تمارين تدريبية حول النهايات مع حلولها

التمرين 01 :

عين النهاية عند $+\infty$ والنهاية عند $-\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=5x^2$ ، $f(x)=-3x^2$ ، $f(x)=7x^3$ ، $f(x)=-0{,}5x^3$ ، $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\sqrt{2}$

2) $f(x)=3x-200$ ، $f(x)=\frac{-3x^2+1}{6000}$ ، $f(x)=-\sqrt{3}x^3+\frac{3}{5}$ ، $f(x)=\frac{5}{7}x^3+\frac{8\sqrt{2}}{2}$

الجواب :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

التمرين 02 : أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+5\right)$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^2+8x-2\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-x^2-3x+2\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^3+18x^2-x\sqrt{2}+10\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(x^4-3x^3+8x^2-x-1\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\left(7x^3+2x^2-x-1\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(-5x^6+x^4-3x^2\right)$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(19x^2+5x-3\right)$

الجواب :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+5)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^2+8x-2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3-x^2-3x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3+18x^2-x\sqrt{2}+10)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x^3+8x^2-x-1)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x^3+2x^2-x-1)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^6+x^4-3x^2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(19x^2+5x-3)=-\infty$

التمرين 03 :

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(3+\frac{5}{2x-2}\right)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{-3x+2}{2+x}\right)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}\left(\frac{-7}{x+4}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-10}{x^3-x^2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{3x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{4x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x}{4x-x^2}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{16-x^4}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2x^5}{x^3+x}$

الجواب :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(3+\frac{5}{2x-2}\right)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{-3x+2}{2+x}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}\left(\frac{-7}{x+4}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1}\right)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-10}{x^3-x^2}\right)=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{4x-2}=\frac{5}{4}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x}{4x-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{16-x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2x^5}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

التمرين 04 :

في الأشكال (1)، (2)، (3)، (4)، (5) الموالية (C) هو التمثيل البياني لدالة f بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$

بالإعتماد على الشكل (1) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x), \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (3) عين النهايات التالية:

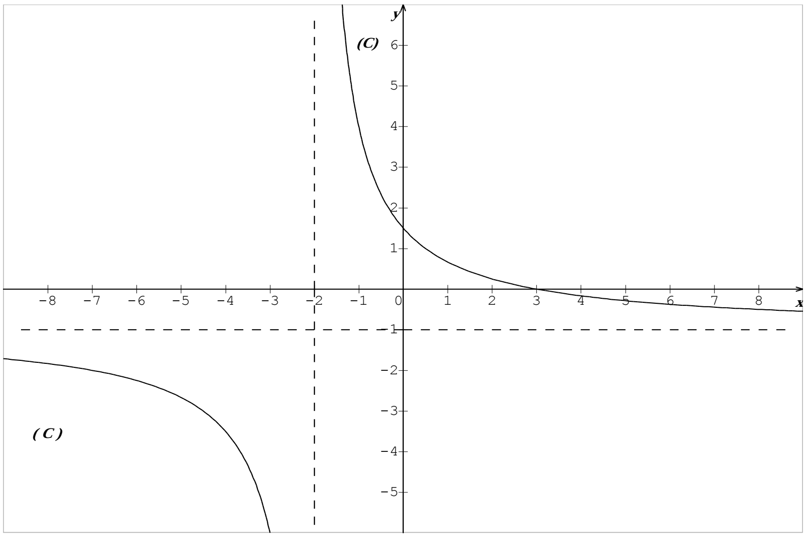
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x), \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (4) عين النهايات التالية:

