سلسلة تمارين في الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

المستوى: 3ع ت+3ر+3ت ر

من تقديم الأستاذ : بك علي / ثانوية لقرع محمد الضيف/ الرباح ولاية الوادي

تمرين1

من أجل كل سؤال إجابة واحدة فقط من بين الإجابات المقترحة صحيحة.

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير.

يعطى العدد المركب $z=\left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)$ ، *حيث i العدد المركب الذي مربعه يساوي 1- .*

1) الشكل الجبري لـــ z^2 هو: 0 * $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$ ** $\frac{-\sqrt{3}+i}{4}$ ***

2) الشكل الأسي لـــ z^2 هو : $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ * $\frac{1}{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ** $\frac{1}{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$ ***

3) الشكل الجبري لـــ z هو:

$\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ * $\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ ** $\frac{-\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ***

4) الشكل الأسي لـــ z هو : $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ * $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ** $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}$ ***

5) العدد z^6 يساوي : $\frac{i}{8}$ * $\frac{i}{16}$ ** $\frac{i}{4}$ ***

تمرين 2

1) أ- حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2+8z\sqrt{3}+64=0$.

ب- اكتب كلا من حلي هذه المعادلة على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $a=-4\sqrt{3}-4i$ و $b=-4\sqrt{3}+4i$.

- ما طبيعة المثلث OAB ؟

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة $c=\sqrt{3}+i$ ، ولتكن D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. عيّن d لاحقة النقطة D .

4) نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(O;-1),(B;1),(D;1)\}$.

أ- بيّن أن لاحقة النقطة G هي $g=-4\sqrt{3}+6i$.

ب- علم النقط A ، B ، C ، D و G (وحدة الطول $1cm$) .

جـ- بيّن أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع .

5) أثبت أن : $\frac{c-g}{a-g}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، واستنتج طبيعة المثلث AGC .

تمرين 3

I- ليكن $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث : $P(z)=z^3+4\sqrt{3}\,z^2+24z+24\sqrt{3}$.

1) تحقق أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $P(z)=\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2\sqrt{3}\,z+12\right)$.

2) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $z^2+2\sqrt{3}\,z+12=0$.

3) استنتج الحلول في $\mathbb{C}$ للمعادلة $P(z)=0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط :

A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2\sqrt{3}$ ، $z_B=-\sqrt{3}+3i$ و $z_C=-\sqrt{3}-3i$.

1) أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

2) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

أ- أعط الكتابة المركبة للدوران R .

ب- بيّن أن صورة A بالدوران R هي B .

جـ- احسب ، على الشكل الجبري ، لاحقة النقطة D صورة B بالدوران R .

3) لتكن (Γ) الدائرة التي قطرها $[CD]$.

أ- تحقق أن النقطة O هي مركز الدائرة (Γ) .

ب- بيّن أن النقطتين A ، B تنتميان إلى (Γ) واستنتج طبيعة كل من المثلثين CAD و CBD .

تمرين4

في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نضع $L=\frac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

أ ــ يكون L عددا حقيقيا .

ب ــ يكون L عددا تخيليا صرفا .

جــ ــ تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

تمرين5

ليكن العدد المركب Z حيث : $Z=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

1) احسب طويلة العدد المركب Z و عمدة له .

2) اكتب Z على الشكل الجبري .

3) استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

4) .بيّن ان : $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

تمرين 6

z ، v و u أعداد مركبة حيث:

$z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\dfrac{z}{u}$.

1) أكتب v على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z .

3) استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

تمرين7

بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية :

1) العدد المركب : $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ طويلته 1

2) العدد المركب $\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ عمدة له $\dfrac{\pi}{3}$

3) عمدة للعدد المركب $2+3i$ معاكسة لعمدة للعدد المركب $2-3i$

4) $\dfrac{\pi}{3}-3$ عمدة للعدد المركب $\sin 3+i\cos 3$

5) $5-i$ و $\dfrac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ لهما نفس العمدة.

تمرين8

1/ أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $e^{-i2\pi}$ ، $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\dfrac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2/أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي . $z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\dfrac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

3/ أعط شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$ ؛ $z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_3=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_4=3\left(\cos\dfrac{\pi}{7}-i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$

تمرين9

نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث : $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب L حيث : $L=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

3) اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

4) استنتج قيمتي : $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{12}$

5) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد z^{n} تخيليا صرفا.

