقطة B الى النقطة D
3- اعطاء العبارة المركبة للتشابه S مع تحديد عناصره

لدينا الكتابة المركبة للتشابه S هي : $Z' = aZ + b$ ومنه : $Z_A = aZ_A + b$ لان النقطة A هي المركز

وبما ان : $S(B) = D$ فان : $Z_D = aZ_B + b$ بالطرح نجد ان : $a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$

نجد ان : $a = 2i$ و بالتعويض نجد ان : $b = 4 - 9i$

العبارة المركبة لـ S هي $S(M) = M'$ معناه : $Z' = 2iZ + 4 - 9i$

نسبة التشابه $k = |2i|$ ومنه : $k = 2$ و لدينا $\theta = \arg(2i)$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$

(ب)- ايجاد Z_F لاحقة النقطة F علما ان O هي صورة F بالتشابه S

مما سبق يمكن ان نكتب : $Z_O = 2iZ_F + 4 - 9i$ أي : $2iZ_F + 4 - 9i = 0$ ومنه : $Z_F = \frac{9}{2} + i$

لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة و التي تحقق : $|2iZ + 2 - 9i| = 1$

4- (ا) التحقق ان النقطة B تنتمي الى : (E)

لدينا : $2iZ_B + 2 - 9i = 2i(4 + i) + 2 - 9i = -i$ ومنه $|2iZ_B + 2 - 9i| = |-i| = 1$ أي $B \in (E)$

(ب)- تعيين طبيعة المجموعة (E) و عناصرها المميزة

لدينا $|2iZ + 2 - 9i| = 1$ معناه $|Z - (\frac{9}{2} + i)| = \frac{1}{2}$ أي (E) دائرة مركزها النقطة F و طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

حل التمرين الرابع (06 نقاط) :

لدينا الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$: $g(x) = -x - \ln x$

1- (ا) دراسة تغيرات الدالة g

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x - \ln x] = +\infty$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x - \ln x] = -\infty$

اتجاه تغير الدالة : g

من أجل كل x من : $]0; +\infty[$ $g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ و $g'(x) < 0$ ومنه متناقصة تماما على $]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$		$-\infty$

جدول تغيرات الدالة g

(ب) - اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.5 < \alpha < 0.6$

من جدول التغيرات لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0; +\infty[$ ومنه فهي مستمرة ومتناقصة على المجال $]0, 5; 0, 6[$

وبما ان: $g(0.6) \simeq$ $g(0.5) \simeq$

مما سبق وبما ان $g(0.5) \times g(0.6) < 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

α محصور بين 0,5 و 0,6 أي : $g(\alpha) = 0$

(ج) - استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$



x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

لدينا f معرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$

2- (ا) - اثبات أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

لدينا يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{(x-1)}{x} \ln x$

ومنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \left[\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ أي

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} [\ln x + x] \quad \text{أي} \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} [1 + \ln x + x - 1] \quad \text{ومنه:} \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \left[1 + \ln x + x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$$

واخيرا من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

(ب) - استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لدينا $f'(x) = 0$ معناه: $g(x) = 0$ أي $x = \alpha$ و اشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ هي عكس اشارة $g(x)$

اشارة : $f'(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + \frac{(x-1)}{x} \ln x \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} + \frac{(x-1)}{x} \ln x \right] = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$



لدينا : $h(x) = \ln x$ h هي الدالة الوغرتمية

3-1) حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln x \right] = 0$

تفسير النتيجة بيانيا : المنحنيان (C_h) و (C_f) متقاربان بـ $+\infty$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى المنحنى (C_h) **ندرس اشارة الفرق** $f(x) - h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

وجدنا سابقا ان: $f(x) - h(x) = -\frac{1}{x} [1 + \ln x]$

نلخص الدراسة في الجدول التالي :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	-	-	-
$1 + \ln x$	-	0	+
$f(x) - h(x)$	+	0	-

$f(x) - h(x) = 0$ معناه: $x = e^{-1}$ ومنه (C_f) يقطع (C_h) في النقطة ذات الفاصلة e^{-1}

$f(x) - h(x) < 0$ معناه: $x \in]0; e^{-1}[$ ومنه (C_f) فوق (C_h)

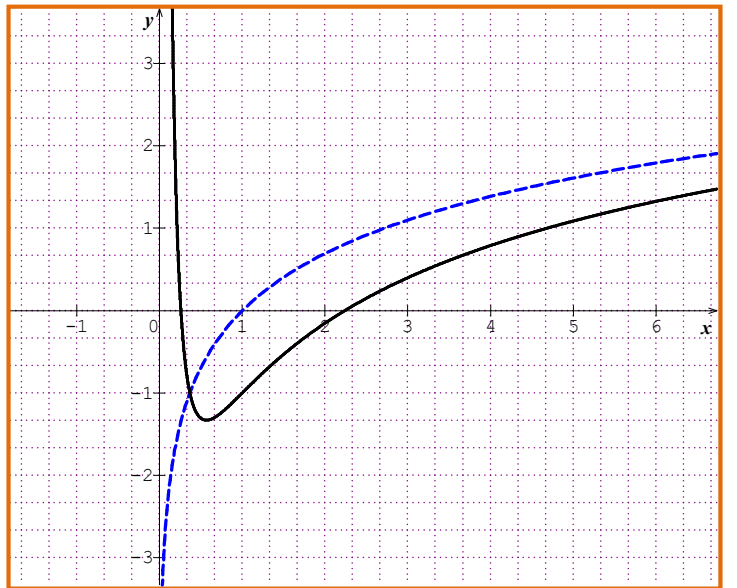
$f(x) - h(x) = 0$ معناه: $x \in]e^{-1}; +\infty[$ ومنه (C_f) تحت (C_h)

(ب-) حساب الصور : $f(1) = -1$; $f(2) = \frac{-1 + \ln 2}{2} \approx -0.15$; $f(e) \approx 0.26$

-انشاء المنحنى (C_f) حيث $f(\alpha) \approx -1.3$



لا تعش نصف حلم
لا تلمسك بنصف امل
نصف شربة لن تروي ظمأك...
و نصف وجبة لن تشبع جوعك
....نصف طريق لن يوصلك
الى اى مكان..
نصف فكرة لن تعطي لك نتيجة





BAC 2020 SE -ALG- 01-062020

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2020

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n}$

(1-ا) - اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $U_n < 2$

(ب) - حدد اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

(ج) - بين انه اذا كانت: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$ فان l يحقق: $(l-2)^2 = 0$ ثم جد قيمة l

- نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) كما يلي: $V_n \times (U_n - 2) = 1$

(2-ا) - بين ان (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها r وحدها الاول V_0

(ب) - اكتب عبارة كل من V_n و U_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$

- نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \frac{1}{e^{2v_2}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$

(3) - عبر بدلالة n عن المجموع S_n

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) - حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $Z^2 - 6Z + 12 = 0 \dots (*)$

(2) - اكتب على الشكل المثلي ثم الاسي حلي المعادلة $(*)$ Z_1 الحل الذي جزءه التخيلي موجب و Z_2 الحل الاخر

A و B نقطتان من المستوي لاحقاتهما على الترتيب Z_1 و Z_2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \vec{U}; \vec{V})$

(3-ا) - بين ان المثلث ABO متقايس الاضلاع ثم احسب مساحته

(ب) - عين Z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO

لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$

(4) - تحقق ان النقطة A تنتمي الى (E) ثم حدد طبيعة المجموعة (E) و عناصرها المميزة

التمرين الثالث (05 نقاط) :

يحتوي صندوق على 6 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأعداد: 1 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 و 4 .
نسحب على التوالي كرتين من الصندوق وبدون إرجاع
نرمز بـ a للعدد المسجل على الكرة الأولى المسحوبة وبـ b للعدد المسجل على الثانية.
نعتبر الحدثين التاليين: A : " العدد $\frac{b}{a}$ عدد طبيعي "
و B : " الحصول على كرة تحمل العدد 4 في السحبة الأولى "

(1-أ) احسب احتمال الحادث A و B و $A \cap B$

(ب) هل الحادثان A و B مستقلتان ؟ برر اجابتك

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لكرتين بالعدد $\frac{b}{a}$.

(2-أ) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X

(ب) اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = x^3 + x - 2$

(1-أ) احسب $P(1)$ ثم ادرس إشارة $P(x)$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في

مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(2-أ) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

(3-أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ فان : $f'(x) = \frac{P(x)}{x^3 + x}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(4-أ) بين ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ)

(5-أ) بين ان المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < -0.8$

(6-أ) انشئ من المنحنى (C_f) والمقارب (Δ)

m وسيط حقيقي

(7-أ) ناقش حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $x^2(1 - e^{m-x}) = -1$

انتهى الموضوع الأول



نصحيح الموضوع المقترح رقم 04 لشعبة علوم تجريبية



حل التمرين الاول: (04.5) (نقاط) 🍌

لدينا المتتالية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n}$

1-1) - اثبات انه انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n < 2$ نستعمل البرهان بالتراجع
مرحلة التحقق: من اجل $n = 0$ لدينا: $U_0 = 1$ وبما ان $1 < 2$ فان الخاصية محققة

مرحلة البرهنة: (الاثبات)

نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $U_n < 2$ (فرضية التراجع) محققة و نبرهن انه من اجل كل عدد طبيعي فان $U_{n+1} < 2$

لدينا : من الفرضية: $U_n < 2$ ومنه: $-U_n > -2$ أي: $4 - U_n > -2 + 4$ ومنه: $4 - U_n > 2$

ومنه: $\frac{1}{4 - U_n} < \frac{1}{2}$ أي: $\frac{4}{4 - U_n} < 2$ واخيرا من اجل كل عدد طبيعي فان: $U_{n+1} < 2$
(ب-) تحديد اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1} - U_n = \frac{4}{4 - U_n} - U_n$ ومنه: $U_{n+1} - U_n = \frac{4 - 4U_n + U_n^2}{4 - U_n}$

ومنه يمكن ان نكتب : $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 2)^2}{4 - U_n}$

لدينا من السؤال: 1-1) $U_n < 2$ أي: $4 - U_n > 2$ أي: $4 - U_n > 0$ ومنه: $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) متتالية متزايدة تماما

استنتج ان (U_n) متقاربة : بما ان (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بـ 1 فهي متتالية متقاربة

ج-) اثبات انه اذا كانت: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$ فان l يحقق: $(l - 2)^2 = 0$

بما ان (U_n) متقاربة فان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ وكذلك $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$ و عليه: $l = \frac{4}{4 - l}$ أي: $l(4 - l) = 4$

ومنه: $l^2 + 4l - 4 = 0$ أي: $(l - 2)^2 = 0$ و هو المطلوب

حساب النهاية l لدينا: $(l - 2)^2 = 0$ معناه $l - 2 = 0$ اي $l = 2$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) كما يلي: $V_n \times (U_n - 2) = 1$

2-1) اثبات ان (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها r وحدها الاول V_0

لدينا: $V_n \times (U_n - 2) = 1$ معناه: $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ أي: $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 2}$



نحسب الفرق: $V_{n+1} - V_n$

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}-2} - \frac{1}{U_n-2}$ ومنه: $V_{n+1} - V_n = \frac{4-U_n}{-4+2U_n} - \frac{1}{U_n-2}$

ومنه: $V_{n+1} - V_n = \frac{4-U_n}{2(U_n-2)} - \frac{2}{2(U_n-2)}$ أي: $V_{n+1} - V_n = \frac{2-U_n}{2(U_n-2)}$ ومنه: $V_{n+1} - V_n = \frac{-(U_n-2)}{2(U_n-2)}$

ومنه: $V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{2}$ أي (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها $r = -\frac{1}{2}$ وحدها الاول $V_0 = -1$
(ب)- عبارة كل من V_n و U_n بدلالة n

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $V_n = V_0 + nr$ ومنه: $V_n = -1 - \frac{n}{2}$

عبارة U_n بدلالة n لدينا: $V_n = \frac{1}{U_n-2}$ ومنه: $U_n - 2 = \frac{1}{V_n}$ أي: $U_n = \frac{1}{V_n} + 2$

باتعويض نجد انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \frac{2n+2}{n+2}$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$ لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+2}{n+2} \right)$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \frac{1}{e^{2v_2}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$
(3)- التعبير عن المجموع S_n بدلالة n

لدينا مما سبق: $V_n = -1 - \frac{n}{2}$ ومنه: $2V_n = -2 - n$ ومنه: $e^{2V_n} = e^{-2-n}$ أي: $\frac{1}{e^{2V_n}} = e^{2+n}$

ومنه: $S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \frac{1}{e^{2v_2}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$ معناه $S_n = e^{2+0} + e^{2+1} + \dots + e^{2+n}$

ومنه: $S_n = e^2 [e^0 + e^1 + \dots + e^n]$ ومنه: $S_n = e^2 \times e^0 \left[\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1} \right]$ اخيرا: $S_n = \frac{e^2 (e^{n+1} - 1)}{e - 1}$

حل التمرين الثاني (05 نقاط) 🤖

(1)- حل المعادلة: $Z^2 - 6Z + 12 = 0 \dots (*)$

لدينا: $\Delta = 36 - 4(12) = -12$ ومنه: $\Delta = 12i^2$ أي: $\Delta = (2\sqrt{3}i)^2$

ومنه: $Z_1 = \frac{6+2\sqrt{3}i}{2}$ أي: $Z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ و $Z_2 = 3 - \sqrt{3}i$ ومنه: $S = \{3 + \sqrt{3}i; 3 - \sqrt{3}i\}$

(2)- كتابة حلي المعادلة (*) على الشكل المثلثي ثم الاسي

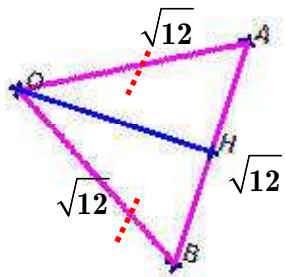
لدينا: $Z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ ومنه: $Z_1 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ وشكله الاسي هو: $Z_1 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$

لدينا: $Z_2 = 3 - \sqrt{3}i$ ومنه: $Z_2 = 2\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$ وشكله الاسي هو: $Z_2 = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

لدينا A و B نقطتان من المستوي لاحتقاهما على الترتيب Z_1 و Z_2

(3)- اثبات ان المثلث ABO متقايس الاضلاع:

لدينا: $AB = |Z_2 - Z_1| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{12}$ و $OA = |Z_1| = \sqrt{12}$ و $OB = |Z_2| = \sqrt{12}$



بما ان : $OA = AB = OB$ فان المثلث ABO متقايس الاضلاع
حساب مساحة المثلث ABO : لدينا لتكن H النقطة منتصف الضلع $[AB]$

ومنه: $s = AB \times OH$

حساب OH : لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس نجد ان: $OH^2 = OB^2 - HB^2$

أي: $OH = 9$ ومنه $s = 9\sqrt{12}u.a$

(ب)-تعيين Z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO

لدينا النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;1),(O;1)\}$ أي: $Z_G = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_o}{3}$ أي: $Z_G = 2$

لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$

(4)-التحقق ان النقطة A تنتمي الى (E)

لدينا $A \in (E)$ معناه: $AO^2 + AB^2 = 24$

مما سبق وجدنا ان: $OA = AB = \sqrt{12}$ ومنه: $AO^2 + AB^2 = 12 + 12 = 24$ ومنه: A تنتمي الى (E)

طبيعة المجموعة (E) و عناصرها المميزة :

من اجل النقطة M من المستوي لدينا $M(x;y)$ يكون لدينا: $MO^2 = x^2 + y^2$

لدينا كذلك: $MA^2 = (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2$ و $MB^2 = (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2$

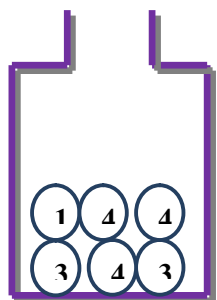
بالتعويض و النشر و التبسيط نجد ان: $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$ معناه: $x^2 + y^2 - 4x = 0$

أي: $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4$ ومنه (E) هي دائرة مركزها النقطة G و طول نصف قطرها 2

حل التمرين الثالث (05 نقاط):

يحتوي صندوق على 6 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس تحمل الأعداد: 1 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 و 4 .
طريقة السحب سحب كرتين من الصندوق على التوالي وبدون إرجاع

ترتيبية



1-1)حساب احتمالات الحوادث A و B و

الحادثة A : " العدد $\frac{b}{a}$ عدد طبيعي "

عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$

عدد الحالات الملائمة للحادثة A لدينا: $A_1^1 \times A_2^1 + A_1^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_2^1 + A_2^1 \times A_1^1 = 15$

ومنه $P(A) = \frac{15}{30}$

الحادثة B : " الحصول على كرة تحمل العدد 4 في السحبة الأولى "

عدد الحالات الملائمة للحادثة B : $A_3^1 \times A_5^1 = 3 \times 5 = 15$ ومنه: $P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

الحادثة $A \cap B$

عدد الحالات الملائمة للحادثة $A \cap B$ معناه: $\frac{b}{a}$ عدد طبيعي و $a = 4$ ومنه: $A_3^1 \times A_2^1 = 3 \times 2 = 6$

ومنه: $P(A \cap B) = \frac{6}{30}$ أي: $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

(ب) لدينا الحادثان A و B مستقلتان معناه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

مماسبق: $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ و $P(A) \times P(B) = \frac{13}{30} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{60}$ ومنه $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ ومنه

الحادثان A و B غير مستقلتان

لدينا X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لكرتين بالعدد $\frac{b}{a}$.