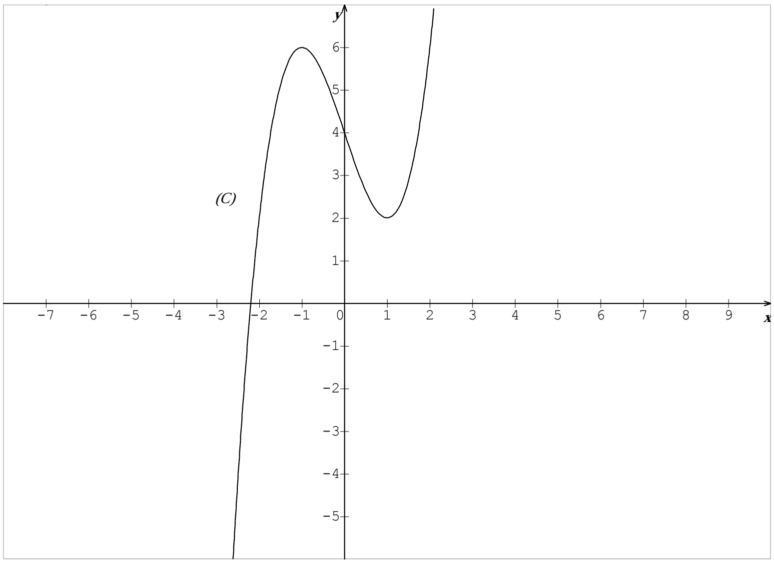
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x), \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (5) عين النهايات التالية:

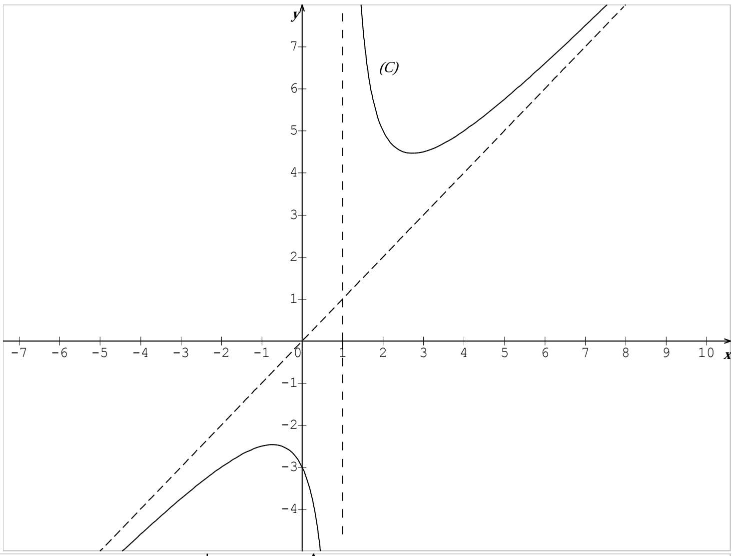
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x), \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$$



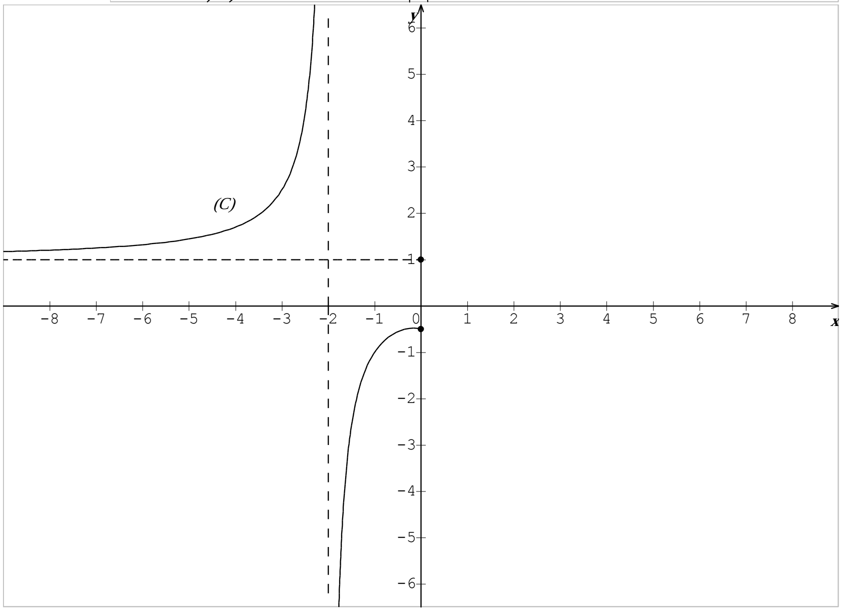
الشكل (1)