تمرين 10

z عدد مركب . A و M نقطتان من المستوي المركب لاحقتيهما $1-i$ و z على الترتيب . C هي مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $2=\left(\overline{z-1+i}\right)\left(z-1+i\right)$

1/ تحقق أن المبدأ O ينتمي إلى المجموعة C

2/ عين المجموعة C ثم أنشئها .

تمرين11

z_1 و z_2 عددان مركبان حيث : $|z_1|=|z_2|=1$

- برهن ان العدد $\left(\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\right)$ حقيقي

II) z_1 و z_2 عددان مركبان مختلفان لهما نفس الطويلة . أثبت أن العدد المركب $\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$ تخيليا صرف

تمرين 12

I) نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية:

$$z^3+2(1-i)z^2+2(1-2i)z-4i=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

1. أوجد العددين الحقيقيين α و β بحيث :

$$(z-2i)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3+2(1-i)z^2+2(1-2i)z-4i$$

2. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (*) .
3. نضع z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي يساوي 1.

- اكتب z_1 على الشكل الأسي ثم تحقق أن $\left(\dfrac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{1430}=i$

II) a ، b ، c ثلاثة أعداد مركبة حيث : $a=1$ ، $b=-1-i$ ، $c=2i$

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي صور الأعداد المركبة a ، b ، c على الترتيب في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

- أوجد عناصر التشابه المباشر الذي يحول A إلى B ويحول النقطة B إلى النقطة C

تمرين 13

I) نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية:

$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

4. أوجد العددين الحقيقيين α و β بحيث :

$$(z-8)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$$

حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) .

II)في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب الأعداد المركبة a،b،c بحيث :

$$c = 8 \quad ; \quad b = 2 + 2i\sqrt{3} \quad ; \quad a = 2 - 2i\sqrt{3}$$

أ / d عدد مركب حيث : $d = \dfrac{a-c}{b-c}$

- اكتب العدد المركب d على الشكل الجبري ثم حدد طويلته وعمدته مستنتجا نوع المثلث ABC .

ب / أوجد إحداثيي النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;|a|),(B;|b|),(C;|c|)\}$

ج / حدد المجموعة (F) مجموعة النقط من المستوي بحيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|$$

تمرين 14(بكالوريا2009)

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z-1-i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$.

2) نضع: $Z_1 = 1 + i$ ؛ $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ) أُكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب) أُكتب $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي.عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

تمرين15 (بكالوريا2009)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2-2z+4=0$

2.نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ب) A ،B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A=1-i\sqrt{3}\quad،\quad z_B=1+i\sqrt{3}\quad؛\quad z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د) أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

تمرين16

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة التالية :

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$$

نرمز لحلي هذه المعادلة بـ z_1 و z_2 حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

2- النقطتان A و B صورتا z_1 و z_2 على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ- بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع .

ب- عين زاوية الدوران R الذي مركزه المبدأ O و يحول A إلى B .

جـ - النقطة C هي صورة B بالدوران R . ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟

تمرين17

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة التالية :

$$z^2-2\sqrt{2}z+4=0 .$$

نرمز لحلي هذه المعادلة بـ z_1 و z_2 حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

2 – أ) حدد طويلة و عمدة كلا من : z_1 و z_2 .

ب) أعط الشكل الأسي للعدد المركب : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3 - في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط M_1 ، M_2 و A ذات اللواحق على الترتيب :

$\sqrt{2}(1+i)$ ، $\sqrt{2}(1-i)$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

أ) أوجد z_3 لاحقة النقطة M_3 صورة M_2 بالتحاكي H ذو المركز A و النسبة (-3) .

ب) أوجد z_4 لاحقة النقطة M_4 صورة M_2 بالدوران R ذو المركز O و الزاوية $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

ج) أحسب : عمدة $\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)$. فسر هندسيا هذه النتيجة .

د) ما طبيعة المثلث $M_1M_3M_4$?

تمرين18

المستوي منسوب إلي معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- نعتبر النقط A ، B ، C حيث : $z_B=1-i$ ، $z_A=2$ ، $z_C=1+i$.

