

سلسلة تمارين رقم 1 ☆ الدوال العددية ☆

المادة : رياضيات

المستوى : سنة ثالثة ثانوي الشعب العلمية

التمرين 1 :

I - و a و b عددين حقيقيين ، f دالة معرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 □ عين a و b حتى تكون $f(-1) = 0$ قيمة حدية لـ f .

II - نضع فيما يلي : $a = 1$ و $b = 2$.

- ① أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ② أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا
- ③ أثبت أنّ : $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ ، ثم ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
- ④ أثبت أنّ (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يُطلب تعيين معادلة له ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- ⑤ جد إحداثي Ω نقطة تقاطع (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي .
- ⑥ أثبت أنّ Ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- ⑦ أثبت أنّ لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل Ω .
- ⑧ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الذي يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = -3x - 1$.
- ⑨ أرسم (C_f) ، المستقيمان المقاربان و المماس (T) .

III - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ بـ :

$$g(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{|x| - 1}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

- ① أثبت أنّ : $g(x) = f(|x|)$.
- ② اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه .
- ③ ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $g(x) = m$.

التمرين 2 : (بكالوريا 2014)

I - دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.
 ① أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 ② أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها
 ③ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0.7 < \alpha < 0.8$
 ④ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ① أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ② أثبت أنّ : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$
- ② أثبت أنّ (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يُطلب تعيين معادلة له ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- ③ أثبت أنّ : $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$.
- ④ استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيرات f (نأخذ : $f(\alpha) = -0.1$)
- ⑤ أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.
- ⑥ أرسم (C_f) والمستقيم (Δ) .

III - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

- ① تحقق أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ : $h(x) = f(x) - 2$
- ② اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه .
- ③ ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $h(x) = m$.

التمرين 3:

I - a, b, c أعداد حقيقية ، f دالة معرفة على $\mathbb{R}/\{2\}$ بـ : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ وليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وجدول تغيرات f هو الآتي :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	
$f'(x)$	$+\infty$		$+\infty$	2	$-\infty$

◀ اعتماداً على جدول التغيرات :

- 1 عين قيمة كل من a, b, c .
- 2 بين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً .
- 3 قارن بين $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

II - نضع : $a = -1, b = 2, c = -1$

- 1 أثبت أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يُطلب تعيين معادلة له .
- 2 ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .
- 3 أثبت أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $f(4-x) + f(x) = 0$ و $(4-x) \in D_f$ ماذا تستنتج ؟

- 4 ليكن T_0 و T_1 مماسا (C_f) عند x_0 و x_1 من D_f حيث $x_0 \neq x_1$ جد علاقة بين x_0 و x_1 حتى يكون T_0 و T_1 متوازيان
- 5 أنشئ (C_f) ، (Δ) والمستقيم المقارب العمودي .
- 6 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

III - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}/\{2\}$ بالعلاقة :

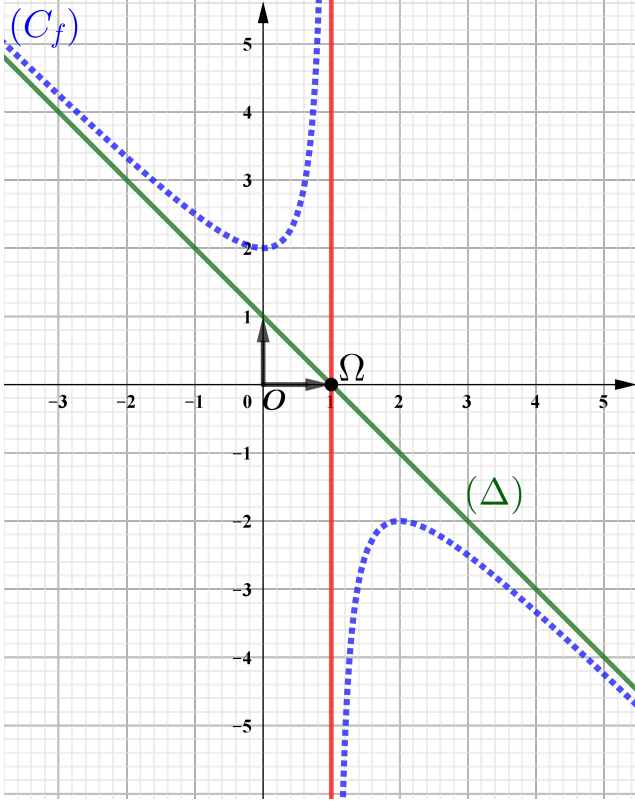
$$g(x) = -f(-x)$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

- اشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم أنشئه .

التمرين 4:

◀ a, b, c أعداد حقيقية ، f دالة معرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ بـ : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ وليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل :



■ بقراءة بيانية :

- 1 حدد نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها .
- 2 عين القيم الحدية المحلية للدالة f مع ذكر قيم x التي تبلغ عندها f هاته القيم .
- 3 شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 4 ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .
- 5 عين معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .
- 6 عين قيمة كل من a, b, c .
- 7 ماذا تمثل النقطة Ω بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟ علّل ؟

* بالتوفيق في شهادة البكالوريا *

2022