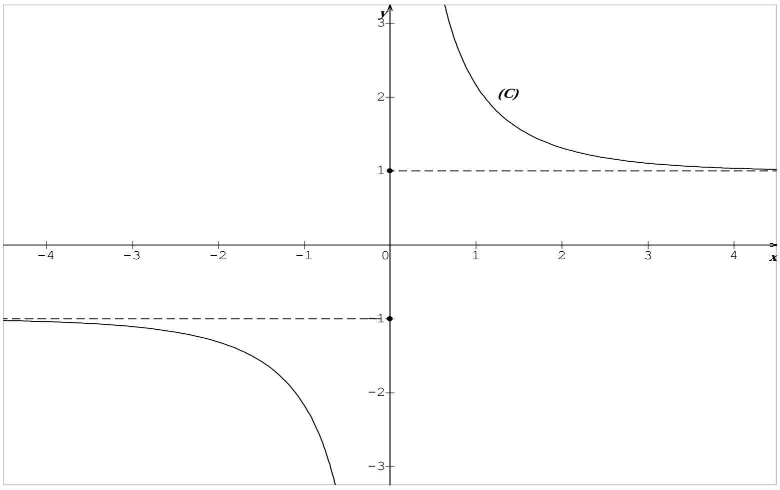
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



الشكل (5)

الجواب :

معتمدا على قراءة بيانية

بالنسبة للشكل (1) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل (2) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل (3): $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

بالنسبة للشكل (4): $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$

بالنسبة للشكل (5) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1, \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty, \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$

التمرين 05 :

المستوي منسوب إلى معلم $(0,I,J)$ و (C) المنحني الممثل لدالة f

1 أثبت أن المستقيم (d) هو مقارب شاقولي للمنحني (C) في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور:	معادلة للمستقيم (d) هي:
(1 $f(x)=\dfrac{5x+3}{2x+1}$	$x=-\dfrac{1}{2}$
(2 $f(x)=\dfrac{3x^2+8x-2}{x^2-2x+1}$	$x=1$
(3 $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-2}$	$x=-\sqrt{2}$

2 أثبت أم المستقيم (D) هو مقارب أفقي للمنحني (C) بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور:	معادلة للمستقيم (D) هي:
$f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2+5x+5}$	$y=\dfrac{1}{2}$
$f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+1}$	$y=0$
$f(x)=\dfrac{7x+8}{-3x+2}$	$y=-\dfrac{7}{3}$

3 أثبت أن المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور	$f(x)=5x+1-\dfrac{2}{x-5}$	$f(x)=-x+\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{3}{x}$
معادلة للمستقيم (Δ)	$y=5x+1$	$y=-x$	$y=\dfrac{1}{2}x+1$

الجواب :

بالنسبة للحالة 1 :

بما أن $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$ و منه المستقيم (d) حيث معادلة له $x = -\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب شاقولي للمنحني (C)

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين .

بالنسبة للحالة الثانية

$Lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, $Lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ و منه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي (D) معادلة له $y = \frac{1}{2}$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

بالنسبة للحالة الثالثة

$$f(x) = 5x + 1 - \frac{2}{x-5}$$

لدينا: $f(x) - (5x+1) = -\frac{2}{x-5}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-5) = +\infty$

منه: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{x-5} = 0$ منه: $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (5x+1)\big) = 0$ وعليه (C) المنحني الممثل للدالة f بالنسبة إلى معلم $(0, I, J)$ يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له: $y = 5x + 1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

التمرين 06 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بالدستور: $f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{x-2}$

1. عين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f ثم أثبت أنه من أجل كل عنصر x من D يكون:
$f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$

2. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$

3. أحسب $f(x)$ بدلالة x $(x \in D$ و f' الدالة المشتقة للدالة f) ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f

4. أنشيء جدول تغيرات الدالة f

5 نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(0,I,J)$

أ- أثبت أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل واحد منهما.