أ -احسب $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

ب -استنتج طبيعة المثلث ABC.

- ليكن rالدوران الذي مركزه A ويحقق $r(B)=C$.

أ -اوجد زاوية الدوران r واكتب عبارته المركبة .

ب -عين لاحقة النقطة D حيث $r(C)=D$

- ليكن (S) الدائرة التي قطرها $[BC]$.

أ -اوجد(S') صورة (S) بالدوران r .

ب -لتكن Mنقطة من(S) لاحقتها zتختلف عن C، صورتها M'ذات اللاحقة z' بالدوران r .

- بين وجود عدد حقيقي θيحقق : $z=1+e^{i\theta}$
- عبر عن z' بدلالةθ.
- بين أن $\frac{z'-z_C}{z-z_C}$ حقيقي.

استنتج أن النقط : Cو Mو M' علي استقامية

تمرين19

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $p(z)=z^3+2z^2-16$.

1) احسب $p(2)$.
2) عين العددين الحقيقيين aو b حيث من اجل كل عدد مركب z : $p(z)=(z-2)\left(z^2+az+b\right)$
3) حل المعادلة $p(z)=0$.
4) اكتب الحلول علي الشكل المثلثي ثم علي الشكل الآسي.
5) في المستوي المركب نعتبر النقط $A;B;D$ ذات اللواحق $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ ، $z_D=-2+2i$.
   - عين z_Cلاحقة النقطة C بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

- بين أن $z_E=6$ لاحقة E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- **بين أن** $z_F=-4+6i$ لاحقة F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- تحقق أن $\frac{z_E-z_A}{z_F-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEF.

تمرين20

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^3+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)Z^2-2iZ+\sqrt{2}(1-i)=0$ ......(1)

1- برهن أن المعادلة (1) تقبل حلا Z_0 بحيث $|Z_0|=1$، يطلب إيجاده.

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

3- أستنتج مجموعة الأعداد الحقيقية a و θ ($a>0$ و $2\pi\geq\theta\geq 0$) بحيث :

$$a^3\cos 3\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2(\cos 2\theta-\sin 2\theta)+2a\sin\theta+\sqrt{2}=0$$

و $$a^3\sin 3\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2(\cos 2\theta+\sin 2\theta)-2a\cos\theta-\sqrt{2}=0$$

تمرين 21

Z عدد مركب ، $P(Z)$ كثير حدود بحيث: $P(Z)=Z^3+2(2-i)Z^2+(5-8i)Z-10i=0$

1- بين أن $P(Z)$ يقبل جذرا تخيليا صرفا Z_0 يطلب تعيينه

2- أوجد الأعداد الحقيقية : a و b و c بحيث : $P(Z)=(Z-Z_0)(aZ^2+bZ+c)$

3- أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(Z)=0$

ب) أ ستنتج حلول كل من المعادلتين :

$$Z^3+2(2+i)Z^2+(5+8i)Z+10i=0.....(*)$$

$$-iZ^3-2(2-i)Z^2+(8+5i)Z-10i=0.....(**)$$

تمرين 22

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(Z)=Z^3-(2-3i)Z^2+9Z-18+27i$

1- أ) أحسب $\overline{P(Z)}$ بدلالة $\overline{Z}$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$ إذا علمت أنها تقبل حلين مترافقين Z_1 و $\overline{Z_1}$

2- في المستوي المركب نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق : $Z_A=3i$ ، $Z_B=-3i$ ، $Z_C=2-3i$

أ) - عين زاوية ونسبة التشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول C إلى A

- أستنتج طبيعة المثلث ABC

- نضع : $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \ldots\ldots \circ S}_{n \text{ مرة}}$ ، حيث n عدد طبيعي $(n \geq 2)$

حدد طبيعة التحويل S^n والعناصر المميزة له .

- أكتب العبارة المركبة للتحويل S^n

- أستنتج الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S^{2010}

- أوجد لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالتحويل S^{2010}

ب) عين لاحقة النقطة H مرجح الجملة : $\{(A,1),(B,2),(C,-2)\}$

ج) عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 25$

تمرين23

1 - بين أن العدد المركب $-2-i$ حلا خاصا للمعادلة : $Z^4 + 5Z^3 + 10Z^2 + 3Z + 5 = 0 \ldots\ldots (1)$

2- بين أنه إذا كان Z حلا للمعادلة (1) فان $\overline{Z}$ حلا للمعادلة (1)

3- أستنتج كل حلول المعادلة (1).