(1-2) القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي: 1 ; 3 ; 4 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$;

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X



$X = x_i$	1	3	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$

= 1

حساب الامل الرياضي $E(X)$: $E(X) = \frac{16}{30} + \frac{6}{30} + \frac{12}{30} + \frac{3}{20} + \frac{8}{30} + \frac{12}{30}$ ومنه: $E(X) = \frac{117}{60}$

حل التمرين الرابع (05 نقاط):

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = x^3 + x - 2$

(1) حساب $P(1)$ لدينا: $P(1) = 0$

دراسة اشارة $P(x)$ لاحظ انه يمكن كتابة $P(x)$ على الشكل: $P(x) = (x-1)(x^2 + x + 2)$

بما انه من اجل كل عدد حقيقي x : $x^2 + x + 2 > 0$ فان اشارة $P(x)$ من اشارة $(x-1)$

جدول الاشارة

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$p(x)$	-	0	+

f معرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

(2) حساب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

(3-1) اثبات انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{P(x)}{x^3 + x}$

f تقبل الاشتقاق على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث:

$$f'(x) = 1 - \frac{x^3}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ أي: } f'(x) = 1 - \frac{2}{x(1+x^2)} \text{ ومنه: } f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} \times \frac{x^2}{1+x^2}$$

أي من أجل كل من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{P(x)}{x^3 + x}$

$f'(x) = 0$ معناه: $P(x) = 0$ أي: $x = 1$

الإشارة

لدينا: $f'(x) = \frac{P(x)}{x(x^2 + 1)}$ ومنه $f'(x) = \frac{P(x)}{x(x^2 + 1)}$

(ب)- جدول الإشارة :

x	$-\infty$	$\hat{0}$	1	$+\infty$
x	$\rightarrow$	$\parallel$	$+$	$+$
$p(x)$	$\rightarrow$	$\parallel$	$\rightarrow$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$\rightarrow$	$+$

جدول تغيرات الدالة: f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$\rightarrow$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$1 + \ln 2$	$+\infty$

4-1) - اثبات ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

لدينا: $f(x) - y = x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

أي المستقيم (Δ) ذي مقارب مائل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

(ب)- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ أي إشارة المقدار $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

من أجل كل من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ فإن: $\frac{1}{x^2} > 0$ ومنه: $1 + \frac{1}{x^2} > 1$

أي $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > \ln 1$ ومنه: $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > 0$ أي: $f(x) - y > 0$ ومنه المنحنى (C_f) فوق المقارب (Δ)

5- اثبات ان المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < -0.8$



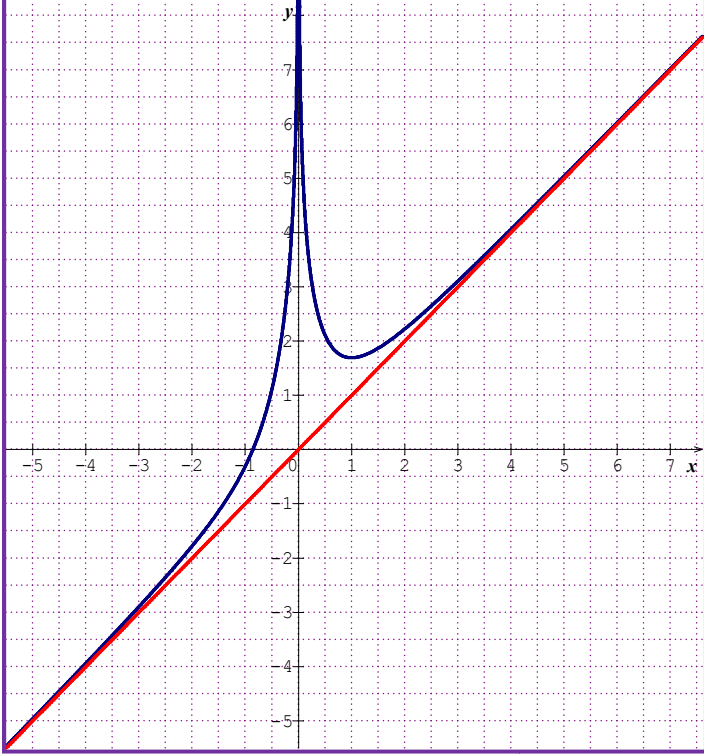
من جدول تغيرات الدالة f لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و بالتالي فهي مستمرة و

متزايدة تماما على المجال $]-1; -0.8[$ و من جهة أخرى: $f(-1) \approx -0.31$ $f(-0.8) \approx 0.14$

مما سبق وبما ان $f(-1) \times f(-0.8) < 0$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا

α محصور بين -1 و -0.8 أي : $f(\alpha) = 0$

(6)- انشاء المنحنى (C_f) و المقارب (Δ) :



(7)- المناقشة حسب قيم الوسيط m لعدد

و اشارة حلول المعادلة : $x^2(1 - e^{m-x}) = -1$

لدينا: $x^2(1 - e^{m-x}) = -1$ معناه

$1 - e^{m-x} = -\frac{1}{x^2}$ ومنه: $e^{m-x} - 1 = \frac{1}{x^2}$

أي: $e^{m-x} = 1 + \frac{1}{x^2}$ ومنه: $m - x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

اخيرا: $m = x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ أي $m = f(x)$

حلول المعادلة $m = f(x)$ هو ايجاد عدد

نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المتحرك $y = m$

بقراءة بيانية نكتب:

- اذا كان: $m \in]-\infty; 1 + \ln 2[$ يوجد حل سالب

- اذا كان: $m = 1 + \ln 2$ فانه يوجد حلان مختلفان في الاشارة

- اذا كان: فانه يوجد ثلاث حلول (حلان موجبان وحل سالب)



الى الملتقى



لا تتوقف أبداً عن مطاردة أحلامك



درجة الصعوبة



دورة: 2020

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0 = 1$; $U_1 = 2$ وبالعلاقة : $2U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n$

ومن اجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- احسب كل من V_0 و V_1

ب- بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q

2- اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

3- بين ان : $S_n = U_n - 1$

ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] + 1$ هل المتتالية متقاربة (U_n) علل اجابتك

التمرين الثاني: (05 نقاط)

B_1 و B_2 كيسان متماثلان الكيس B_1 يحوي على كرتين تحملان الرقمين 1 ; 2 بينما الصندوق B_2 يحوي على 4

كرات تحمل الارقام 1 ; 2 ; 3 ; 4

جميع الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللس

نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرة بطريقة عشوائية

1- ماهو احتمال سحب كرة تحمل الرقم 1

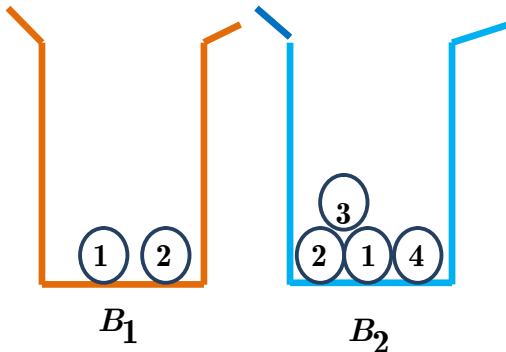
2- اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 ف ماهو احتمال ان تكون

قد سحبت من الكيس B_1

نجعل محتوى الكيسين في كيس واحد ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتين

نعتبر الحدثين التاليين : A : " الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم "

B : " الحصول على كرتين مجموع رقميهما عدد فردي "



3- احسب احتمال كل من الحادثتين A و B

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين القيمة المطلقة لفرق رقمي الكرتين المسحوبتين

4- ا) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X

ب) اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1- ا) جد العددين الحقيقيين α و β حيث: $(\alpha + i\beta)^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

ب) استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول Z التالية: $Z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{U}, \vec{V})$ نعتبر النقط: A, B و C التي لواحقها على

الترتيب $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$ $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$ $Z_C = 2$

2- ا) بين ان: $Z_B - Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} (Z_A - Z_C)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $Z = 2(-1 + e^{i\theta})$ مع $(\theta \in \mathbb{R})$

3- ا) بين ان (E) هي دائرة مركزها النقطة w ذات اللاحقة $Z_w = -2$ يطلب تحديد نصف قطرها

ب) تحقق ان النقطتين A و B تنتميان الى المجموعة (E)

ج) بين ان (C) هي صورة (E) بالدوران R الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة B الى النقطة C

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

4- ا) اعط الكتابة المركبة للتشابه S

ب) بين ان لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه المباشر S هي: $Z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

5- اكتب Z_A و Z_D على الشكل الاسي ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

1- ا) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

ب) - بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ فان: $0 < g(x) < e$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2- (أ) من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ احسب $f'(x)$ وبين ان: $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$

(ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ فان: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 e^{\frac{x}{x+1}}$ ثم جد $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

3- (أ) بين ان المعادلة $f'(x) = 0$: تقبل حلين احدهما 0 والاخر α حيث $-0.72 < \alpha < -0.71$

(ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4- (أ) بين ان: $f(\alpha) = -\alpha(\alpha+1)$ ثم اعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

5- (أ) اثبت ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y - x + e - 1 = 0$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

(ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

(ج) انشئ المنحنى (C_f) و (Δ)

m وسيط حقيقي

6- ناقش حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = |m|$

نعتبر الدالة h الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = -x + 1 + e e^{-\frac{1}{x}}$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

7- (أ) عين قيمة β التي تحقق: $h(x) = -f(x-1) + \beta$

(ب) اشرح كيفية انشاء انطلاقا (C_h) من المنحنى (C_f)



تصحيح الموضوع المقترح رقم 05 لشعبة علوم تجريبية 2020



Yes
we can!



حل التمرين الاول: (04.5 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $U_0 = 1$; $U_1 = 2$ وبالعلاقة: $2U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n$

(1-1) حساب كل من V_0 و V_1 : $V_0 = U_1 - U_0 = 1$ و $V_1 = U_2 - U_1$ لكن: $U_2 = \frac{5}{2}$ ومنه: $V_1 = \frac{1}{2}$

(ب- اثبات ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q :

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $V_n = U_{n+1} - U_n$ ومنه: $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$

ومنه: $2V_{n+1} = 2U_{n+2} - 2U_{n+1}$ أي $2V_{n+1} = (3U_{n+1} - U_n) - 2U_{n+1}$

أي $2V_{n+1} = U_{n+1} - U_n$ ومنه $2V_{n+1} = V_n$ أي $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ ومنه (V_n) متتالية هندسية يطلب

اساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الاول $V_0 = 1$

(2- كتابة عبارة V_n بدلالة n :

من اجل كل عدد طبيعي n : $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه: $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

(1-3) اثبات ان: $S_n = U_n - 1$

لدينا $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$ معناه: $S_n = (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1})$

ومنه: $S_n = -U_0 + U_n$ أي: $S_n = -1 + U_n$ ومنه: $S_n = U_n - 1$

(ب- البرهان انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 1$

لدينا $S_n = U_n - 1$ ومنه $U_n = S_n + 1$ أي: $U_n = V_0 \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right] + 1$ ومنه $U_n = 2 \left[1 - q^n \right] + 1$

اخيرا:

$U_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 1$

المتتالية (U_n) متقاربة التبرير $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2[1 - 0] + 1$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)

الكيس B_1 به كرتين مرقمتين بـ 1 ; 2

الكيس B_2 به 4 كريات تحمل الارقام 1 ; 2 ; 3 ; 4



Yes
we can!



لتكن n_1 الحادثة " الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1 "

باستعمال شجرة الاحتمالات

(1) احتمال سحب كرة تحمل الرقم 1

$$p(n_1) = \frac{3}{8} \text{ ومنه } p(n_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

(2) اذا كانت الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو احتمال ان تكون قد سحبت من الكيس B_1

$$p_{n_1}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap n_1)}{p(n_1)} \text{ لدينا: ومنه: } p_{n_1}(B_1) = \frac{1}{3}$$

بعد جعل محتوى الكيسين في كيس واحد فيه

6 كريات مرقمة 4 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1

طريقة السحب سحب كرتين في ان واحد

حساب احتمال الحادثة : A : " الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم "

$$C_6^2 = 15 \text{ عدد الحالات الممكنة :}$$

عدد الحالات الملائمة نفس الرقم معناه الكرتان مرقمتين [1;1] : او [2;2]

$$p(A) = \frac{2}{15} \text{ ومنه : } C_2^2 + C_2^2 = 1 + 1 = 2 \text{ أي :}$$

حساب احتمال الحادثة B : " الحصول على كرتين مجموع رقميهما عدد فردي "

عدد الحالات الملائمة : مجموع رقمي الكرتين عدد فردي معناه [1;2] او [2;4] او [2;3] او [3;4]

$$p(B) = \frac{9}{15} \text{ ومنه: } C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 = 9 \text{ أي: } p(B) = \frac{3}{5}$$

(3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين القيمة المطلقة لفرق رقمي الكرتين المسحوبتين

1-4 قيم المتغير العشوائي X 0 1 2 3

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X :

لدينا

$$p(X=0) = \frac{2}{15} \text{ ومنه } p(X=0) = \frac{2}{15} \text{ و } p(X=1) = \frac{7}{15}$$



$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$= 1$$

$$E(X) = \frac{7}{15} + \frac{8}{15} + \frac{6}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} \text{ حساب الامل الرياضي: } E(X)$$

حل التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

$$(1) \text{ ايجاد العددين الحقيقيين } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث: } (\alpha + i\beta)^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\text{لدينا: } (\alpha + i\beta)^2 = -2 - 2i\sqrt{3} \text{ معناه } \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -2 \\ 2\alpha\beta = -2\sqrt{3} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 4 \end{cases} \text{ أي } (\alpha; \beta) = \left(1; -\sqrt{3}\right) \text{ او } (\alpha; \beta) = \left(-1; \sqrt{3}\right)$$

(ب) استنتاج الحلول في المجموعة C للمعادلة : $Z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

حسب السؤال (1-1) فان $Z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ معناه : $Z = 1 - i\sqrt{3}$ او $Z = -1 + i\sqrt{3}$

$$\text{لدينا } Z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad Z_B = -1 - i\sqrt{3} \quad Z_C = 2$$



(1-2) - تبيان : $Z_B - Z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} (Z_A - Z_C)$

لدينا: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أي: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ أي: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

استنتاج طبيعة المثلث: ABC

بما أن $CA = CB$ و $\arg \left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} \right) = \frac{\pi}{3}$ أي: $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ فإن المثلث ABC

متقايس الاضلاع

(ب) - تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

لدينا: $\frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = 0$ ومنه النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC

و بمائه متقايس الاضلاع فإن O هي مركز الدائرة (C) المحيطة به

و التي طول نصف قطرها $R = OA = |Z_A| = 2$

لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $Z = 2(-1 + e^{i\theta})$ مع $(\theta \in \mathbb{R})$

(1-3) - اثبات ان (E) هي دائرة مركزها النقطة w ذات اللاحقة $Z_w = -2$

لدينا $Z = 2(-1 + e^{i\theta})$ ومنه $Z + 2 = 2e^{i\theta}$ أي $|Z + 2| = |2e^{i\theta}| = 2$ معناه

ومنه $|Z - Z_w| = 2$ ومنه (E) هي دائرة مركزها النقطة w وطول نصف قطرها 2

(ب) - التحقق ان النقطتين A و B تنتميان الى المجموعة (E)

لدينا: $|Z_A - Z_w| = 2$ ومنه $A \in (E)$ وكذلك $B \in (E)$ لان: $|Z_B - Z_w| = 2$

(ج) - اثبات ان (C) هي صورة (E) بالدوران R الذي مركزه النقطة A و يحول النقطة B الى النقطة C

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ هي: $Z' - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} (Z - Z_A)$

نثبت فقط ان: $R(w) = O$ لدينا: $e^{i\frac{\pi}{3}} (Z_w - Z_A) + Z_A = Z_O$ يمكن التحقق من ذلك

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

(1-4) - الكتابة المركبة للتشابه S : لدينا $S(M) = M'$ معناه: $Z' - Z_O = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (Z - Z_O)$

ومنه: $Z' = (1 - i)Z$

(ب) - اثبات ان لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه المباشر S هي: $Z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

لدينا: $Z_D = (1 - i)Z_A$ ومنه $Z_D = (1 - i)(-1 + i\sqrt{3})$ أي: $Z_D = -1 + i\sqrt{3} + i + \sqrt{3}$

ومنه: $Z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

(5) - كتابة Z_D و Z_A على الشكل الاسي: $Z' - Z_O = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (Z - Z_O)$

لدينا: $Z_A = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه: $Z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$



لدينا: $Z_D = (1-i)Z_A$ ومنه $Z_D = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أي: $Z_D = 2\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)}$ ومنه: $Z_D = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

استنتاج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

لدينا: $Z_D = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ أي $Z_D = 2\sqrt{2}\left[\cos \frac{5\pi}{12} + i\sin \frac{5\pi}{12}\right]$ لكن: $Z_D = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$ ومنه

$2\sqrt{2}\cos \frac{5\pi}{12} = (\sqrt{3}-1)$ و $2\sqrt{2}\sin \frac{5\pi}{12} = (\sqrt{3}+1)$

ومنه $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

حل التمرين الرابع: (05 نقاط)



$g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$: الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$: بـ

1- دراسة تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^1$ أي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = -\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$

اتجاه التغير انه من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ لدينا: $g'(x) = \left[\frac{x}{x+1}\right]' e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$

من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ لدينا: $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ و $e^{\frac{x}{x+1}} > 0$ أي: $g'(x) > 0$

أي g متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

(ب) - من جدول تغيرات نستنتج انه من اجل كل عدد

حقيقي $x > -1$ فان: $0 < g(x) < e$

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	e

لدينا الدالة f معرفة على $]-1; +\infty[$: بـ $f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$

1- حساب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}\right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}\right] = +\infty$



2- (أ) من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ لدينا: $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$

ومنه يمكن حساب الدالة المشتقة الثانية كما يلي

$$\text{من اجل كل عدد حقيقي } x > -1 : f''(x) = - \left[\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{(x+1)^2} \times e^{\frac{x}{x+1}} \right]$$

$$f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} : \text{ ومنه } f''(x) = - \left[\frac{-2(x+1)+1}{(x+1)^4} \right] e^{\frac{x}{x+1}} : \text{ أي } f''(x) = - \left[\frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} \right] e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\text{(ب)- اثبات انه من اجل كل عدد حقيقي } x > -1 \text{ فان: } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\text{وجدنا سابقا انه من اجل كل عدد حقيقي } x > -1 \text{ فان: } f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\text{أي: } f'(x) = 1 - \frac{x^2}{x^2(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} : \text{ أي } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \left[\frac{x}{x+1} \right]^2 e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$$

و

$$\text{حساب النهايات: } \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[1 - \frac{1}{x^2} \left[\frac{x}{x+1} \right]^2 e^{\frac{x}{x+1}} \right] = +\infty$$

(ج)- استنتاج اتجاه تغير الدالة f' وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: لدراسة اتجاه تغير f' ندرس إشارة دالتها المشتقة وهي f''

لدينا: من اجل كل عدد حقيقي $x > -1 : f''(x) = 0$: معناه $2x+1=0$: أي $x = -\frac{1}{2}$

جدول الإشارة :



x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
	-		+

جدول تغيرات f'

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 4e^{-1} \approx -0.47$$

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	+
$f'(x)$			0	$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$	1

إشارة الدالة المشتقة: $f'(x)$



x	-1	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
	+			+

3-ا- اثبات ان المعادلة $f'(x) = 0$: تقبل حلين احدهما 0 والاخر α حيث $-0.72 < \alpha < -0.71$

لدينا: $f'(0) = 0$ ومنه 0 حل للمعادلة: $f'(x) = 0$

من جدول التغيرات السابق لدينا: f' مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-0.72; -0.71[$ و لدينا

$$f'(-0.71) \approx 0 \text{ و } f'(-0.72) \approx 0$$

مما سبق و بما ان: $f'(-0.72) \times f'(-0.71) < 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا

$$\text{وحيدا } \alpha \text{ يحقق } -0.72 < \alpha < -0.71 \text{ و } f'(\alpha) = 0$$