ب-أثبت أن نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) هي مركز تناظر للمنحني (C)

ت-أكتب معادلة للمستقيم (d) المماس للمنحني (C) في نقطته A ذات الفاصلة (-1)

ث-أنشيء بإتقان المستقيمات: (D)،(Δ)، (d) والمنحنى (C)

أنشيء المنحني (C') الممثل للدالة g المعرفة بالدستور: $g(x)=\dfrac{3x^2-11x+13}{|x-2|}$

الجواب : $f(x)=\dfrac{3x^2-11x+13}{x-2}$

1/ D هي مجموعة تعريف الدالة f

لنا x عدد حقيقي كيفي وعليه: $(x\in D)$ يكافئ $(x-2\neq 0)$ ومنه: $D=R-\{2\}$

لنثبت أن: $f(x)=3x-5+\dfrac{3}{x-2}$ من أجل x عنصرا من D

ليكن x عنصرا كيفيا من D لدينا :

$$f(x)=3x-5+\frac{3}{x-2}$$
$$=\frac{(3x-5)(x-2)+3}{x-2}$$
$$=\frac{3x^2-11x+13}{x-2}$$

ومنه: $f(x)=3x-5+\dfrac{3}{x-2}$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=+\infty$

ليكن x عنصرا كيفيا من D لدينا:

$$f'(x)=\frac{(6x-11)(x-2)-(3x^2-11x+13)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{3x^2-12x+9}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{3x^2-12x+9}{(x-2)^2}$$

دراسة إتجاه تغير الدالة f

من أجل x عنصرا كيفيا من D لنعين إشارة $f'(x)$

لما $(x\in D)$ لنا $(x-2\neq 0)$ ومنه $(x-2)^2>0$

وعليه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $3x^2-12x+9$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
إشارة $3x^2-12x+9$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

لما $x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$ لنا f دالة متزايدة تماما

لما $x\in]1,3[-\{2\}$ لنا f دالة متناقصة تماما

4/ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

5/ أ− اثبات أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين، (D) و (Δ)

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty,\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty\right)$ يعني $((C)$يقبل مستقيم مقارب عمودي (D) معادلة له: $x=2)$

$\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(3x-5)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(3x-5)=0\end{array}\right)$ يعني $((C)$يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له: $y=3x-5)$

ب− نقطة تقاطع (D) و (Δ) هي $B(2,1)$ وعليه:

$(B(2,1)$ مركز تناظر لــ $(C))$ يكافئ (من أجل كل x من D لنا $(4-x)\in D$ $f(4-x)+f(x)=2$ $)$