تمرين24

α عدد مركب ، Z عدد مركب

ليكن كثير الحدود $P_\alpha(Z)$ حيث: $P_\alpha(Z) = Z^3 + \alpha Z^2 - \overline{\alpha} Z - 1$

1- بين أنه إذا كانت : A ، B ، C هي حلول المعادلة : $P_\alpha(Z) = 0$ فان: $A \times B \times C = 0$

2- أ) بين أنه إذا كان : Z حلا للمعادلة $P_\alpha(Z) = 0$ فان : $\frac{1}{\overline{Z}}$ يكون حلا للمعادلة :

$P_\alpha(Z) = 0$

ب) أستنتج أنه يوجد عدد مركب Z_0 بحيث: $|Z_0| = 1$ و $P_\alpha(Z_0) = 0$

3- في هذا السؤال نأخذ : $|\alpha| = 1$ ، وليكن β عدد مركب بحيث : $\alpha \times \beta^2 = 1$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P_\alpha(Z) = 0$ (تعطى الحلول بدلالة α و β)

4- أستنتج حلول المعادلة: $2Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 - (\sqrt{3} + i)Z - 2 = 0$

تمرين25

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها : $Z_A = 1 + \sqrt{3}i$ ، $Z_B = -1 - i$ ،

$Z_C = -(2 + \sqrt{3}) + i$

1) أ - تحقق أن : $Z_C - Z_B = i\,(Z_A - Z_B)$

ب - أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ ، ماذا تمثل النتيجتين هندسيا ؟

ج - أستنتج طبيعة المثلث: ABC

د - أستنتج تحويلا نقطيا يحول A إلى B ، محددا طبيعته وعناصره المميزة .

ه ـ إذا رمزنا للتحويل السابق بـ : R ، أستنتج طبيعة التحويل R^{2011} وعناصره المميزة .
حيث : $R^{2011}=\underbrace{R0R0.....0R}_{2011\text{ مرة}}$

2) أ ـ أكتب العدد : $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري

ب ـ أكتب كل من : Z_A و Z_B على الشكل المثلثي.

تمرين26

نعتبر العدد المركب : $Z=-(\sin\theta)\times(\cos\theta)-i\cos^2\theta$ ، حيث $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1) أ ـ أحسب بدلالة θ الطويلة وعمدة للعدد Z

ب ـ أستنتج الطويلة وعمدة للعدد Z^2

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، A و M صورتا العددين : $-i$ ، Z على الترتيب

أ ـ عين مجموعة النقط M من المستوي عندما يتغير θ في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

ب ـ برهن أن : $|z|^2+|Z+i|^2=1$ وأستنتج أن المثلث OAM قائم في M

ج ـ عين قيمة θ حتى يكون المثلث OAM متساوي الساقين .

تمرين27

) ليكن $P(Z)$ كثير الحدود ذو المتغير المركب Z بحيث :

$$P(Z)=Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63$$

أ ـ بين أن لـ $P(Z)$ جذرين تخيليين صرفين مترافقين

ب ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط :

A ، B، C ، D ذوات اللواحق : $Z_A=i\sqrt{3};z_B=-i\sqrt{3};Z_C=3+2i;Z_D=3-2i$

أ ـ مثل النقط : A ، B ، C ، D في المعلم السابق .

ب ـ أثبت أن النقط : $D;C;B;A$ تنتمي إلى نفس الدائرة محددا مركزها ونصف قطرها .

3) لتكن E نظيرة D بالنسبة للمبدأ O ، وليكن العدد المركب : $L=\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}$

أ ـ أكتب العدد المركب L على الشكل الأسي

ب ـ عين طبيعة المثلث : BEC

ج ـ ليكن R الدوران ذو المركز B و الذي يحول النقطة E إلى النقطة C

أستنتج من السابق زاوية هذا الدوران R ثم أكتب العبارة المركبة له

د ـ بين أن R^{2010} تناظر ، يطلب تحديد عناصره المميزة

ه ـ ماهي طبيعة التحويل $R^{2010}OR^{2010}$ ؟

تمرين28

نعتبر، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، كثير الحدود $P(z)=z^4+z^3+2z^2+z+1$.