(ب)- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها



x	-1	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

$$(4)- \text{اثبات ان : } f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 1)$$

$$\text{وجدنا سابقا ان : } f'(\alpha) = 0 \text{ أي : } 1 - \frac{1}{(\alpha + 1)^2} e^{\frac{\alpha}{\alpha + 1}} = 0 \text{ أي : } e^{\frac{\alpha}{\alpha + 1}} = (\alpha + 1)^2 \text{ ومنه } f(\alpha) = \alpha + 1 - (\alpha + 1)^2$$

$$\text{أي : } f(\alpha) = \alpha + 1 - \alpha^2 - 2\alpha - 1 \text{ أي : } f(\alpha) = -\alpha - \alpha^2 \text{ ومنه : } f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 1)$$

حصرا للعدد : $f(\alpha)$

$$\text{لدينا } 0.71 < -\alpha < 0.72 \text{ ومنه : } 0.28 < \alpha + 1 < 0.29 \text{ وعليه : } 0.19 < f(\alpha) < 0.20$$

(1-5)- اثبات ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y - x + e - 1 = 0$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

$$\text{لدينا : } y - x + e - 1 = 0 \text{ معناه : } y = x - e + 1 \text{ ومنه : } f(x) - y = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}} - (x - e + 1)$$

$$\text{ومنه : } f(x) - y = -e^{\frac{x}{x+1}} + e \text{ وعليه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-e^{\frac{x}{x+1}} + e \right] = 0 \text{ أي المستقيم } (\Delta) \text{ ذي}$$

المعادلة : $y = x - e + 1$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

(ب)- الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

ندرس اشارة الفرق $f(x) - y$ على المجال $]-1; +\infty[$

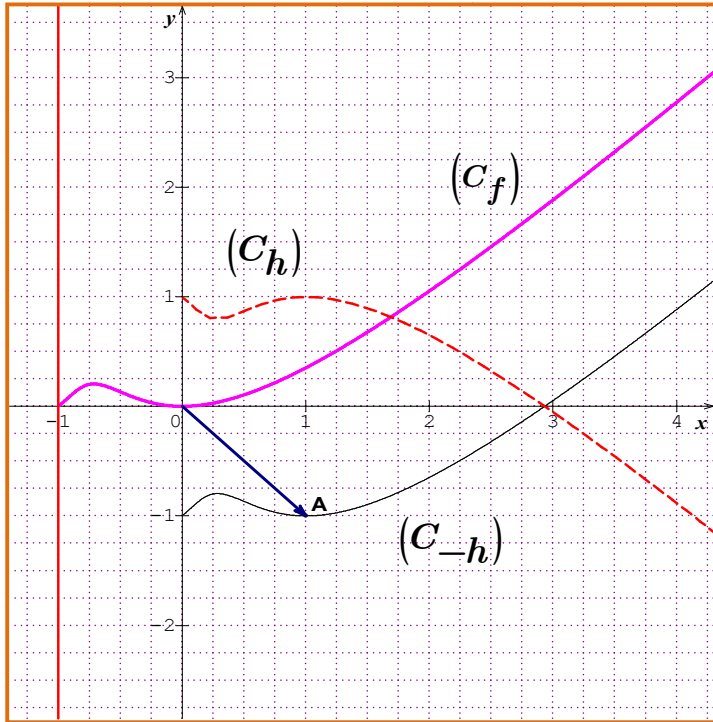
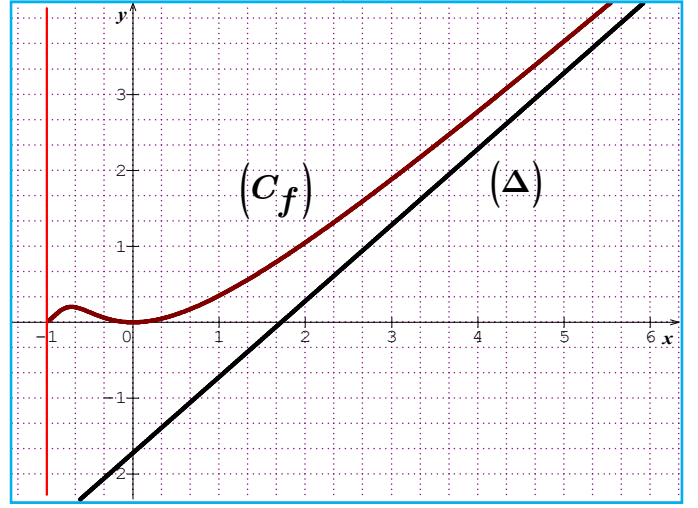
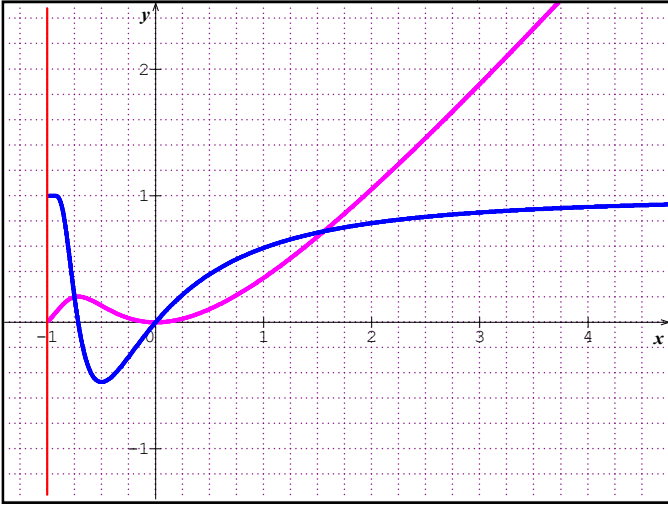
$$\text{لدينا من اجل كل عدد حقيقي } x > -1 : f(x) - y = -e^{\frac{x}{x+1}} + e \text{ أي } f(x) - y = e \left[1 - e^{-\frac{1}{x+1}} \right]$$

$$\text{ومنه اشارة الفرق } f(x) - y \text{ من اشارة المقدار } 1 - e^{-\frac{1}{x+1}}$$

$$\text{لدينا } x + 1 > 0 \text{ ومنه } -\frac{1}{x+1} < 0 \text{ أي } e^{-\frac{1}{x+1}} < 1 \text{ ومنه } 1 - e^{-\frac{1}{x+1}} > 0 \text{ أي } f(x) - y > 0 \text{ ومنه } (C_f) \text{ فوق } (\Delta)$$

(ج) انشاء المنحنى (C_f) و (Δ)





(-) المناقشة حسب قيم الوسيط m لعدد و إشارة

حلول المعادلة : $f(x) = |m|$ متروك للمحاولة

لدينا : $h(x) = -x + 1 + e e^{-\frac{1}{x}}$
 7-1) تعيين β التي تحقق : $h(x) = -f(x-1) + \beta$

لدينا : $h(x) = -f(x-1) + \beta$

$$\text{معناه : } -\left[(x-1) + 1 - e^{\frac{(x-1)}{(x-1)+1}} \right] + \beta = -x + 1 + e e^{-\frac{1}{x}}$$

ومنه : $e^{\frac{x-1}{x}} + \beta = 1 + e^{\frac{x-1}{x}}$ ومنه : $\beta = 1$

أي : $h(x) = -f(x-1) + 1$

ب-) كيفية انشاء انطلاقا (C_h) من المنحنى (C_f)

لدينا $1 - h(x) = f(x-1)$ ومنه المنحنى (C_{-h}) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه

$\vec{v}(1; -1)$ ومنه (C_h) هو نظير (C_{-h}) بالنسبة الى محور الفواصل

حكمة اليوم

يأتي البعض لحياتك
 كنعمة ويأتي البعض لحياتك
 كدرس
 فحافظ على النعمة ،
 وتعلم من الدرس





BAC 2020 SE -ALG- 01-062020

خاص بالسهرة الرمضانية

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنيةالديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2020

درجـة الصعوبة



elbassair.net

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

تكن (U_n) المتتالية العددية كما يلي $U_0 = 1$ من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2 + 3U_n^2}{1 + 3U_n}$ (1)- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $2 - U_{n+1} = \frac{3U_n(2 - U_n)}{1 + 3U_n}$ (2)- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $0 < U_n < 2$ (ب)- بين ان المتتالية (U_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة(3)- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $\frac{3U_n}{1 + 3U_n} < \frac{6}{7}$ ثم استنتج ان: $2 - U_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - U_n)$ (4)- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$ ثم جد نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 وكرتين سوداويين تحمل الأرقام : 0 ; 1 (لا نميز بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس.

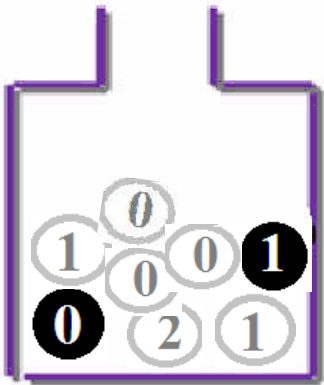
(1)- احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون "

B : " للكرتين المسحوبتين نفس الرقم "

C : " للكرتين المسحوبتين لونين مختلفين ورقمين مختلفين "

D : " جداء الرقمن المسجلين على الكرتين معدوم "



-نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل عملية سحب للكرتين مجموع الرقنين المسجلين عليهما

(1-أ) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X

(ب) اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي $E(X)$

ليكن المتغير العشوائي Y الذي يربط كل عملية سحب للكرتين المتوسط الحسابي للرقنين المسجلين عليهما

(1-أ) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y

(ب) اعط قانون احتمال المتغير العشوائي Y ثم احسب امله الرياضي $E(Y)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

(1) - حل في مجموعة الاعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول Z التالية : $Z^2 - 6Z + 12 = 0$

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{U}; \vec{V})$ لتكن A ; B و C نقط من المستوي لواحقتها على

الترتيب $Z_A = 6$; $Z_B = 3 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 3 - i\sqrt{3}$

(2) - اكتب كلا من Z_A ; Z_B ; Z_C على الشكل الاسي

(1-أ) اكتب العدد المركب : $\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي

(ب) - استنتج طبيعة المثلث ABC ثم احسب مساحته

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(1-أ) جد الكتبة المركبة للتشابه S

(ب) - عين $Z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالتشابه S

(ج) - بين ان النقط A ; B و A' في استقامية

التمرين الرابع: (06 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) - عين نهايات f عند أطراف المجال $]0; +\infty[$ ماذا تستنتج ؟

(2) - أدرس اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) - بين أن المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[\frac{1}{2}, 1]$.

(4) - استنتج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}$





نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوى

منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1)- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ماذا تستنتج ؟

(2)- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $g'(x) = 2f'(x).h(x)$

(3)- أدرس اتجاه تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(4)- بين أن : $g(\alpha) = -\frac{1}{4}$

(5)- بين أن (C_f) و (C_g) يقبلان نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(6)- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (C_g) .

(7)- أنشئ في نفس المعلم كل من (C_f) ، (C_g) والمماس (T) .

m وسيط حقيقي

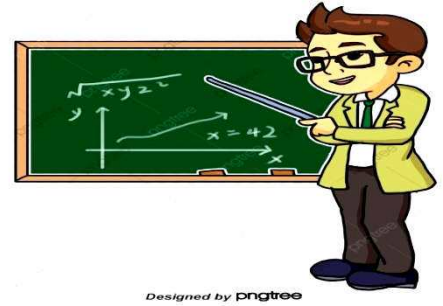
(8) - جد قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(\ln x)^2 + x(\ln x - xm) = 0$ حلا موجدان



انتهى الموضوع الأول

تصحيح الموضوع المقترح لشعبة علوم تجريبية

06



حل التمرين الاول: (04.5 ن)

لدينا (U_n) متتالية عددية معرفة بـ $U_0 = 1$ من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n}$



(1)- اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $2 - U_{n+1} = \frac{3U_n(2-U_n)}{1+3U_n}$

لدينا $2 - \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} = \frac{2(1+3U_n) - (2+3U_n^2)}{1+3U_n}$ ومنه $2 - \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} = \frac{2(1+3U_n)}{1+3U_n} - \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n}$

ومنه $2 - \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} = \frac{3U_n(2-U_n)}{1+3U_n}$ ومنه $2 - \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} = \frac{6U_n - 3U_n^2}{1+3U_n}$ أي $2 - \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} = \frac{2+6U_n-2-3U_n^2}{1+3U_n}$

(2)- البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $0 < U_n < 2$

مرحلة التحقق : من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 1$ و $0 < U_0 < 2$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n = 0$

مرحلة البرهنة الاثبات : نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $0 < U_n < 2$ محققة (فرضية التراجع)
ونبرهن انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < U_{n+1} < 2$

لدينا **من الفرضية** $0 < U_n < 2$ ومنه: $1 < 1+3U_n < 7$

ولدينا كذلك: $0 < U_n < 2$ معناه $0 < U_n^2 < 4$ أي $0 < 3U_n^2 < 12$ ومنه $2 < 2+3U_n^2 < 14$

ومنه من و نستنتج ان : $0 < \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} < 2$ أي: $0 < U_{n+1} < 2$

(ب)- اثبات ان المتتالية (U_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n فان: $U_{n+1} - U_n = \frac{2+3U_n^2}{1+3U_n} - U_n$ أي: $U_{n+1} - U_n = \frac{2+3U_n^2 - U_n(1+3U_n)}{1+3U_n}$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = \frac{2+3U_n^2 - U_n - 3U_n^2}{1+3U_n}$ أي: $U_{n+1} - U_n = \frac{2-U_n}{1+3U_n}$ ومنه: $U_{n+1} - U_n > 0$

أي ان المتتالية (U_n) متزايدة

بما ان (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى بـ 2 فهي متقاربة





(3)- اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $\frac{3U_n}{1+3U_n} < \frac{6}{7}$

وجدنا سابقا انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $0 < U_n < 2$

ومنه : $0 < 3U_n < 6$ و $0 < 1+3U_n < 7$ ومنه: $\frac{3U_n}{1+3U_n} < \frac{6}{7}$ و هو المطلوب

استنتاج انه : $2 - U_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - U_n)$

من السؤال الاول لدينا $2 - U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+3U_n}(2 - U_n)$ وبما ان $2 - U_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - U_n)$ فان $\frac{3U_n}{1+3U_n} < \frac{6}{7}$

(4)-استنتاج من اجل كل عدد طبيعي n فان: $2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$



لدينا $2 - U_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - U_n)$

من اجل $n = 0$: $2 - U_1 < \frac{6}{7}(2 - U_0)$



من اجل $n = 1$: $2 - U_2 < \frac{6}{7}(2 - U_1)$ وهكذا نجد: $2 - U_3 < \frac{6}{7}(2 - U_2)$

بالضرب طرفا لطرف نجد ان :

$$(2 - U_1)(2 - U_2)(2 - U_3) \dots (2 - U_n) < \frac{6}{7}(2 - U_0) \frac{6}{7}(2 - U_1) \frac{6}{7}(2 - U_2) \dots \frac{6}{7}(2 - U_{n-1})$$

ومنه : $(2 - U_n) < \frac{6}{7} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{6}{7}(2 - U_0)$ ومنه: $2 - U_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n (2 - U_0)$ أي $2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$



- نهاية المتتالية (U_n) باستعمال مبرهنة الحصر لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ لان $\frac{6}{7} < 1$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 وكرتين سوداويين تحمل الأرقام : 0 ; 1
(1) حساب احتمالات الحوادث :

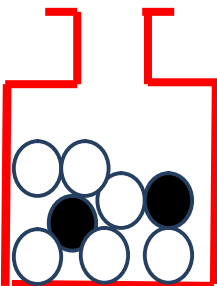
لدينا المجموع الكلي للكرات يساوي 8

طريقة السحب سحب كرتين في آن واحد كرتين ← توفيقات

عدد الحالات الممكنة $C_8^2 = 28$

حساب احتمالات الحوادث

A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون " $C_2^2 + C_6^2 = 1 + 15 = 16$



ومنه $P(A) = \frac{16}{28}$ أي $P(A) = \frac{4}{7}$

الحادثة B : "للكرتين المسحوبتين نفس الرقم" لدينا: $C_4^2 + C_3^2 = 6 + 3 = 9$ ومنه: $P(B) = \frac{9}{28}$

الحادثة C : "للكرتين المسحوبتين لونين مختلفين ورقمين مختلفين"

لدينا: $C_3^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 = 6$ ومنه: $P(C) = \frac{6}{28}$ ومنه: $P(C) = \frac{3}{14}$



الحادثة D : "جداء الرقمين المسجلين على الكرتين معدوم"

لدينا: $C_4^1 \times C_4^1 = 4 \times 4 = 16$ ومنه: $P(D) = \frac{4}{7}$ أي $P(C) = \frac{16}{28}$

لدينا: المتغير العشوائي X يربط كل عملية سحب لكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما

(1-2) تحديد قيم المتغير العشوائي X : 0 ; 1 ; 2 ; 3

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$(X = x_i)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{3}{28}$



حساب الامل الرياضي $E(X)$ $E(X) = \frac{12}{28} + \frac{14}{28} + \frac{9}{28}$ ومنه $E(X) = \frac{35}{28}$ ومنه $E(X) = \frac{5}{4}$

لدينا المتغير العشوائي Y يربط كل عملية سحب للكرتين المتوسط الحسابي للرقمين المسجلين عليهما

(1-3) القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y هي $\frac{3}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 0

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي Y



$(Y = x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$P(Y = x_i)$	$\frac{6}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{3}{28}$



حساب الامل الرياضي $E(Y)$ $E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{12}{28} + \frac{7}{28} + \frac{3}{2} \times \frac{9}{28}$ ومنه $E(Y) = \frac{53}{56}$



حل التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

(1) حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $Z^2 - 6Z + 12 = 0$

حساب المميز: $\Delta = 36 - 4(12) = -12$ ومنه $\Delta = (2\sqrt{3}i)^2$ ومنه للمعادلة حلان مركبان هما

$Z = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - i\sqrt{3}$ او $Z = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + i\sqrt{3}$ ومنه $S = \{3 - i\sqrt{3}; 3 + i\sqrt{3}\}$

لدينا: $Z_C = 3 - i\sqrt{3}$ $Z_B = 3 + i\sqrt{3}$ $Z_A = 6$

(2) كتابة Z_C Z_B Z_A على الشكل الاسي

لدينا: $Z_A = 6e^{i0}$ $Z_B = 2\sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right]$ ومنه: $Z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $Z_C = \overline{Z_B} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(3) كتابة العدد المركب: $\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} \text{ أي } \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \text{ ومنه } \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{6 - (3 + i\sqrt{3})}{6 - (3 - i\sqrt{3})} \text{ لدينا:}$$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه: } \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ و } \left|\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right| = 1 : \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه الشكل الاسي لدين: ا}$$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه:}$$

(ب-) استنتاج طبيعة المثلث ABC

ومن المثلث ABC متقايس الاضلاع

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$$

وماسبق لدينا: $AB = AC$ و

حساب مساحة المثلث ABC

$$S = S_{AHC} + S_{AHB} \text{ ومنه: } [BC] \text{ تكون النقطة منتصف الضلع}$$

$$S = 2S_{AHB} \text{ أي}$$

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times BC \times AH \text{ ومنه: } S = 2 \times \frac{1}{2} \times HC \times AH$$