$(x\in D)$ يكافئ $(x\neq 2)$ يكافئ $(-x\neq -2)$ يكافئ $(4-x\neq 4-2)$

يكافئ $(4-x\neq 2)$ يكافئ $((4-x)\in D)$

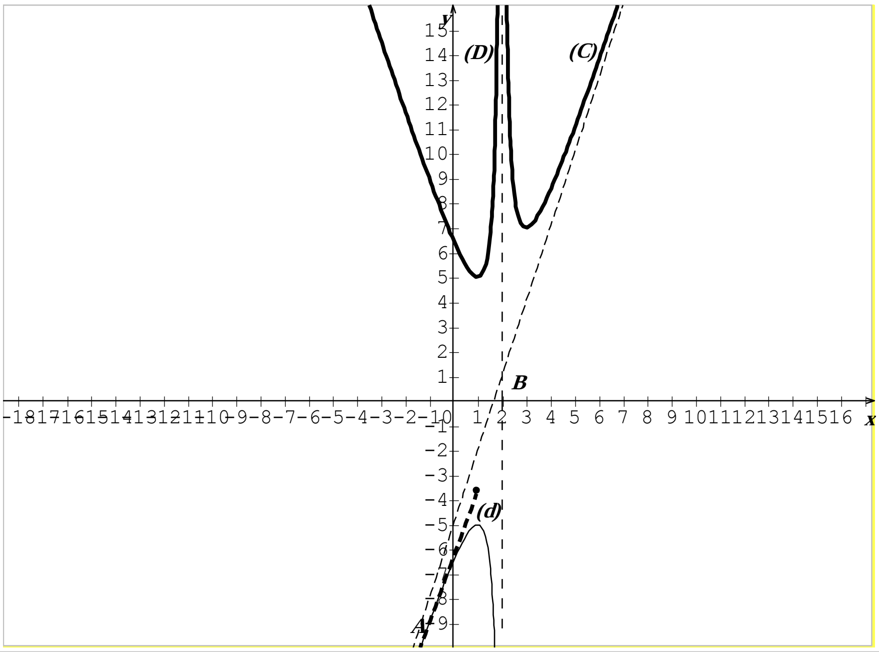
و $$f(4-x)+f(x)=3(4-x)-5+\frac{3}{4-x-2}+3x-5+\frac{3}{x-2}$$
$$=12+\frac{3}{2-x}+\frac{3}{x-2}-10$$
$$=2$$

إذا: $f(4-x)+f(x)=2$ ومنه: $B(2,1)$ مركز تناظر لـــ (C)

ت− معادلة لـــ (d) الماس لـــ(C) عند النقطة A ذات الفاصلة -1 هي:

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ مع: $f'(-1)=\frac{8}{3}$ $f(-1)=-9$

أي: $y=\frac{8}{3}(x+1)-9$ أي: $y=\frac{8}{3}x-\frac{19}{3}$



عادات مفيدة لمذاكرة فعالة

يمكنك إعداد نفسك للنجاح في دراستك.
حاول أن تطبق وتقدر العادات التالية:

- **تحمل مسئولية نفسك.**
المسئولية هي معرفة أن نجاحك في الحياة يأتي عبر إدراكك لقراراتك بخصوص أولوياتك ووقتك وقدراتك.
- **ركز نفسك حول قيم ومبادئ معينة.**
لا تدع أصدقائك ومعارفك يحددون ما هو مهم بالنسبة لك.
- **ضع أولوياتك أولاً.**
اتبع أولوياتك التي وضعتها لنفسك، ولا تدع الآخرين أو عوامل أُخرى تبعدك عن أهدافك.
- **أعتبر نفسك في حالة نجاح مستمر.**
نجاحك يأتي اجتهادك وعمل ما تستطيع في الفصل وخارجه لنفسك ولزملائك وحتى للمدرسين. إذا كنت مطمئناً لاجتهادك تصبح العلامات مؤشر خارجي فقط ولا تعبر بالضرورة عن رغبتك للدراسة.
- **أولاً تفَهم الآخرين، ثم حاول أن يفهمك الآخرون.**
إذا كانت لديك مشكلة مع المدرس، بخصوص علامة غير مرضية أو واجب منزلي، ضع نفسك مكان المدرس . ثم اسأل نفسك ما هو أفضل أسلوب لمعالجة الموضوع.
- **ابحث عن أفضل الحلول لأي مشكلة.**
إذا كنت لا تستوعب مادة معينة، لا تُعد قراءتها فقط بل جرب طرقاً أُخرى. مثلاً استشر المدرس أو مستشارك الدراسي أو زميل لك أو مجموعة زملاء يذاكرون سوية.
- **تحد نفسك وقدراتك باستمرار.**