1)ا- تحقق أنّ 0 ليس حلا للمعادلة $P(z)=0$.

بـ- أثبت أنّه، إذا كان z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ ، فإنّ $\frac{1}{z_0}$ يكون أيضا حلا لها .

جـ- احسب $P(i)$ و $P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

د- استنتج جميع حلول المعادلة $P(z)=0$.(تعطى كل الحلول على الشكل الجبري).

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

لتكن النقط A ، B ، C ، D التي لاحقاتها : $z_A=i$ ، $z_B=-i$ ، $z_C=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_D=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ا- بيّن أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

بـ- استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ- بطرق هندسيّة بحتة ، أثبت أنّ : $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ ؛ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين29

1) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2-6z+13=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ [الوحدة: $1cm$].

نعتبر النقط A ، B ، C التي لاحقاتها : $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ ، $z_C=4i$.

ا-علّم النقط A ، B ، C.

بـ- ماطبيعة الرباعي $OABC$؟ علل إجابتك.

جـ- عيّن لاحقة النقطة Ω: مركز الرباعي $OABC$.

3) عيّن و أنشئ (Γ): مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

4)لتكن M نقطة من المستقيم (AB) ؛ نرمزبـ β إلى ترتيب النقطة M.

نضع N صورة M بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ا- بيّن أنّ لاحقة النقطة N هي : $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

بـ- كيف نختار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC)؟

تمرين30

أ) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: (E)..... $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$.

1. برهن أن العدد المركب i حل للمعادلة (E).

2. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

3. استنتج حلول المعادلة (E)

ب) نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C ذات اللاحقات $z_A=i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=2-3i$ على الترتيب.

1. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $\frac{\pi}{4}$. عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r.

2. برهن أن النقط A'، B و C في استقامية ثم عين الكتابة المركبة للتحاكي ذو المركز B و الذي يحول النقطة C إلى A'.

تمرين31

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نأخذ كوحدة للأطوال $5cm$.

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$$

1. برر أن f تشابه مباشر يطلب تعيين مركزه Ω ذو اللاحقة ω، نسبته k و زاويته θ.

2. نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $A_{n+1}=f(A_n)$.

أ) عين لاحقات النقط A_1 ، A_2 ، A_3 ثم علم النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $u_n=\Omega A_n$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

ج) ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0,1$؟

3. أ) ما هي نوعية المثلث ΩA_0A_1؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n، نوعية المثلث ΩA_nA_{n+1}.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نرمز بالرمز l_n إلى طول الخط المنكسر $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$. و عليه:

$$l_n=A_0A_1+A_1A_2+\dots+A_{n-1}A_n.$$

عبر عن l_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} l_n$.

تمرين32

من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$، نضع: $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z=x+iy$.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم ومتعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $-1+i$، $\frac{1}{2}i$ و $-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$.

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(\bar{z})=-2$.

2− حدد $\mathrm{Re}(f(z))$ و $\mathrm{Im}(f(z))$ بدلالة x و y.

3− حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون: $f(z)$ حقيقيا.

4− حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون: $|f(z)|=2$.

5− بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في النقطة C.

تمرين33(بكالوريا2010)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

تمرين34(بكالوريا2010)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+18=0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ - بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

تمرين35

المستوي المركب منسوب إلى متعامد ومتجانس ومباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (الوحدة $4cm$).

لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_A = i$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. نسمي C صورة B بواسطة r.

أ) عين العبارة المركبة للدوران r ثم بين أن لاحقة C هي $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب) أكتب z_B و z_C على الشكل الجبري ثم علم النقط A ، B و C .

2) لتكن D مرجح النقط A ، B و C مرفقة بالمعاملات 2 ، -1 و 2 على الترتيب .

أ) بين أن لاحقة D هي $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. علم النقطة D.

ب) بين أن A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة .

3) ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 . نسمي E صورة D بواسطة h .

أوجد العبارة المركبة للتحاكي h . بين أن لاحقة E هي $z_E = \sqrt{3}$ ثم علم النقطة E.