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH \text{ أي:}$$

$$BC = 2\sqrt{3} : \text{ أي } BC = |Z_C - Z_B| = |-2i\sqrt{3}| \text{ لدينا:}$$

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 = 9 \text{ ومن جهة اخرى : أي: } AH = 3$$

$$S = 3\sqrt{3}u.a \text{ ومنه:}$$

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

4-ا) الكتابة المركبة للتشابه S

$$Z' - (3 - i\sqrt{3}) = \sqrt{3}i \left(Z - 3 + i\sqrt{3} \right) \text{ ومنه: } Z' - Z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} (Z - Z_C) \text{ لدينا } S(M) = M' \text{ معناه:}$$

$$Z' = \sqrt{3}iZ - 4i\sqrt{3} \text{ ومنه: } Z' = \sqrt{3}iZ - 3i\sqrt{3} - 3 + 3 - i\sqrt{3} : \text{ ومنه:}$$

(ب-) تعيين $Z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالتشابه S

$$Z_{A'} = \sqrt{3}iZ_A - 4i\sqrt{3} \text{ لدينا: } Z_{A'} = 6\sqrt{3}i - 4i\sqrt{3} \text{ ومنه: } Z_{A'} = 2i\sqrt{3} \text{ أي:}$$

ج-) اثبات ان النقط A ; B و A' في استقامية

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_{A'} - Z_A} \in \mathbb{R} \text{ تكون النقط A ; B و } A' \text{ في استقامية اذا كان}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_{A'} - Z_A} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2(-3 + i\sqrt{3})} \text{ أي } \frac{Z_B - Z_A}{Z_{A'} - Z_A} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}} \text{ ومنه } \frac{Z_B - Z_A}{Z_{A'} - Z_A} = \frac{3 + i\sqrt{3} - 6}{2i\sqrt{3} - 6} \text{ لدينا:}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_{A'} - Z_A} = \frac{1}{2} \text{ ومنه لنقط A ; B و } A' \text{ في استقامية}$$

حل التمرين الرابع: (06 نقاط)

لدينا f : معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(1) - حساب نهايات f عند أطراف المجال $]0; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الاستنتاج : محور الترتيب مقارب عمودي لـ (C_f) و محور الفواصل مقارب لـ (C_f)

(2) - دراسة اتجاه تغيرات الدالة f

لدينا f تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

الإشارة : $f'(x) = 0$ معناه : $1 - \ln x = 0$ أي $\ln x = 1$ ومنه : $x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

الإشارة

جدول تغيرات :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

(3) - اثبات أن المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]\frac{1}{2}; 1[$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2$$

لدينا مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]\frac{1}{2}; 1[$ ولدينا : $f(1) = 0$

بما أن $-\frac{1}{2}$ محصور بين $f(1)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ أي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α من $]\frac{1}{2}; 1[$.

(4) - استنتاج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}$

لدينا $h(x) = 0$ معناه $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ أي $f(x) = -\frac{1}{2}$ أي $x = \alpha$

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$	--	0	+

الإشارة

لدينا g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x}$

(1) - **حساب النهايات :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\ln x}{x}\right) \right] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\ln x}{x}\right) \left[\left(\frac{\ln x}{x}\right) + 1 \right] \right] = +\infty$$

الاستنتاج : محور الترتيب مقارب عمودي لـ (C_g) و محور الفواصل مقارب لـ (C_g)

(2) - اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $g'(x) = 2f'(x).h(x)$



لدينا تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و بتطبيق قواعد الاشتقاق نجد ان

$$g(x) = [f(x)]^2 + f(x) \text{ ومنه } g'(x) = 2f(x) \times f'(x) + f'(x) \text{ أي } g'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$$

$$\text{لدينا : } h(x) = f(x) + \frac{1}{2} \text{ أي } 2h(x) = 2f(x) + 1 \text{ و بالتعويض نجد ان : } g'(x) = 2f'(x).h(x)$$

الإشارة :

$g'(x) = 0$ معناه : $2f'(x).h(x) = 0$ ومنه : $h(x) = 0$ أو $f'(x) = 0$ أي : $x = \alpha$ أو $x = e$
(3) - دراسة اتجاه تغيرات الدالة g :

x	0	α	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$h(x)$	-	0	+	+
$g'(x)$	-	0	+	-



جدول تغيرات : .

x	0	α	e	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$\frac{1+\epsilon}{\epsilon^2}$	0

$$(4) - \text{اثبات : } g(\alpha) = -\frac{1}{4}$$

لدينا حسب السؤال (3) - المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α ومنه $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$

ولدينا : $g(x) = [f(x)]^2 + f(x)$ أي : $g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 + f(\alpha)$ ومنه : $g(\alpha) = \left[-\frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{2}$ ومنه

$$g(\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

(5) - اثبات أن (C_f) و (C_g) يقبلان نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

-معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

لكن : $f'(1) = g'(1)$ و $f(1) = g(1)$ ومنه (T) هو نفس المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 1

معادلة المماس $(T) : y = x - 1$

(6) - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (C_g) .

لدينا من اجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$ لدينا : $g(x) - f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ أي $g(x) - \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

لدينا من اجل : $x = 1$ فان : $g(x) = f(x)$ ومنه (C_f) ، (C_g) متقاطعان في النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

من اجل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$: $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 > 0$ أي $g(x) - f(x) > 0$ أي (C_g) يقع فوق (C_f)

(7) - انشاء كل من (C_f) ، (C_g) والمماس (T) .

(8) - قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(\ln x)^2 + x(\ln x - xm) = 0$ حلا موجباً

لدينا: $(\ln x)^2 + x(\ln x - xm) = 0$ ومنه

$$(\ln x)^2 + x \ln x = x^2 m : \text{أي } (\ln x)^2 + x \ln x - x^2 m = 0$$

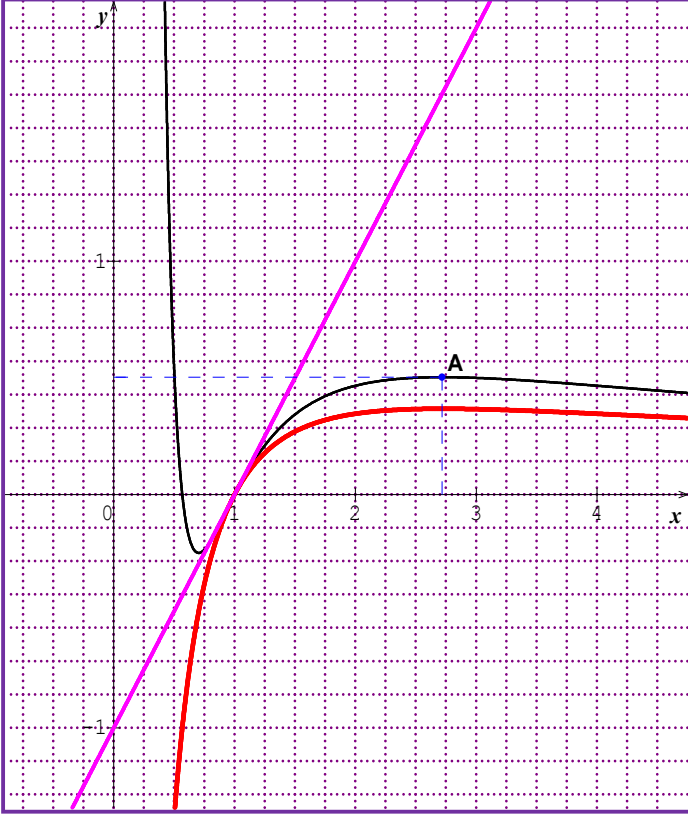
ومنه من أجل كل عدد حقيقي من $]0; +\infty[$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x} = m \text{ أي } \frac{(\ln x)^2 + x \ln x}{x^2} = \frac{x^2 m}{x^2}$$

$$\text{أي } g(x) = m$$

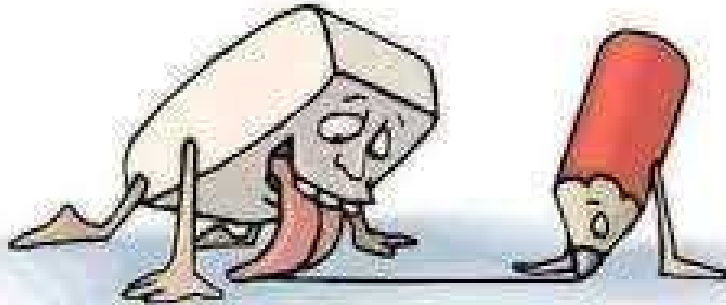
تسمح القراءة البيانية للمنحنى بـ

$$m \in \left]0; \frac{1+e}{e^2}\right] : \text{لها حلان ميجابيان إذا كان}$$



فإذا لم نستطع أن نكون فلما لكتابة السعادة في قلوب
الآخرين فكن ممحاة لطيفة تمحو بها أحرانهم لتنت
الامل والتفاؤل في نفوسهم بأن الغادم أحمل بأذن الله.

قدم الخير حتى لو لم ننال استحسانهم





على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

α عدد حقيقي غير معدوم لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي $U_0 = 1$ و $U_1 = 2$

و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = (\alpha + 1)U_{n+1} - \alpha U_n$

نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) بـ : $V_n = U_{n+1} - U_n$

(1-ا) بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول

(ب-ا) اكتب V_n بدلالة n و α

نضع من اجل كل عدد طبيعي : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

(2-ا) احسب S_n بدلالة n و α ثم بين ان : $S_n = U_n - 1$

نضع : $\alpha = 3$

(3-ا) احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n-1}^2$

(ب-ا) استنتج قيمة n حيث : $4S'_n = n + 225$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء مرقمة بـ، كلها بـ: 1 ; 1 ; 0 ; -1 و 5 كرات

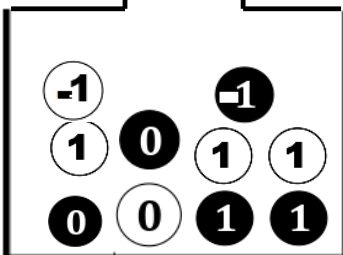
سوداء مرقمة بـ 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; -1 (لا تميز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الكيس.

(1-ا) احسب احتمال كل من الاحداث التالية :

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط "

B : " مجموع ارقام الكرات الثلاث المسحوبة معدوم "



C: "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون"

D: "الكرات الثلاث المسحوبة من اللونين الابيض والاسود"

$$(2) \text{ - بين ان } P(B) = \frac{31}{120} \text{ و } P(C \cap B) = \frac{7}{120}$$

(3) - اذا كان مجموع ارقام الكرات يساوي 0 ما هو احتمال ان تكون الكرات من نفس اللون
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع ارقام الكرات الثلاث المسحوبة

(4) - اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب امله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر العدد المركب β حيث: $2\beta = (-1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$

(1) - بين ان: $\beta^2 = -\sqrt{3} + i$ ثم اكتب β^2 على الشكل الاسي. استنتج طويلة وعمدة العدد المركب β

(2) - استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة التالية: $Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0 \dots (*)$

(3) - بين ان العدد المركب: $Z_1 = \beta^2$ هو حل للمعادلة (*) ثم استنتج الحل الثاني Z_2 لـ (*)

(4) - جد عمدة للعدد المركب $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$ ثم عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس متعامد $(O; \vec{U}; \vec{V})$. ليكن Z عددا مركبا صورته النقطة M .

(5) - عين ثم انشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $|\beta(1 - Z)| = |4Z_2|$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

نعتبر g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي

منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$



(1) - بين انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان: $f(x) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$

(ب) - احسب: $f(-x) - f(x)$ ثم اعط تفسيراً هندسياً للنتيجة

(2) - بين انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان: $f'(x) = \frac{e^{4x} + 4xe^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1)^2}$



(ب)- احسب ثم بين انه من اجل كل عدد حقيقي من المجال $[0; +\infty[$ فان: $e^{4x} - 1 \geq 0$

(3)- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها (حساب النهايات مطلوب)

(4-ا)- بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(ب)- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

(5)- ناقش حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = m$

-نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (x-1) \left(\frac{e^{2x} - e^2}{e^{2x} + e^2} \right)$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(6-ا)- تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان: $h(x) = f(x-1)$

(ب)- اشرح كيفية انشاء (C_h) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم انشئ (C_h) في نفس المعلم السابق





كل معروض القفز لشبكة علوم تجريبية



08



حل التمرين الاول: (04.5 نقاط)

لدينا α عدد حقيقي غير معدوم

لتكن (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_1 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = (\alpha + 1)U_{n+1} - \alpha U_n$

نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) بـ : $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- اثبات (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول

لدينا : $V_n = U_{n+1} - U_n$ ومنه : $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$ ومنه : $V_{n+1} = (\alpha + 1)U_{n+1} - \alpha U_n - U_{n+1}$

ومنه : $V_{n+1} = \alpha U_{n+1} + U_{n+1} - \alpha U_n - U_{n+1}$ أي : $V_{n+1} = \alpha U_{n+1} - \alpha U_n$



ومنه : $V_{n+1} = \alpha(U_{n+1} - U_n)$ أي : $V_{n+1} = \alpha V_n$ ومنه (V_n) متتالية هندسية اساسها $q = \alpha$

و حدها الاول : $V_0 = U_1 - U_0$ ومنه : $V_0 = 2 - 1 = 1$

ب- كتابة V_n بدلالة n و α

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه : $V_n = \alpha^n$

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

2- حساب S_n بدلالة n و α

لدينا : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$ ومنه : $S_n = \frac{V_0[q^n - 1]}{q - 1}$ ومنه : $S_n = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$

اثبات ان : $S_n = U_n - 1$

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $V_n = U_{n+1} - U_n$ ومنه : $V_0 = U_1 - U_0$ و $V_1 = U_2 - U_1$ وهذا الى

غاية $V_{n-1} = U_n - U_{n-1}$

وبالجمع طرفا لطرف نجد ان : $V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} = U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + \dots + U_n - U_{n-1}$



ومنه : $S_n = -U_0 + U_n$ أي : $S_n = U_n - U_0$ ومنه : $S_n = U_n - 1$

من اجل : $\alpha = 3$

3- حساب n المجموع S'_n بدلالة n حيث $S'_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n-1}^2$



مما سبق لدينا : $S_n = U_n - 1$ ومنه : $U_n = S_n + 1$ أي $U_n = \frac{1}{\alpha - 1} [\alpha^n - 1] + 1$ ومنه :

$$U_n = \frac{1}{2} [3^n - 1] + 1$$



أي : $U_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2} + 1$ ومنه : $U_n = \frac{1}{2} \times 3^n + \frac{1}{2}$ أي : $U_n = \frac{1}{2} \times (3^n + 1)$

ومنه : $S'_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n-1}^2$ معناه :



$$S'_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times (3^0 + 1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (3^1 + 1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (3^2 + 1)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (3^{n-1} + 1)^2$$

ومنه : $S'_n = \frac{1}{4} \left[(3^0)^2 + (3^1)^2 + \dots + (3^{n-1})^2 + 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1) \right]$

ومنه : $S'_n = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{8} (9^n - 1) + 3^n - 1 + n \right]$ ومنه $S'_n = \frac{1}{4} \left[\frac{9^n - 1}{9 - 1} + 2 \left(\frac{3^n - 1}{2} \right) + n \right]$



ومنه : $S'_n = \frac{1}{4} \left[\frac{9^n}{8} + 3^n - \frac{9}{8} + n \right]$ ومنه $S'_n = \frac{1}{32} [3^{2n} + 8 \times 3^n - 9 + 8n]$

(ب) - استنتاج قيمة n حيث : $4S'_n = n + 225$

لدينا : $4S'_n = n + 225$ معناه : $3^{2n} + 8 \times 3^n - 7209 = 0$

و بوضع : $t = 3^n$ نجد ان : $t^2 + 8t - 7209 = 0$

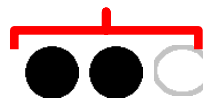
بحل المعادلة $t^2 + 8t - 7209 = 0$ نجد ان : $t = 81$ ومنه : $3^n = 81$ معناه : $n = 4$



التمرين الثاني : (05 نقاط)



لدينا الكيس به 5 كريات بيضاء مرقمة بـ : 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; -1
5 كرات سوداء مرقمة بـ : 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; -1
طريقة السحب العشوائي لـ 3 كرات في آن واحد ← توفيقات
(1) حساب احتمالات الاحداث :



- عدد طرق السحب الممكنة هو : $C_{10}^3 = 120$

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط "

عدد الحالات الملائمة : $C_5^1 \times C_5^2 = 50$ ومنه : $P(A) = \frac{50}{120}$ أي : $P(A) = \frac{5}{12}$

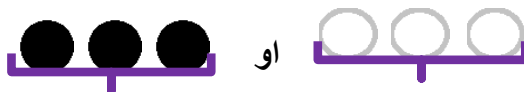


B : " مجموع ارقام الكرات الثلاث المسحوبة معدوم "

0 ; 0 ; 0 او 0 ; 1 ; -1



عدد الحالات الملائمة : $C_3^3 + C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 1 + 5 \times 3 \times 2 = 31$ ومنه $P(B) = \frac{31}{120}$



C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

عدد الحالات الملائمة : $C_5^3 + C_5^3 = 20$ ومنه : $P(C) = \frac{20}{120}$ ومنه : $P(C) = \frac{1}{6}$



(2)-اثبات ان $P(C \cap B) = \frac{7}{120}$

الحدث $(C \cap B)$ مغناه الكرات الثلاث المسحوبة مجموع ارقامها معدوم و لها نفس اللون



ومنه: عدد الحالات الملائمة $C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1 = 4 + 3 = 7$ ومنه: $P(C \cap B) = \frac{7}{120}$

(3)-اذا كان مجموع ارقام الكرات يساوي 0 ماهو احتمال ان تكون الكرات من نفس اللون
نعبر عن هذه الحادثة بالاحتمال الشرطي أي نحسب $P_B(C)$

حسب التعريف لدينا: $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$ ومنه: $P_B(C) = \frac{7}{31}$

لدينا X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع ارقام الكرات الثلاث المسحوبة

(4)-اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

قيم المتغير الحقيقي X هي: -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3

(- قانون احتمال المتغير العشوائي X)



$(X = x_i)$	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$



حساب الامل الرياضياتي: $E(X) = \frac{-6 - 11 + 35 + 60 + 30}{120}$ ومنه: $E(X) = \frac{130}{120}$ أي: $E(X) = \frac{13}{12}$



حل التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

لدينا: العدد المركب β حيث: $2\beta = (-1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$

(1)تبين ان: $\beta^2 = -\sqrt{3} + i$

لدينا $2\beta = (-1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$:معناه $4\beta^2 = [(-1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})]^2$ نربع الطرفين

ومنه: $4\beta^2 = (-1 + \sqrt{3})^2 - (1 + \sqrt{3})^2 + 2i(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$

ومنه: $4\beta^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 - 1 - 2\sqrt{3} - 3 + 2i(3 - 1)$ أي: $4\beta^2 = -4\sqrt{3} + 4i$

ومنه: $4\beta^2 = 4(-\sqrt{3} + i)$ ومنه: $\beta^2 = -\sqrt{3} + i$ 😊

كتابة β^2 على الشكل الاسي

ومنه: $\beta^2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

لدينا: $|\beta^2| = |-\sqrt{3} + i| = 2$ و $\arg(\beta^2) = \pi - \frac{\pi}{6}$ أي: $\arg(\beta^2) = \frac{5\pi}{6}$

استنتاج طوليلة و عمدة العدد المركب β

لدينا $\beta^2 = \left[2; \frac{5\pi}{6}\right]$ ومنه حسب الخواص فان $\beta = \left[\sqrt{2}; \frac{5\pi}{12}\right]$

(2)-استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$



لدينا: $2\beta = (-1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ ومنه $\beta = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} + i\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$ ومنه



$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$

لدينا في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة: (*) $Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

(3)- اثبات العدد المركب: $Z_1 = \beta^2$ هو حل للمعادلة (*)

لدينا: $Z_1 = \beta^2$ حل للمعادلة (*) معناه: $(\beta^2)^2 + 2\sqrt{3}(\beta^2) + 4 = 0$

لدينا: $(-\sqrt{3} + i)^2 + 2\sqrt{3}[-\sqrt{3} + i] + 4 = 2 - 2i\sqrt{3} - 6 + 2i\sqrt{3} + 4 = 0$ ومنه: Z_1 حل لـ (*)

استنتاج الحل الثاني Z_2 لـ (*) دون حساب المميز و باستعمال مجموع الحلين لدينا $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{3}$

ومنه $Z_2 = -2\sqrt{3} - Z_1$ أي $Z_2 = -2\sqrt{3} - \beta^2$ ومنه $Z_2 = -\sqrt{3} - i$

(4)- عمدة للعدد المركب $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$

لدينا: $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$ ومنه: $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(\beta^2) - \arg(Z_2)$



$$\frac{Z_1}{Z_2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

ومنه: $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{5\pi}{6} - (-)\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n = e^{i\frac{5n\pi}{3}}$$

لاحظ انه حسب دستور موافق

تعيين عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا

لدينا: $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقي معناه: $\sin \frac{5n\pi}{3} = 0$ أي $\frac{5n\pi}{3} = k\pi$ ومنه: $5n\pi = 3k\pi$

أي: $5n = 3k$ ومنه: $n = 3k$ مع $(k \in \mathbb{N})$

(5)- تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $|\beta(1-Z)| = |4Z_2|$

لدينا: $|\beta(1-Z)| = |4Z_2|$ معناه: $|\beta||1-Z| = 4|Z_2|$ أي $\sqrt{2}|1-Z| = 4 \times 2 = 8$ أي $|1-Z| = 4\sqrt{2}$

أي: $|1-Z| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ومنه مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة مركزها

النقطة C ذات الاحقة $Z_C = 1$ وطول نصف قطرها $R = 4\sqrt{2}$



حل التمرين الرابع: (05 نقاط)



لدينا f معرفة على $]-\infty; +\infty[$: $f(x) = x \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)$

(1)- اثبات انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان: $f(x) = x \left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \right)$



لدينا من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان $f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$ ومنه $f(x) = x \left(\frac{e^{-2x} (e^{2x} - 1)}{e^{-2x} (e^{2x} + 1)} \right)$



ومنه $f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$ أي $f(x) = x \left(\frac{e^{-2x} \times e^{2x} - e^{-2x}}{e^{-2x} \times e^{2x} + e^{-2x}} \right)$

(ب)- حساب : $f(-x) - f(x)$ واعطاء تفسيراً هندسياً للنتيجة

لدينا من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان : $f(-x) - f(x) = -x \left(\frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right) - x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$



ومنه $f(-x) - f(x) = -x \left(\frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \right) - x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$

$$f(-x) - f(x) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) - x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) = 0$$

ومنه $f(-x) - f(x) = 0$ أي $f(x) = f(-x)$ ومنه f دالة زوجية و بالتالي تمثيلها البياني (C_f) يكون متناظراً بالنسبة الى محور الترتيب

2-اثبات انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان : $f'(x) = \frac{e^{4x} + 4xe^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1)^2}$

من اجل كل عدد حقيقي من المجال $[0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) + x \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$



ومنه $f'(x) = \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} + x \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{e^{4x} + 4xe^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1)^2} \text{ ومنه } f'(x) = \frac{e^{4x} - 1 + x[4e^{2x}]}{(e^{2x} + 1)^2} \text{ ومنه } f'(x) = \frac{e^{4x} - 1 + x[2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x} + 2e^{2x}]}{(e^{2x} + 1)^2}$$

(ب)- حساب $f(0)$: $f(0) = 0$



لدينا من اجل كل عدد حقيقي من $[0; +\infty[$ فان : $x \geq 0$ ومنه : $4x \geq 0$



ومنه : $e^{4x} \geq e^0$ ومنه : $e^{4x} \geq 1$ أي : $e^{4x} - 1 \geq 0$

(3)- استنتاج اتجاه تغير الدالة f بما ان $e^{4x} - 1 \geq 0$ و $4xe^{2x} \geq 0$ فان $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$

أي : $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ و بما انها دالة زوجية فهي متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) = +\infty$$

و



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

الباك اجلوه .. الباك اجلوه



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



4-1) اثبات ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$: مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا : من اجل كل عدد حقيقي فان : $f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) - x = x \left[\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - 1 \right]$

ومنه : $f(x) - x = x \left[\frac{e^{2x} - 1 - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right] = \frac{-2x}{e^{2x} + 1}$ أي : $f(x) - x = \frac{-2x}{e^{2x} + 1}$ ومنه



لان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-2x}{e^{2x} + 1} \right] = 0$

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

لدينا : $f(x) - x = \frac{-2x}{e^{2x} + 1}$ ومنه اشارة الفرق من اشارة : $-2x$ لان : $e^{2x} + 1 > 0$



x	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$---$	
الوضعية النسبية	المنحنى (C_f) تحت المقارب (Δ) بما ان زوجية يوجد مقارب اخر (Δ') هو معادلته $y = -x$ و (C_f) تحت المقارب (Δ') على المجال $]-\infty; 0]$	

5- المناقشة حسب قيم الوسيط m لعدد m و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = m$



مناقشة دورانية

لدينا : $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = m$ ومنه : $x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) = mx$: $f(x) = mx$ ومنه

-إذا كان $m \in]0;1[$: يوجد حل موجب

-إذا كان $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: لا توجد حلول

-إذا كان $m \in]-1;0[$: يوجد حل سالب

-إذا كان $m = 0$: يوجد حل معدوم

لدينا h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (x-1) \left(\frac{e^{2x} - e^2}{e^{2x} + e^2} \right)$

6-التحقق انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان : $h(x) = f(x-1)$

لدينا :من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ فان : $f(x-1) = (x-1) \left(\frac{e^{2(x-1)} - 1}{e^{2(x-1)} + 1} \right)$ أي

ومنه : $f(x-1) = (x-1) \left(\frac{e^{2x-2} - 1}{e^{2x-2} + 1} \right)$ ومنه : $f(x-1) = (x-1) \left(\frac{e^2(e^{2x-2} - 1)}{e^2(e^{2x-2} + 1)} \right)$

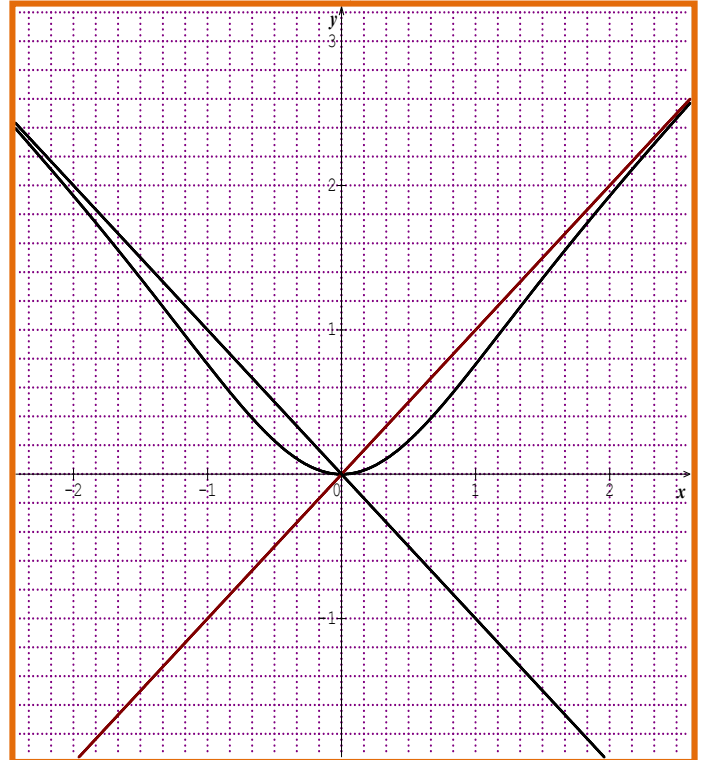
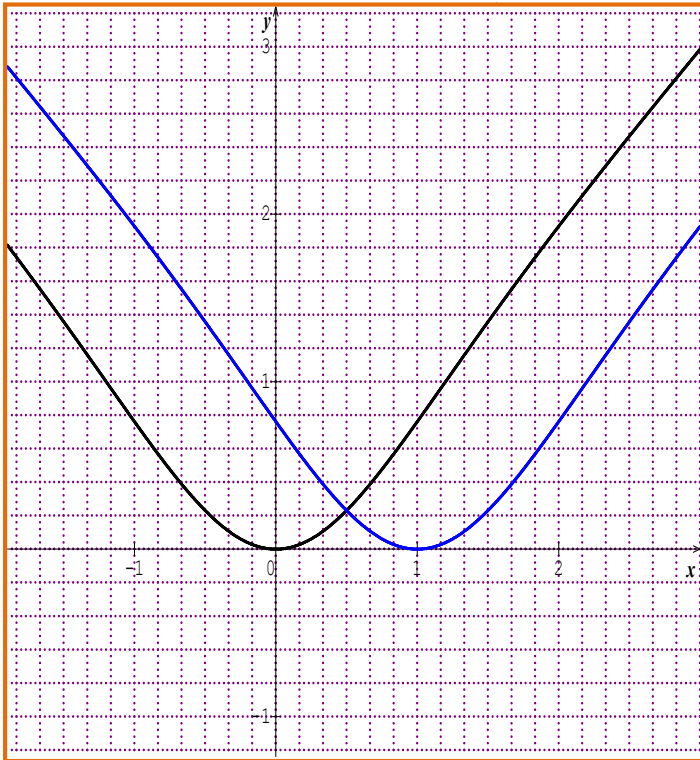
ومنه : $h(x) = f(x-1)$ ومنه : $h(x) = (x-1) \left(\frac{e^{2x} - e^2}{e^{2x} + e^2} \right)$

ب- كيفية انشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f)



$\vec{v}(1;0)$

المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه



مع خالص تمنياتنا بالتوفيق والنجاح





BAC 2020 SE -ALG- 01-062020

خاص بالسهرة الرمضانية



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



درجة الصعوبة

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2020

المدة: 03 سا و 30 د



اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

تكن (U_n) المتتالية العددية كما يلي $U_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n$

1-(-) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n فان: $U_n \geq n$

2-(-) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3-(-) المتتالية المعرفة على ب: $V_n = U_n - 4n + b$ حيث b عدد حقيقي

4-(-) عين قيمة b حتى تكون (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول

5-(-) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

نضع من اجل كل عدد طبيعي : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

3-(-) احسب S_n بدلالة n ثم بين ان: $S'_n = S_n + (n+1)(2n-8)$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء مرقمة كلها ب: 1 و 6 كرات حمراء مرقمة ب: 2 و 4 كرات خضراء مرقمة ب: 3 (لا تميز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الكيس.

1-(-) احسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط " B : " الحصول على ثلاث كرات مجموع ارقامها 6 "

2-(-) بين ان $P(A \cap B) = \frac{24}{91}$ ثم استنتج قيمة كل من $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$

-نقوم بنزع كل الكرات الحمراء والخضراء من الكيس ونستبدلها ب n كرة سوداء حيث $(n \geq 2)$

- نسحب منه على التوالي دون ارجاع كرتين ونقترح اللعبة التالية
- عند سحب كرة بيضاء يخسر اللاعب 12 نقطة و عند سحب كرة سوداء يربح اللاعب 10 نقاط
- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب او خسارته
- (3)- اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب امله الرياضيائي $E(X)$
- (4)- جد قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة
- التمرين الثالث: (04.5 نقاط)**

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z التالية (*) $Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

(1)- حل C في المعادلة (*)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس متعامد $(O; \vec{U}; \vec{V})$. لتكن النقطتان A, B صورتين العدديتين المركبتين

Z_A و Z_B حلي المعادلة (*) علماً أن: $\text{Im}(Z_A) > 0$.

(2)- أكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسّي.



(3)- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{6n+1} + \frac{Z_A}{2} = 0$

لتكن النقطتان C و w صورتين $Z_C = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $Z_w = \frac{1}{2}(Z_A + \overline{Z_A})$

(4)- أحسب: $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}\right)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(5)- استنتج أن w هي مركز ثقل المثلث ABC . هندسياً ثم حسابياً

(6)- ا- جد Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 2)(B; -1)(C; 1)\}$.

ب- عين ثم انشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - x + e^{x-2}$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

ب- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$ وليكن (C_f) تمثيلها تمثيلها البياني في

مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2- ا- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(ج)- بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; 1[$ ثم جد حصر العدد α سعتة 10^{-1}

3-ا- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ وفسر النتيجة بيانيا

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (d) ذو المعادلة: $y = x - 1$

4- بين ان النقطة ذات الفاصلة 2 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5- بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 اكتب معادلة له

6- انشئ كل من (C_f) و (d)

7- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة: $\frac{x}{e^{x-2}} = 1 + m \dots\dots\dots (*)$

نعتبر الدالة h الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = (x-1)(1 + e^{3-x})$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8-ا- جد قيمة β التي تحقق: $h(x) = f(x-1) + \beta$

ب- استنتج كيفية انشاء منحنى الدالة h باستعمال المنحنى (C_f) ثم انشئ (C_h)

انتهى الموضوع الأول



كل يوم الرضوع المقترح لشعبة علوم تجريبية



07



حل التمرين الاول: (04.5 نقاط)

لدينا (U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n$

1- البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n فان: $U_n \geq n$

مرحلة التحقق: من اجل $n = 0$ لدينا: $U_1 = 1$ و $1 \geq 1$ ومنه الخاصية محققة

مرحلة البرهنة: نفرض $U_n \geq n$ صحيحة ونبرهن صحتها من اجل $(n+1)$ أي نبرهن ان: $U_{n+1} \geq n+1$

لدينا من فرضية التراجع: $U_n \geq n$ ومنه: $\frac{1}{2}U_n \geq \frac{1}{2}n$ ومنه: $\frac{1}{2}U_n + 2n \geq \frac{1}{2}n + 2n$

أي: $\frac{1}{2}U_n + 2n \geq n + \left(\frac{1}{2}n + n\right)$ ومنه: $\frac{1}{2}U_n + 2n \geq n + \frac{3}{2}n$

لكن من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n فان: $\frac{3}{2}n \geq 1$ ومنه: $U_{n+1} \geq n+1$

ومنه مما سبق نجد انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n فان: $U_n \geq n$

(ب) - استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

لدينا: $U_n \geq n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} n$ لكن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

ومنه باستعمال مبرهنة الحصر نجد ان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$



(V_n) متتالية معرفة على بـ: $V_n = U_n - 4n + b$ مع b عدد حقيقي

2-1) تعيين قيمة b حتى تكون (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

لدينا: $V_n = U_n - 4n + b$ ومنه $V_{n+1} = U_{n+1} - 4(n+1) + b$ أي $V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n - 4n - 4 + b$

ومنه: $V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - 4 + b$ ومنه: $V_{n+1} = \frac{1}{2}[U_n - 4n - 8 + 2b]$

ومنه: (V_n) اذا فقط اذا كان: $-4n - 8 + 2b = -4n + b$ أي: $-8 + 2b = b$ ومنه: $b = 8$

ومنه (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول: $V_0 = U_0 + 8 = 10$

(ب) - كتابة V_n بدلالة n ثم استنتاج U_n بدلالة n :





لدينا : $V_n = V_0 \times q^n$ أي $V_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $V_n = \frac{5}{2^{n-1}}$ و $U_n = V_n + 4n - 8$

$$U_n = \frac{5}{2^{n-1}} + 4n - 8$$

(3) - حساب S_n بدلالة n حيث $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

لدينا : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ ومنه : $S_n = \frac{V_0[1 - q^{n+1}]}{1 - q}$ أي : $S_n = 20 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

$$S'_n = S_n + (n+1)(2n-8)$$

$$S'_n = [V_0 + 4(0) - 8] + [V_1 + 4(1) - 8] + \dots + [V_n + 4(n) - 8]$$

لدينا : $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ ومنه : $S'_n = S_n + 4 \times \frac{1}{2} n(n+1) - 8(n+1)$

$$S'_n = [V_0 + V_1 + \dots + V_n] + 4[0 + 1 + 2 + \dots + n] - 8[1 + 1 + \dots + 1]$$

$$S'_n = S_n + 2n(n+1) - 8(n+1)$$

أي : $S'_n = S_n + 4 \times \frac{1}{2} n(n+1) - 8(n+1)$

$$S'_n = S_n + (n+1)(2n-8)$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لدينا محتويات الكيس: 5 كرات بيضاء مرقمة كلها بـ 1: و 6 كرات حمراء مرقمة بـ 2 و 4 كرات خضراء مرقمة بـ 3

طريقة السحب نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الكيس. ← **توفيقات**

(1) حساب احتمال الحدثين التاليين :

$$C_{15}^3 = 455$$

عدد الحالات الممكنة للسحب:

A : "الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط"

$$C_5^1 \times C_{10}^2 = 225$$

ومنه : $P(A) = \frac{225}{455}$

$$C_5^1 \times C_6^1 \times C_4^1 + C_6^3 = 140$$

B : "الحصول على ثلاث كرات مجموع ارقامها 6" : $P(B) = \frac{140}{455}$

$$P(A \cap B) = \frac{24}{91}$$

(2) - اثبات ان :

$$C_5^1 \times C_6^1 \times C_4^1 = 120$$

لدينا: عدد الحالات الملائمة: $P(A \cap B) = \frac{120}{455}$ أي : $P(A \cap B) = \frac{24}{91}$

استنتاج قيمة كل من $P_A(B)$ و $P(B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ومنه : $P_A(B) = \frac{120}{225}$ أي : $P_A(B) = \frac{24}{45}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

لدينا : $P(A \cup B) = \frac{225 + 140 - 120}{455}$ ومنه :

$$P(A \cup B) = \frac{245}{455}$$

أي : $P(A \cup B) = \frac{49}{91}$ ومنه :



-بعد نزع كل الكرات الحمراء والخضراء من الكيس و اضافة n كرة سوداء حيث يصبح لدينا محتوى الكيس هو $(n+5)$

طريقة السحب : سحب كرتين على التوالي دون ارجاع ← ترتيبية

-عند سحب كرة بيضاء يخسر اللاعب 12 نقطة عند سحب كرة سوداء يربح اللاعب 10 نقاط

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين هو: $A_{n+5}^2 = (n+5)(n+4)$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب او خسارته

لدينا اذا سحبنا فان 24 ← اذا سحبنا فان -10

-2 ← او -24 -2 20

قيم المتغير العشوائي هي

(3)- قانون احتمال المتغير العشوائي X



$(X = x_i)$	-24	-2	20
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{-10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

+- حساب الامل الرياضي $E(X) = \frac{-480}{(n+5)(n+4)} - \frac{20n}{(n+5)(n+4)} + \frac{20n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

ومنه : $E(X) = \frac{20n^2 - 40n - 480}{(n+5)(n+4)}$

(4)- تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة :

اللعبة عادلة معناه : $E(X) = 0$ أي : $20n^2 - 40n - 480 = 0$ أي $n^2 - 2n - 24 = 0$ أي : $(n-1)^2 = 25$

ومنه : $n-1=5$ ومنه : $n=6$ ومنه اللعبة عادلة عندما نظيف الى الكيس 6 كرات سوداء

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

(1)- حل المعادلة (*) في $\mathbb{C}$: $Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0 \dots\dots\dots (*)$



حساب المميز : $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4$ أي : $\Delta = 12 - 16 = -4$ ومنه : $\Delta = (2i)^2$

للمعادلة حلان مركبان هما : $Z = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{2} = -\sqrt{3} + i$ او $Z = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{2} = -\sqrt{3} - i$



ومنه : $S = \{-\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$

النقطتان A, B صورتين العددين المركبين علما ان $\text{Im}(Z_A) > 0$ فان $Z_A = -\sqrt{3} + i$ و $Z_B = -\sqrt{3} - i$

(2)- كتابة : Z_A و Z_B على الشكل الأسّي.