4) أحسب العدد $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ واكتب النتيجة على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث CDE .

تمرين36

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 + z + 1 = 0$.

نسمي z_1 و z_2 حليها حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

2) لتكن النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ على الترتيب في المستوي المركب.

أ) أنشئ النقط A ، B ، C.

ب) ما طبيعة المثلث ABC . عين إحداثيات مركز ثقله .

ج) عين المعادلة الديكارتية للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

د)عين معادلة الارتفاع المار من B للمثلث ABC .

3) أكتب كل من z_1 و $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ على الشكل الأسي.

تمرين37

في المستوي المركب نعتبر العددان المركبان z_1 و z_2 حيث : $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3}+i$.

1) أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري و على الشكل المثلثي .

3) استنتج قيمة كلا من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) أحسب قيمة العدد المركب $\left(\sqrt{2}\frac{z_1}{z_2}\right)^{1440}$.

5) لتكن A و B صورتي العددين z_1 و z_2 على الترتيب .

* عين لاحقة النقطة C حتى تكون النقطة $O(0;0)$ مركز ثقل المثلث ABC .

تمرين38

1 في المستوي المركب و المنسوب للمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$،

لنعتبر كثير الحدود $P(z)$ ذات المتغير المركب حيث: $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$

أ. بين أن 3 حل للمعادلة $P(z) = 0$.

ب. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z) = 0$.

2 نعتبر النقط D, C, B, A ثلاث من المستوي لواحقها على الترتيب 3 ، $-3i$ ، $3i$، $2-\frac{5}{2}i$.

1. ما هي طبيعة المثلث ABC؟

2. عين لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

3. I و J نقطتان من المستوي حيث I نظيرة B بالنسبة إلى D و J نظيرة C بالنسبة إلى E.

- عين لاحقة لكل من I و J.

4. عين لاحقة النقطة F منتصف القطعة $[IJ]$.

5. عين طبيعة الرباعي $ODFE$.

6. ليكن العدد z حيث $z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$

أ . أحسب العدد z .

ب. أوجد عمدة للعدد z .

ج. استنتج طبيعة المثلث AIJ.

تمرين39

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (الوحدة هي $1cm$)

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+4z+16=0$.

2 - من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $P(z)=z^3-64$.

أ - أحسب $P(4)$.

ب - عين الأعداد الحقيقية a, b و c ، بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

3 - نعتبر النقاط A , B و C ، ذات اللواحق : $z_A=-2+2i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=4$ ، على الترتيب .

أ - تحقق أن : $z_A=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، ثم عين الشكل الأسي للعدد المركب z_B .

ب - علم النقاط A , B و C في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

جـ - ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

4 - لتكن النقطة D صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{6}$. نسمي z_D لاحقة النقطة D .

أ - عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_D .

ب - إستنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_D .

جـ - علم النقطة D في المعلم السابق

تمرين40

1 - عين الأعداد الحقيقية a, b و c ، بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $z^3-8=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

ثم إستنتج في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $z^3-8=0$.

2 - في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$) ، نعتبر النقاط

A ; B و C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-1-i\sqrt{3}$ ، على الترتيب .

أ - عين الشكل الأسي لـ : z_A , z_B و z_C .

ب - علم النقط A ; B و C في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

جـ - ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

3 - نعتبر الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ولتكن A' , B' و C' صور النقط A ; B و C ،على الترتيب بالدوران R .

أ - عين الشكل الأسي لـ : $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ و $z_{C'}$ ، لواحق A', B' و C' ، على الترتيب .

ب - علم النقط A', B' و C' في المعلم السابق .

جـ - تحقق أن $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ و $z_{C'}$ حلول المعادلة $z^3=8i$.

تمرين41

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$) .

1 - من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $P(z)=z^3+\left(2\sqrt{2}-4\right)z^2+8\left(1-\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}$.

أ - أحسب $P\left(-2\sqrt{2}\right)$.

ب ـ بين أنه من أجل كل عدد مركب z ، فإنه يمكن كتابة $P(z)$ ، على الشكل :

$P(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$ ، حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

جـ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2 ـ نسمي A , B و C ، النقط التي لواحقها $a=2+2i$ ، $b=2-2i$ و $c=-2\sqrt{2}$ ، على الترتيب .