$Z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$Z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

لدينا : $|Z_A| = 2$ وبما ان $\arg(Z_A) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ ومنه :

(3)-بإثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{6n+1} + \frac{Z_A}{2} = 0$

لدينا: $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{6n+1} + \frac{Z_A}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \left[e^{in5\pi} + 1 \right]$ أي $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{6n+1} + \frac{Z_A}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \left[e^{i\frac{6n5\pi}{6}} + 1 \right]$ ومنه أي

ومنه $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{6n+1} + \frac{Z_A}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}} [-1 + 1]$ لأن $e^{i5n\pi} = -1$

لتكن النقطتان C و w صورتي $Z_C = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $Z_w = \frac{1}{2}(Z_A + \overline{Z_A})$ و $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}\right) = \arg\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}i}{\frac{\sqrt{3}}{3}i}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ لدينا $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ حساب: (4)

طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC قائم في C

(5)-استنتاج أن w هي مركز ثقل المثلث ABC . هندسيا ثم حسابيا هندسيا:

بما أن المثلث ABC قائم في النقطة C و w منتصف وتره $[AB]$ فإن: w هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

حسابيا: $\|AB\| = |Z_B - Z_A| = 2$ وعليه $wA = wB = 1$ و من جهة لدينا: $\|wC\| = |Z_C - Z_w| = 1$ أي: $wA = wB = wC$

وعليه: w هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

(6)-أيجاد Z_G لاحقة النقطة G مرجح $\{(A;2)(B;-1)(C;1)\}$

لدينا: $Z_G = \frac{2Z_A - Z_B + Z_C}{2}$ ومنه:

$$Z_G = -\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{7}{4}i$$

(ب)-تعيين ثم انشاء (E) مجموعة النقاط M

من المستوي بحيث: $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

لدينا: $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MG}\|$ و $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$

ومنه: $\|\overrightarrow{MG}\| = 1$ ومنه (E) هي دائرة مركزها G و نصف قطرها 1

حل التمرين الرابع: (05 نقاط)

الجزء الاول نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - x + e^{x-2}$

(1-)-دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - x + e^{x-2}] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - x + e^{x-2}] = +\infty$$

-النهايات:



$$g'(x) = -1 + e^{x-2}$$

اتجاه التغير : الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :
 الإشارة : $g'(x) = 0$ معناه : $-1 + e^{x-2} = 0$ أي : $e^{x-2} = 1$ أي : $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	--	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(ب)- استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	+	+

من جدول التغيرات لدينا : $g(x) \geq 0$

الجزء الثاني : f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + x e^{-x+2} \right] = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}} \right] = +\infty$$



2-1- اثبات انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فان : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = x - 1 + x e^{-x+2}$

ومنه : $f'(x) = 1 + e^{-x+2} + x[-e^{-x+2}]$ أي : $f'(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$ أي $f'(x) = 1 + \frac{(1-x)}{e^{x-2}}$

ومنه : $f'(x) = \frac{e^{x-2} + 1 - x}{e^{x-2}}$ ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$

الإشارة : من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = 0$ معناه : $g(x) = 0$ أي : $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



(ج) - اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;1[$ ثم

من جدول التغيرات لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$

وبما ان: $f(0) = -1$ $f(1) = e \approx 2.78$

مما سبق وبما ان: $f(0) \times f(1) < 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا

α محصور بين 0 و 1 أي : $f(\alpha) = 0$

حصر العدد α سعته 10^{-1} لدينا نقسم المجال $]0;1[$ الى مجالين متساويين $\leftarrow$ التنصيف

لدينا $0.2 < \alpha < 0.5$

3- حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + xe^{-x+2}] = -1$

تفسير النتيجة بيانيا (C_f) : يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x - 1$ بجوار $+\infty$

(ب) - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = x - 1$

لدينا $f(x) - (x - 1) = xe^{x-2}$

$f(x) - (x - 1) = 0$ معناه: $x = 0$ ومنه (C_f) **يقطع** (d) في النقطة ذات الفاصلة 1

- اذا كان $x \in]0; +\infty[$ فان $f(x) - (x - 1) > 0$ ومنه (C_f) **فوق** (d)

اذا كان $x \in]-\infty; 0[$ فان $f(x) - (x - 1) < 0$ ومنه (C_f) **تحت** (d)



(- اثبات النقطة ذات الفاصلة 2 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

لدينا: من اجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = g(x)e^{-x+2}$ ومنه: $f''(x) = g'(x)e^{-x+2} - g(x)e^{-x+2}$

ومنه: $f''(x) = e^{-x+2} [g'(x) - g(x)]$ ومنه: $f''(x) = (2 - x)e^{-x+2}$

ومنه: $f''(x) = 0$ معناه: $2 - x = 0$ أي : $x = 2$

الاشارة



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

f'' تنعدم عند القيمة $x = 2$ مغيرة اشارتها ومنه النقطة ذات الفاصلة 2 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

(5) - بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 وكتابة معادلة له

لدينا: معامل توجيه المماس (T) هو $f'(x_0)$ ومنه سوف نبث x_0 عن التي تحقق: $f'(x_0) = 1$

لدينا: $f'(x_0) = 1$ معناه: $\frac{g(x_0)}{e^{x_0-2}} = 1$ ومنه: أي : $1 - x_0 + e^{x_0-2} = e^{x_0-2}$ ومنه: $x_0 = 1$



ومنه لايجاد معادلة لـ (T) نكتب : $(T): y = 1(x-1) + f(1)$ ومنه : $(T): y = x - 1 + e$

(7)- المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = 1 + m \dots\dots\dots (*)$

لدينا $\frac{x}{e^{x-2}} = 1 + m \dots\dots\dots (*)$ ومنه $x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}} = (x-1) + 1 + m$ أي : $f(x) = x + m$

ومنه عدد حلول المعادلة : $(*)$ هو عدد نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المتحرك (d')

المناقشة :

- اذا كان $m \in]-\infty; -1]$ يوجد حل سالب
- اذا كان $m \in]-1; e-1]$ يوجد حلان موجبان
- اذا كان $m \in]e-1; +\infty[$ لا توجد حلول

لدينا h دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $h(x) = (x-1)(1 + e^{3-x})$

قيمة β التي تحقق : $h(x) = f(x-1) + \beta$
لدينا : $h(x) = f(x-1) + \beta$ معناه

ومنه : $xe^{3-x} - e^{3-x} = -1 + \frac{x-1}{e^{x-3}} + \beta$ ومنه : $x + xe^{3-x} - 1 - e^{3-x} = x - 2 + \frac{x-1}{e^{x-3}} + \beta$

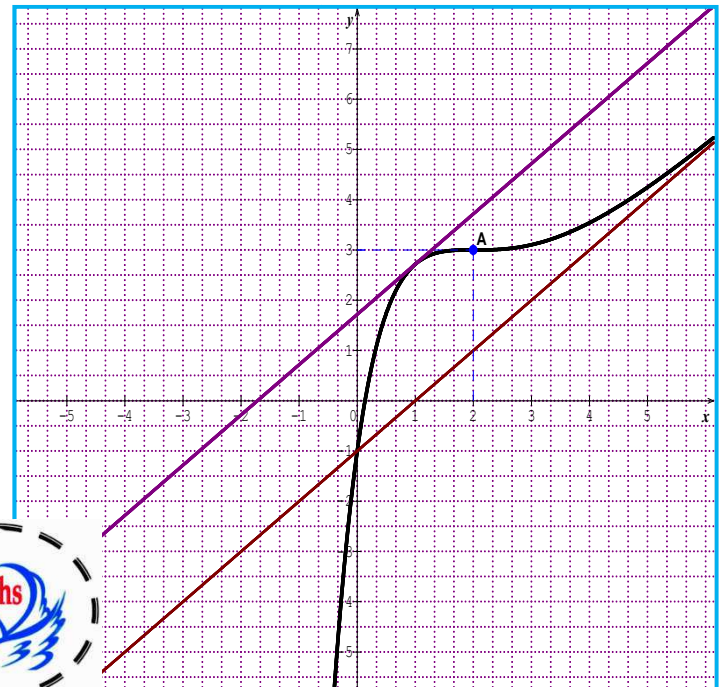
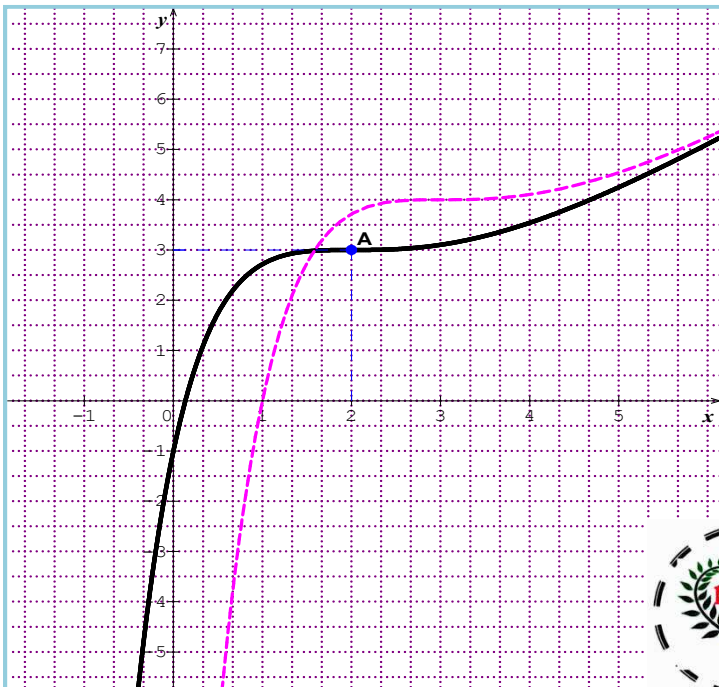
ومنه : $(\beta - 1)e^{x-3} = 0$ أي $\beta - 1 = 0$ ومنه : $\beta = 1$ وعليه : $h(x) = f(x-1) + 1$

(ب)- كيفية انشاء منحنى الدالة h باستعمال المنحنى (C_f) :

بم ان $h(x) = f(x-1) + 1$ فان (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}(1;1)$



(6)- انشاء كل من (C_f) و (T) و (d)





درجة الصعوبة



دورة: 2020

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الاول: (04.5 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0 = 1$; $U_1 = 2$ وبالعلاقة : $2U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n$

ومن اجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- احسب كل من V_0 و V_1

ب- بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q

2- اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

3- بين ان : $S_n = U_n - 1$

ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] + 1$ هل المتتالية متقاربة (U_n) علل اجابتك

التمرين الثاني: (05 نقاط)

B_1 و B_2 كيسان متماثلان الكيس B_1 يحوي على كرتين تحملان الرقمين 1 ; 2 بينما الصندوق B_2 يحوي على 4

كرات تحمل الارقام 1 ; 2 ; 3 ; 4

جميع الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللس

نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرة بطريقة عشوائية

1- ماهو احتمال سحب كرة تحمل الرقم 1

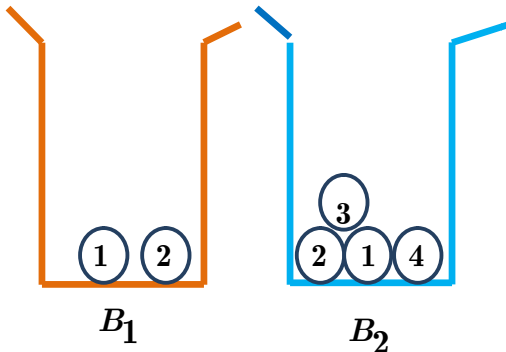
2- اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 ف ماهو احتمال ان تكون

قد سحبت من الكيس B_1

نجعل محتوي الكيسين في كيس واحد ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتين

نعتبر الحدثين التاليين : A : " الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم "

B : " الحصول على كرتين مجموع رقميهما عدد فردي "



3- احسب احتمال كل من الحادثتين A و B

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين القيمة المطلقة لفرق رقمي الكرتين المسحوبتين

4- ا) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X

ب) اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1- ا) جد العددين الحقيقيين α و β حيث: $(\alpha + i\beta)^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

ب) استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول Z التالية: $Z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{U}, \vec{V})$ نعتبر النقط: A, B و C التي لواحقها على

الترتيب $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$ $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$ $Z_C = 2$

2- ا) بين ان: $Z_B - Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} (Z_A - Z_C)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $Z = 2(-1 + e^{i\theta})$ مع $(\theta \in \mathbb{R})$

3- ا) بين ان (E) هي دائرة مركزها النقطة w ذات اللاحقة $Z_w = -2$ يطلب تحديد نصف قطرها

ب) تحقق ان النقطتين A و B تنتميان الى المجموعة (E)

ج) بين ان (C) هي صورة (E) بالدوران R الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة B الى النقطة C

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

4- ا) اعط الكتابة المركبة للتشابه S

ب) بين ان لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه المباشر S هي: $Z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

5- اكتب Z_A و Z_D على الشكل الاسي ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

1- ا) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

ب) - بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ فان: $0 < g(x) < e$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2- (أ) من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ احسب $f'(x)$ وبين ان: $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$

(ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ فان: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 e^{\frac{x}{x+1}}$ ثم جد $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

3- (أ) بين ان المعادلة $f'(x) = 0$: تقبل حلين احدهما 0 والاخر α حيث $-0.72 < \alpha < -0.71$

(ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4- (أ) بين ان: $f(\alpha) = -\alpha(\alpha+1)$ ثم اعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

5- (أ) اثبت ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y - x + e - 1 = 0$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

(ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

(ج) انشئ المنحنى (C_f) و (Δ)

m وسيط حقيقي

6- ناقش حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = |m|$

نعتبر الدالة h الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = -x + 1 + e e^{-\frac{1}{x}}$

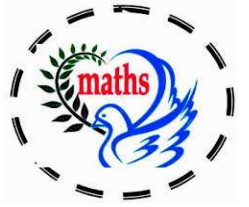
و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

7- (أ) عين قيمة β التي تحقق: $h(x) = -f(x-1) + \beta$

(ب) اشرح كيفية انشاء انطلاقا (C_h) من المنحنى (C_f)



كل ما في الرياضيات من علوم تجريبية



10



حل التمرين الاول: (05 نقاط)

(U_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = 0$ و $U_1 = 1$ من أجل كل عدد طبيعي n :

$$3U_{n+2} = 5U_{n+1} - 2U_n$$



نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = U_{n+1} - U_n$

(1) حساب U_2 و U_3 لدينا: $3U_2 = 5U_1 - 2U_0 = 5$ أي $U_2 = \frac{5}{3}$ و $3U_3 = 5U_2 - 2U_1 = \frac{19}{3}$ أي

$$U_3 = \frac{19}{9}$$

حساب v_0 و v_1 و v_2

لدينا: $v_0 = U_1 - U_0 = 1$ ومنه: $v_0 = 1$ و $v_1 = U_2 - U_1 = \frac{2}{3}$ و $v_2 = U_3 - U_2 = \frac{19}{9} - \frac{5}{3}$

$$\text{أي: } v_2 = \frac{4}{9}$$

2- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = U_{n+1} - U_n$ ومنه $v_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$

ومنه: $3v_{n+1} = 3U_{n+2} - 3U_{n+1}$ أي: $3v_{n+1} = 5U_{n+1} - 2U_n - 3U_{n+1}$

ومنه: $3v_{n+1} = 2U_{n+1} - 2U_n$ ومنه: $3v_{n+1} = 2(U_{n+1} - U_n)$ أي: $3v_{n+1} = 2v_n$ أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

ومنه أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 1$.

ب- التعبير بدلالة n عن v_n ثم U_n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

التعبير بدلالة n عن U_n لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = U_{n+1} - U_n$

ومنه: $v_0 = U_1 - U_0$ و $v_1 = U_2 - U_1$ و $v_2 = U_3 - U_2$ إلى غاية: $v_{n-1} = U_n - U_{n-1}$

ومنه بالجمع طرفا لطرف نجد ان: $U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + \dots + U_n - U_{n-1} = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ومنه: $-U_0 + U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ومنه: $U_n = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$ أي: $U_n = 3 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ ومنه: $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$



وبما ان $\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ فان $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) متتالية متزايدة تما

(3)- اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

مرحلة التحقق: من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 0$ و $0 \leq U_0 \leq 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

مرحلة البرهنة: نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$ محققة ونبرهن ان

$0 \leq U_{n+1} \leq 3$ محققة كذلك

من فرضية التراجع لدينا $0 \leq U_n \leq 3$ أي $0 \times \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} \times U_n \leq 3 \times \frac{2}{3}$ ومنه: $0 \leq \frac{2}{3} \times U_n \leq 2$

ومنه: $0 + 1 \leq 1 + \frac{2}{3} \times U_n \leq 1 + 2$ ومنه: $1 \leq 1 + \frac{2}{3} \times U_n \leq 3$ أي $1 \leq U_{n+1} \leq 3$ عليه

$0 \leq 1 \leq U_{n+1} \leq 3$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

استنتاج ان (U_n) متقاربة :

بما ان (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى فهي متتالية متقاربة

(4)- استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 3 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

(5)- كتابة S_n بدلالة n



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3$$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} : \text{ ومنه } S_n = v_0 \frac{[1 - q^n]}{1 - q} \text{ أي } S_n = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)

$$(1) \text{- ايجاد العددين المركبين } Z_1 \text{ و } Z_2 : \begin{cases} -4Z_1 + Z_2 = -8\sqrt{3} \\ 2\overline{Z_1} - 3\overline{Z_2} = 4(\sqrt{3} - 5i) \end{cases}$$

$$1 \text{ لدينا: } \begin{cases} -4Z_1 + Z_2 = -8\sqrt{3} \\ 2\overline{Z_1} - 3\overline{Z_2} = 4(\sqrt{3} - 5i) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -4\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = -8\sqrt{3} \\ 2Z_1 - 3Z_2 = 4\sqrt{3} - 20i \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} -4Z_1 + Z_2 = -8\sqrt{3} \\ 2\overline{Z_1} - 3\overline{Z_2} = 4(\sqrt{3} - 5i) \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد $-5\overline{Z_2} = -40i$ أي $\overline{Z_2} = 8i$ ومنه $Z_2 = -8i$

بالتعويض نجد ان: $-4Z_1 - 8i = -8\sqrt{3}$ أي $-4Z_1 = -8\sqrt{3} + 8i$ ومنه $Z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$

$$(2) \text{- كتابة } Z_1 \text{ و } Z_2 \text{ على الشكل الأسّي } Z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و } Z_2 = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

(3)- تعيين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $(\overline{Z_1})^n$ تخيليا صرفا

$$\text{لدينا } Z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ ومنه } Z_1^n = 4e^{-i\frac{n\pi}{6}} \text{ ومنه } (\overline{Z_1})^n \text{ تخيليا صرفا معناه } \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$$

ومنه: $\frac{n\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ أي $\frac{n}{6} = \frac{1}{2}(2k+1)$ ومنه: $n = 3(2k+1)$ أي: $n = 6k+3$ مع $k \in \mathbb{N}$



لدينا: $Z_C = -8i$ و $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$; $Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$

(4-أ) اثبات ان المثلث OBC متقايس الاضلاع ثم حساب مساحته

لدينا $AB = |Z_2 - Z_1| = |4i| = 4$ $OB = |Z_2| = 4$ $OA = |Z_1| = 4$

بما ان $OA = OB = AB$ فان المثلث OBC متقايس الاضلاع

حساب مساحة المثلث OBC

لدينا: $S = \frac{1}{2}OH \times AB$ حيث منتصف الضلع $[AB]$ ومنه: $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4$ أي: $S = 4\sqrt{3}u.a$

- ليكن R الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

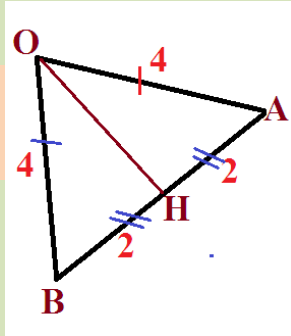
العبارة المركبة للدوران R : $Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} Z$ هي

(1-ا) ايجاد Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R

لدينا: $Z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}} Z_C$ ومنه: $Z_D = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-8i)$ ومنه: $Z_D = 4\sqrt{3} + 4i$

(ب) تعيين نسبة التحاكي الذي مركزه O ويحول النقطة B الى النقطة D

لدينا لتكن نسبة هذا التحاكي ومنه: $k = \frac{Z_D - Z_O}{Z_B - Z_O}$ ومنه: $k = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2\sqrt{3} + 2i} = \frac{2(2\sqrt{3} + 2i)}{2\sqrt{3} + 2i}$ ومنه: $k = 2$



حل التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

كيس به 3 كرات سوداء + 4 اربع كرات بيضاء + واحدة صفراء 08 كرات
طريقة السحب

طريقة السحب سحب ثلاث كرات في آن واحد

(1) حساب احتمالات الاحداث :

عدد الحالات الممكنة للسحب: $C_8^3 = 56$

الحادثة A: "سحب كرة من كل لون" $\circ \circ \bullet$

لدينا: عدد الحالات الملائمة $C_3^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 12$ ومنه: $P(A) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$

الحادثة B: "سحب ثلاث كرات من نفس اللون" $\circ \circ \circ$ $\bullet \bullet \bullet$

لدينا: $C_3^3 + C_4^3 = 1 + 4 = 5$ ومنه: $P(B) = \frac{5}{56}$

الحادثة C: "سحب لونين فقط" $\circ \bullet \circ$ $\bullet \circ \bullet$ $\circ \circ \bullet$ $\bullet \bullet \bullet$



لدينا: $C_3^2 \times C_4^1 + C_3^2 \times C_1^1 + C_3^2 \times C_4^1 + C_4^2 \times C_1^1 = 33$ ومنه: $P(C) = \frac{33}{56}$

لدينا سحب كرية سوداء يعطي ربحا قدره mDA

سحب كرية غير سوداء يعطي خسارة قدرها $100DA$

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الربح الجبري المحصل عليه .

(2) قيم المتغير العشوائي X $3m$ $2m - 100$ $m - 200$ -300

(3) اعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

$(X = x_i)$	$3m$	$2m - 100$	$m - 200$	-300
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$



حساب الامل الرياضي: $E(X) = \frac{3m}{56} + \frac{15(2m - 100)}{56} + \frac{30(m - 200)}{56} - \frac{3000}{56}$



ومنه : $E(X) = \frac{63m - 10500}{56}$

(4) عين قيمة العدد m حتى تكون اللعبة عادلة

تكون اللعبة عادلة اذا كان $E(X) = 0$ أي $63m - 10500 = 0$ ومنه : $m = 166.66$

(5) من اجل $m = 100$ احسب احتمال الحادثة $(X > 100)$

$(X = x_i)$	300	100	-100	-300
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$



من الجدول : $P(X > 100) = \frac{1}{56}$



حل التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

(1) - حساب $g'(x)$ مشتقة الدالة g

من أجل كل x من فان $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x) = 4[e^{2x} + 2xe^{2x}]$ ومنه $g'(x) = 4e^{2x}[1 + 2x]$

اشارة $g'(x) = 0$ معناه $4e^{2x}[1 + 2x] = 0$ أي $1 + 2x = 0$ ومنه $x = -\frac{1}{2}$



x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		$-$	$+$

دراسة اتجاه تغير g .

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ و متزايدة تماما على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

بما ان : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2e^{-1}$

(2) - استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$. حسب قيم x



x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		$+$

الجزء الثاني لدينا f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (2x - 1)e^{2x}$

$$1-أ) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 2xe^{2x} - e^{2x}] = -\infty : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ حساب}$$

اثبات ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2xe^{2x} - e^{2x}] = 0 \text{ ومنه: } f(x) - x = (2x - 1)e^{2x}$$

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d)

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من فان $\mathbb{R}$ فان $f(x) - y = (2x - 1)e^{2x}$

ومنه: $f(x) - y = 0$ معناه $(2x - 1)e^{2x} = 0$ أي: $2x - 1 = 0$ ومنه $x = \frac{1}{2}$ ومنه: (C_f) و (d) متقاطعان

في النقطة ذات الفاصلة: $x = \frac{1}{2}$

اذا كان: $x > \frac{1}{2}$ فان المنحنى (C_f) فوق (d) اذا كان: $x < \frac{1}{2}$ فان المنحنى (C_f) تحت (d)

2-أ) التحقق أنه من أجل كل x من فان $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

لدينا: من أجل كل x من فان $\mathbb{R}$ فان: $f'(x) = 1 + [2e^{2x} + 2(2x - 1)e^{2x}]$ ومنه

$$f'(x) = 1 + [2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x}] \text{ ومنه } f'(x) = 1 + 4xe^{2x} \text{ أي } f'(x) = g(x)$$

الاشارة اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+

تحديد اتجاه تغير الدالة f .



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (2x - 1)e^{2x} = +\infty \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ج- اثبات أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0,40 < \alpha < 0,41$.

من جدول التغيرات لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على ومنه فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,40; 0,41[$

$$\text{وبما ان: } f(0,40) \simeq f(0,41) \simeq$$

مما سبق وبما ان $f(0,40) \times f(0,41) < 0$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا

α أي المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0,40 < \alpha < 0,41$

3 أ) - معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

لدينا $(\Delta): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ و بما ان $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(0) = -1$ فان: $(\Delta): y = x - 1$



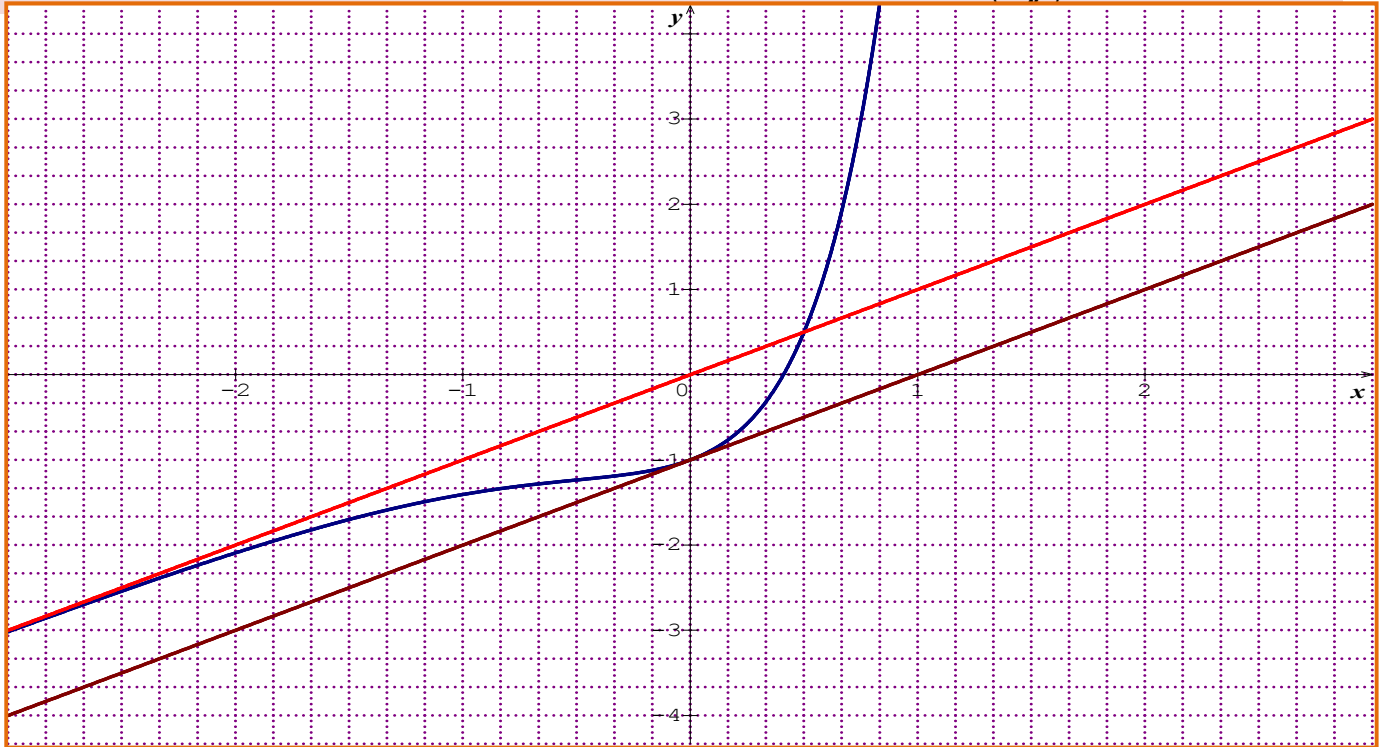
(ب)- اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثياتها
لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$
ومنه $f''(x) = 4e^{2x}[1+2x]$

لدينا $f''(x) = 0$ معناه $4e^{2x}[1+2x] = 0$ أي $1+2x = 0$ ومنه $x = -\frac{1}{2}$

الدالة المشتقة الثانية تنعدم عند القيمة مغيرة اشارتها و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w حيث

$$w\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \text{ حيث } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 2e^{-1}$$

4- انشاء المنحنى (C_f) (d) و المماس (Δ) ::



m وسيط حقيقي و h_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h_m(x) = (x-1)e^{2x} - mx$

(5)- البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $h'_m(x) = f(x) - (x+m)$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $h'_m(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} - m$

ومنه $h'_m(x) = (2x-1)e^{2x} - m$ أي $h'_m(x) = e^{2x}(1+2x-2) - m$

لكن : $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$ ومنه $f(x) - x = (2x-1)e^{2x}$ ومنه $h'_m(x) = f(x) - x - m$

أي $h'_m(x) = f(x) - (x+m)$

(6)- المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط m لعدد القيم الحدية للدالة h_m

h_m تقبل قيما حديا اذا انعدمت دالتها المشتقة عند قيمة او مجموعة قيم و غيرت اشارتها

ومنه $h'_m(x) = 0$ معناه $f(x) - (x+m) = 0$ أي $f(x) = x + m$ ومنه يؤول ايجاد عدد القيم الحية للدالة

h_m

الى المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $f(x) = x + m$



إذا كان $m < -1$ لا توجد قيم حدية

إذا كان $m = -1$ توجد قيمة حدية واحدة

إذا كان $-1 < m < 0$ توجد قيمتان حديتان

إذا كان $m > 0$ توجد قيمة حدية واحدة

2020



كَلَامُ وَلَدِنَا إِلَى اللَّهِ أَقْرَبُ
تَقَبَّلْهُ يَا أَرْحَمَ الرَّاحِمِينَ

إلى الملتقى





درجة الصعوبة

دورة: 2020

المدة: 03 سا و 30 د



خاص بالسهرة الرمضانية



الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}$

(1)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 2$

(2)- أثبت أن: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} (1 - \sqrt{U_n - 1})$ ثم استنتج أن (U_n) متزايدة.

(ب)- استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو نهاية l يطلب تعيينها.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 4 \ln(U_n - 1)$

(3)- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

(ب)- عبر بدلالة n عن v_n ثم U_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = \ln(U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)$

(4) - اكتب بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{U}; \vec{V})$

نعتبر النقط A ; B و C صور الأعداد المركبة $Z_A = -2i$; $Z_B = -\sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} + i$

(1-أ) اكتب Z_A ; Z_B و Z_C على الشكل الأسّي

(ب)- استنتج مركز ونصف قطر الدائرة (C) التي تشمل النقط A ; B و C

(2-أ) اكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي

(ب)- استنتج طبيعة المثلث ABC ثم احسب مساحته

ليكن R الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(3-أ) بين أن النقطة O' ذات اللاحقة $-\sqrt{3} - i$ صورة النقطة O بالدوران R

(ب)- تحقق أن الدائرتين (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B حيث (C') صورة (C) بالدوران R

(4-أ) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث: $|Z| = |Z + \sqrt{3} + i|$

(ب) بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى (E)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- كيس به 5 كرات حمراء تحمل الاعداد 2 ; 3 ; -2 ; 2 ; و أربع كرات خضراء تحمل الاعداد 3 ; 3 ; 3 ; -2 . وكرة زرقاء تحمل العدد 1- .
نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرتين في آن واحد .
(1)-أحسب احتمال الاحداث التالية :
A : « الحصول على كرتين من نفس اللون » .
B : « الحصول على كرتين من لونين مختلفين » .
C : « الحصول على كرتين تحملان عددين جداءهما سالباً » .
نعرف من اجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي X كمايلي :
-إذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق لها العدد نفسه .
-إذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق لها العدد الأكبر .
(2)-حدد قيم المتغير العشوائي X .
(3)-اعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضيائي $E(X)$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $] -\infty; 0[$ بـ: $f(x) = 2x - \frac{\ln(-x)}{x^2}$. ليكن (C_f) تمثيلها البياني في

مستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1)- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(2)- بين انه من اجل كل عدد حقيقي من $] -\infty; 0[$ فان : $f'(x) = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln(-x)}{x^3}$

نعرف من اجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 0[$ الدالة h كما يلي : $h(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln(-x)$

- (3)- أدرس اتجاه تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .
(ب)- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4)-بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

(ب)- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} (-x e^{4x} - 2e^{3x} + 2e^x - x)$

ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(4)- تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فان : $g(x) = \frac{1}{2} [f(-e^x) - f(-e^{-x})]$

(ب)- بين ان الدالة g فردية

(ج)- شكل جدول تغيرات الدالة g

(5)-أنشئ (C_g) .

(6)- m وسيط حقيقي ناقش حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة $2(e^x - e^{-x}) + x(e^{2x} + e^{-2x}) - m = 0$



كل مع الرضوع المقترع لشبكة علوم تجريبية



09



حل التمرين الاول

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = \frac{3}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}$

(1)- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 2$

لدينا **مرحلة التحقق**: من اجل $n = 0$ $U_0 = \frac{3}{2}$ و $1 < \frac{3}{2} < 2$ والخاصية محققة

مرحلة البرهنة: نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 2$ ونبرهن ان $1 < U_{n+1} < 2$ محققة

كذلك

لدينا من فرضية التراجع $1 < U_n < 2$ ومنه: $1 - 1 < U_n - 1 < 2 - 1$ ومنه: $0 < U_n - 1 < 1$ ومنه

$0 < \sqrt{U_n - 1} < 1$ ومنه: $1 < 1 + \sqrt{U_n - 1} < 2$ أي: $1 < U_{n+1} < 2$ ومنه الخاصية محققة من اجل $(n+1)$

ومما سبق نستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 2$

(2)- **أثبت انه**: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} (1 - \sqrt{U_n - 1})$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}$ ومنه: $U_{n+1} - U_n = 1 + \sqrt{U_n - 1} - U_n$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} + 1 - U_n$ أي: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} - (U_n - 1)$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} - (U_n - 1)$ أي: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} - \sqrt{U_n - 1} \times \sqrt{U_n - 1}$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} [1 - \sqrt{U_n - 1}]$

استنتاج ان (U_n) متزايدة.

وجدنا سابقا ان $\sqrt{U_n - 1} > 0$ ولدينا: $\sqrt{U_n - 1} < 1$ أي: $1 - \sqrt{U_n - 1} > 0$ ومنه: $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه

(U_n) متزايدة.

(ب)- استنتاج ان المتتالية (U_n) متقاربة نحو نهاية l يطلب تعيينها.

بما ان (U_n) متتالية متزايدة ومحدودة من الاعلى بـ 2 فهي متتالية متقاربة و لتكن l نهايتها

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$ ومنه: $l = 1 + \sqrt{l - 1}$

لدينا: $l - 1 = \sqrt{l - 1}$ ومنه: $(l - 1)^2 = l - 1$ ومنه: $(l - 1)(l - 2) = 0$ أي $l = 1$ مرفوض

او $l = 2$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 4 \ln(U_n - 1)$

(3)- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول v_0

لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 4 \ln(U_n - 1)$ ومنه: $v_{n+1} = 4 \ln(U_{n+1} - 1)$



لكن: $U_{n+1} - 1 = \sqrt{U_n - 1}$ وبالتعويض نجد ان: $v_{n+1} = 4 \ln(\sqrt{U_n - 1})$ أي: $v_{n+1} = 4 \ln(U_n - 1)^{\frac{1}{2}}$
ومنه: $v_{n+1} = \frac{4}{2} \ln(U_n - 1)$ أي: $v_{n+1} = 2 \ln(U_n - 1)$ ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \ln(U_n - 1)}{4 \ln(U_n - 1)} = \frac{1}{2}$ ومنه (v_n)



متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0 = 4 \ln(U_0 - 1)$ أي: $v_0 = -4 \ln 2$

(ب)- التعبير بدلالة n عن v_n ثم U_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

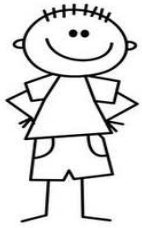
لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = -4 \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي

$$v_n = (-4 \ln 2) \times 2^{-n}$$

استنتاج U_n بدلالة n لدينا: $v_n = 4 \ln(U_n - 1)$ ومنه: $\ln(U_n - 1) = \frac{v_n}{4}$ أي: $U_n - 1 = e^{\frac{v_n}{4}}$

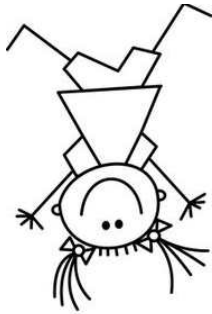
ومنه: $U_n = 1 + e^{\frac{v_n}{4}}$ وعليه: $U_n = 1 + e^{(-\ln 2) \times 2^{-n}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + e^{(-\ln 2) \times 2^{-n}}\right] = 2$

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $P_n = \ln(U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)$
(4) كتابة P_n بدلالة n



لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $P_n = \ln(U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)$
منه: $P_n = \ln(U_0 - 1) + \ln(U_1 - 1) + \ln(U_2 - 1) + \dots + \ln(U_n - 1)$
ومنه: $P_n = \ln(U_0 - 1) + \ln(U_1 - 1) + \ln(U_2 - 1) + \dots + \ln(U_n - 1)$

ومنه: $P_n = \frac{1}{4} [V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n]$ أي: $P_n = \frac{1}{4} V_0 + \frac{1}{4} V_1 + \frac{1}{4} V_2 + \dots + \frac{1}{4} V_n$



ومنه: $P_n = \frac{1}{4} \left[\frac{V_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q} \right]$ أي: $P_n = \frac{-\ln 2}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{-\ln 2}{2}$

حل التمرين الثاني **حل مختصر**

(1-أ) كتابة Z_A ; Z_B و Z_C على الشكل الأسّي

لدينا $Z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ $Z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $Z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(ب)- استنتاج مركز ونصف قطر الدائرة (C) التي تشمل

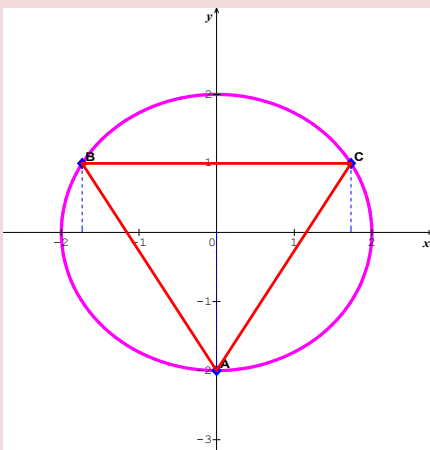
النقط A; B و C

لدينا $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = 2$ ومنه $OA = OB = OC$

ومنه النقط A; B و C

تنتمي الى الدائرة (C) التي مركزها النقطة O وطول نصف قطرها 2

(2- كتابة العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي



$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ الشكل الاسي}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ لدينا الشكل الجبري}$$

(ب)- استنتاج طبيعة المثلث ABC المثلث ABC متقايس الاضلاع
حساب مساحة المثلث ABC

يمكن التأكد بسهولة ان مساحة المثلث ABC هي $S = \frac{1}{2} AC \times BC$ أي $S = \frac{1}{2} \sqrt{12} \times 2\sqrt{3} = 6u.a$

ليكن R الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

- العبارة المركبة للدوران هي

$$R(M) = M' \text{ معناه } Z' - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} (Z - Z_A) \text{ ومنه } Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) Z - \sqrt{3} - i$$

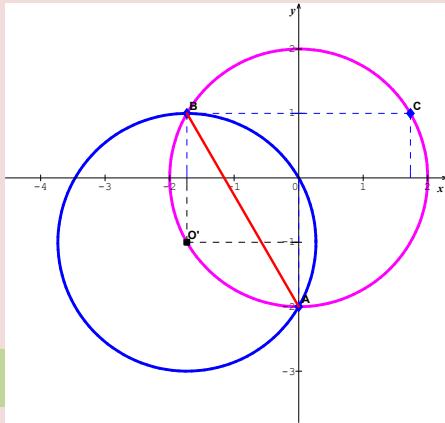


(3-1) اثبات أن النقطة O' ذات اللاحقة $-\sqrt{3} - i$ صورة النقطة O بالدوران R

$$R(O) = O' \text{ معناه } Z_{O'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) Z_O - \sqrt{3} - i \text{ أي } Z_{O'} = -\sqrt{3} - i \text{ لأن } Z_O = 0$$

(ب)- التحقق أن الدائرتين (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B

حيث (C') صورة (C) بالدوران R بسيط حاول فيه



(4-1) تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة

$$Z \text{ بحيث : } |Z| = |Z + \sqrt{3} + i|$$

$$|Z - Z_O| = |Z - (-\sqrt{3} - i)| \text{ معناه } |Z| = |Z + \sqrt{3} + i|$$

$$\text{ومنهم } |Z - Z_O| = |Z - Z_{O'}|$$

ومنهم $MO = MO'$ ومنهم (E) هي محور القطعة المستقيمة $[OO']$

(ب) اثبات ان النقطتين A و B تنتميان إلى (E)

$$OA = O'A : \text{ مما سبق لدينا } OA = 2 \text{ و } O'A = |Z_A - Z_{O'}| = |\sqrt{3} - i| = 2 \text{ أي } O'A = 2$$

يكفي اثبات ان

$$OA = O'A$$

$$OB = 2 : \text{ و } O'B = |Z_B - Z_{O'}| = |2i| = 2 \text{ أي } O'B = 2$$

بنفس الطريقة لدينا



لدينا النقط A ; B و C صور الأعداد المركبة $Z_A = -2i$; $Z_B = -\sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} + i$

حل التمرين الثالث : (05 نقاط)



لدينا محتويات الكيس ه 5 كرات حمراء تحمل الاعداد 2 ; 3 ; -2 ; 2 ; 2 ; 2 ; أربع كرات خضراء تحمل الأعداد 3 ; 3 ; 3 ; -2 ; كرة زرقاء تحمل العدد -1 .

طريقة السحب سحب كرتين في آن واحد ← توفيقات

(1) حساب احتمالات الحوادث :

(حساب احتمالات الاحداث :

- عدد طرق السحب الممكنة هو : $C_{10}^2 = 45$



A : « الحصول على كرتين من نفس اللون » .
عدد الحالات الملائمة : $C_5^2 + C_4^2 = 10 + 6 = 16$ ومنه : $P(A) = \frac{16}{45}$:

B : « الحصول على كرتين من لونين مختلفين » .



عدد الحالات الملائمة : $C_1^1 \times C_4^1 + C_1^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^1 = 29$ ومنه : $P(B) = \frac{29}{45}$ أي :

C : « الحصول على كرتين تحملان عددين جداءهما سالبا » .

عدد الحالات الملائمة : $C_3^1 \times C_7^1 = 21$ ومنه : $P(C) = \frac{21}{45}$:

نعرف من اجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي X كمايلي :
 - اذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق لها العدد نفسه .
 - اذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق لها العدد الأكبر .

نلخص النتائج في الجدول التالي

(2; -1)	(3; 3)	(2; 2)	(-2; -2)	(3; 2)	(3; -2)	(3; -1)	(2; -2)	(-2; -1)
2	3	2	-2	3	3	3	2	-1

(2) قيم المتغير العشوائي X -1 2 3

(3) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X



$(X = x_i)$	-2	-1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{30}{45}$

حساب الامل الرياضي: $E(X) = \frac{-2 - 2 + 24 + 90}{45}$ ومنه : $E(X) = \frac{110}{45}$ أي $E(X) = \frac{22}{9}$

حل التمرين الرابع : (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $] -\infty; 0[$ بـ : $f(x) = 2x - \frac{\ln(-x)}{x^2}$. ليكن (C_f) تمثيلها البياني في

مستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) حساب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x - \frac{\ln(-x)}{x^2} \right]$ لحساب النهاية نضع $-x = t$ منه $(x \rightarrow -\infty)$ فان $(t \rightarrow +\infty)$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[2x - \frac{\ln(-x)}{x^2} \right] = +\infty$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[2t + \frac{\ln(t)}{t^2} \right] = -\infty$$

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي من $] -\infty; 0[$ فان : $f'(x) = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln(-x)}{x^3}$

x من $] -\infty; 0[$ لدينا : $f'(x) = 2 - \left[\frac{x - 2x \ln(-x)}{x^4} \right]$

لدينا من اجل كل عدد حقيقي

ومنه $f'(x) = 2 - \left[\frac{1 - 2 \ln(-x)}{x^3} \right]$ أي $f'(x) = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln(-x)}{x^3}$ و هو المطلوب



نعرف من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ الدالة h كما يلي : $h(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln(-x)$

3-1) دراسة اتجاه تغير الدالة h

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ لدينا $h'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$ أي $h'(x) = \frac{2(3x^3 + 1)}{x}$
جدول تغيرات :

$$h'(x) = 0 \text{ معناه } x \approx -0.693$$

$$h(-0.693) \approx -2.39$$

x	$-\infty$	0
$h(x)$		-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$h(x)$	$-\infty$	-0.693	0
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$		-2.39	
	$-\infty$		$-\infty$

لدينا

(ب-) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	0
$h(x)$		-
x^3		-
$f'(x)$		+



x	$-\infty$	0
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4-1) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا $f(x) = 2x - \frac{\ln(-x)}{x^2} - 2x = -\frac{\ln(-x)}{x^2}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{\ln(-x)}{x^2} \right] = 0$
يمكن حساب النهاية بنفس الطريقة السابقة نضع $-x = t$ منه $(x \rightarrow -\infty)$ فان $(t \rightarrow +\infty)$

(ب-) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

ندرس اشارة الفرق : $f(x) - y$ على المجال $]-\infty; 0[$

لدينا : $f(x) - y = 0$ معناه : $-\frac{\ln(-x)}{x^2} = 0$ ومنه : $\ln(-x) = 0$ أي $-x = e^0 = 1$ أي : $x = -1$



ومنه : (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة : $x = -1$

لدينا $f(x) - y > 0$ معناه $-\ln(-x) > 0$ ومنه : $\ln(-x) < 0$ أي $x > -1$

ومنه من اجل $x \in]-1; 0[$ فان المنحنى (C_f) فوق (Δ)

لدينا : $f(x) - y < 0$ معناه $-\ln(-x) < 0$ أي $x < -1$ ومنه على المجال $]-\infty; -1[$ فان (C_f) تحت (Δ)

لدينا الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(-xe^{4x} - 2e^{3x} + 2e^x - x)$



4- ا- تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فان: $g(x) = \frac{1}{2} [f(-e^x) - f(-e^{-x})]$

لدينا: $f(-e^{-x}) = 2(-e^{-x}) - \frac{\ln(e^{-x})}{e^{-2x}} = -2e^{-x} + xe^{2x}$ و $f(-e^x) = 2(-e^x) - \frac{\ln(e^x)}{e^{2x}} = -2e^x - xe^{-2x}$



ومنه: $\frac{1}{2} [f(-e^x) - f(-e^{-x})] = \frac{1}{2} [-2e^x - xe^{-2x} + 2e^{-x} - xe^{2x}]$

ومنه: $\frac{1}{2} [f(-e^x) - f(-e^{-x})] = \frac{1}{2} e^{-2x} [-2e^{3x} - x + 2e^x - xe^{4x}]$ وهو المطلوب

ب- بين ان الدالة g فردية

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فان: $g(-x) = \frac{1}{2} [f(-e^{-x}) - f(-e^x)]$ ومن جهة ثانية

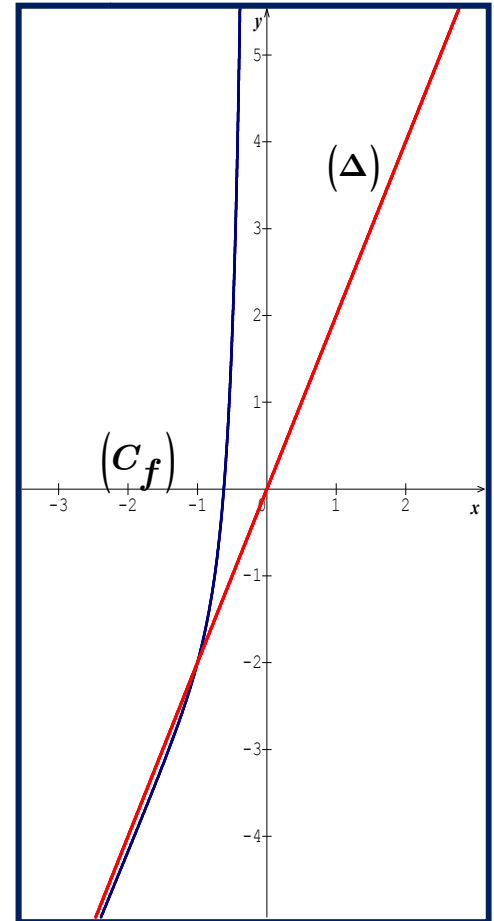
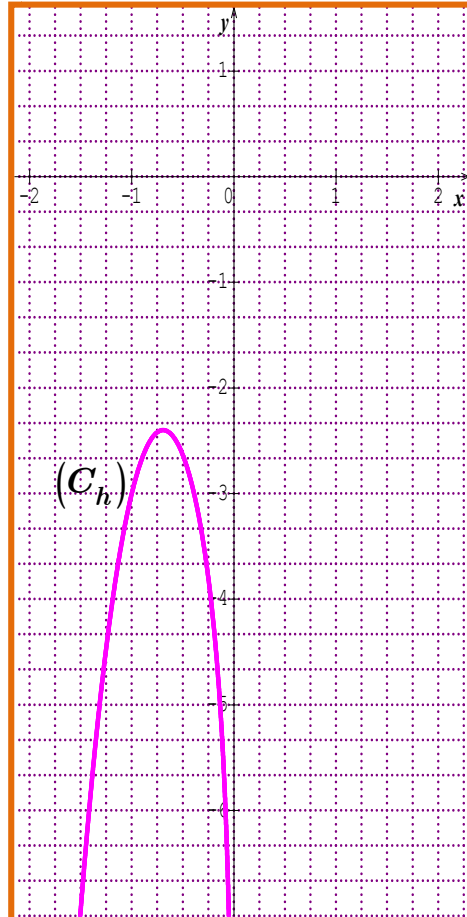
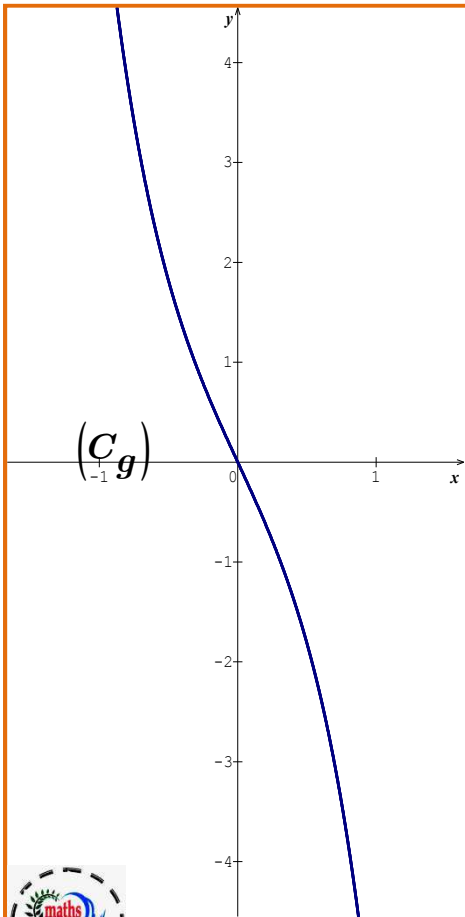
ومنه: $-g(x) = g(-x)$ ومنه: $-g(x) = \frac{1}{2} [f(-e^{-x}) - f(-e^x)]$ أي $-g(x) = \frac{1}{2} [-f(-e^x) + f(-e^{-x})]$ فردية

ج- تشكيل جدول تغيرات الدالة g :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

5- انشاء (C_g)



(6) - m وسيط حقيقي ناقش حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة $2(e^x - e^{-x}) + x(e^{2x} + e^{-2x}) - m = 0$

لدينا : $2(e^x - e^{-x}) + x(e^{2x} + e^{-2x}) - m = 0$ ومنه $2(e^x - e^{-x}) + x(e^{2x} + e^{-2x}) = m$:



ومنه : $m = 2\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) + x\left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$ أي $2\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right) + x\left(\frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}}\right) = m$:

ومنه : $2e^x(e^{2x} - 1) + x(e^{4x} + 1) = me^{2x}$ أي $-2e^{3x} + 2e^x - xe^{4x} - x = -me^{2x}$



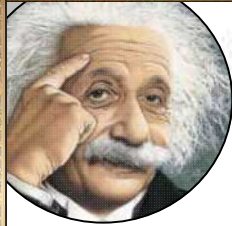
ومنه : $\frac{1}{2}e^{-2x}(-2e^{3x} + 2e^x - xe^{4x} - x) = -\frac{1}{2}m$ ومنه $g(x) = -\frac{1}{2}m$

المناقشة البيانية :

إذا كان $m > 0$ يوجد حل موجب

إذا كان $m = 0$

إذا كان $m < 0$ يوجد حل سالب



الحياة لا تُعطي دروساً
مجانية لأحد؛ فحين
أقول : "علّمتني الحياة"
تأكدوا أنني دفعت الثمن!

مع خالص تمنياتنا بالتوفيق والنجاح