أ ـ علم النقط A , B و C في المعلم $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

ـ بين أن النقط A , B و C تنتمي إلى دائرة Γ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب ـ عين عمدة لكل من العددين المركبين $a=2+2i$ ، $b=2-2i$ ، ثم إستنتج قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$.

جـ ـ عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$.

د ـ بين أن أحد أقياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ هو $\frac{3\pi}{8}$.

هـ ـ إستنتج المساواة $tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1+\sqrt{2}$.

تمرين42

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$) .

i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له .

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

2 ـ نسمي A , B ، النقطتان اللتان لاحقتاهما $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، على الترتيب .

أ ـ عين الطويلة وعمدة لكل من العددين z_A و z_B .

ب ـ أعط الشكل الأسي للعدد المركب z_A .

جـ ـ علم النقطتين A و B في المعلم $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

3 ـ نسمي R التحويل النقطي المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M والتي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

أ ـ ما طبيعة التحويل R ، عين عناصره المميزة .

ب ـ نسمي C صورة النقطة A بالتحويل R . أعط الشكل الأسي للعدد المركب z_C لاحقة النقطة C

ثم إستنتج الشكل الجبري لـ z_C .

جـ ـ علم النقطة z_C في المعلم السابق .

د ـ بين أن النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل R ، ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

تمرين43

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

نعتبر النقط A , B , C و D ، التي لواحقها $z_A=8$ ، $z_B=8i$ ، $z_C=z_A e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_D=z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، على الترتيب .

1 ـ أ ـ أكتب z_A و z_B ، على الشكل المثلثي .

ب ـ أعط الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_C و z_D ، ثم أكتب كل منهما على الشكل الجبري .

2 - بين أن النقط A , B , C و D ، تنتمي إلى دائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

3 - أرسم الدائرة (Γ) ثم علم النقط A , B , C و D .

4 - أ - نسمي z_1 ، z_2 لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ ، على الترتيب . بين أن : $z_2 = \sqrt{3}\ z_1$.

ب - نسمي z_3 ، z_4 لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، على الترتيب . أحسب $|z_3|$ ، $|z_4|$.

جـ - بين أن الرباعي $ABCD$ ، شبه منحرف متقايس الساقين .

تمرين44

المستوي (P) المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

z_1 العدد المركب : $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$

1 - نضـــع : $z_2 = i\, z_1$. تحقق أن : $z_2 = \sqrt{3} - i$

2 - أ - أحسب الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_1 ، z_2 .

- ب - علم النقطتين $M_1 ; M_2$ ، اللتان لاحقتاهما z_1 ، z_2 ، على الترتيب .

3 - نعتبر في المستوي المركب النقط A , B و C التي لواحقها z_A , z_B و z_C ، على الترتيب حيث :

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_C = 8$.

أ - بين أن : $z_A = 2\,\overline{z_1}$ و $z_B = -z_A$.

ب - علم النقط A , B و C في المستوي (P) .

جـ - بين أن المثلث ABC قائم .

د - عين لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABCD$ مستطيل .

تمرين45

في المستوي (P) المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A , B و C ذات اللواحق

$z_A = \sqrt{3} + 3i$, $z_B = 2\sqrt{3}$ ، و $z_C = 2i$ ، على الترتيب .

1 - علم النقط A , B , C في المستوي (P) .

2 - عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A .

3 - أ - أحسب الطويلة لكل من الأعداد المركبة التالية : $z_A - z_C$, $z_B - z_A$, $z_B - z_C$.

ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

- ب - عين لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ، عين نصف قطرها .

- جـ - تحقق أن المبدأ O ينتمي إلى الدائرة (Γ) .

4 - لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- أ - تحقق أن : $z_D = \sqrt{3} - i$.

- ب - أحسب لاحقة النقطة M منتصف قطعة المستقيم $[AD]$.

- جـ - برهن أن الرباعي $ABCD$ مستطيل .

تمرين46

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$.

2 - أ - عين العددين الحقيقيين a , b بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $z^3-9z^2+31z-39=(z-3)(z^2+bz+c)$.

ب - إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $z^3-9z^2+31z-39=0$.

3 - المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ (الوحدة $2cm$) .

نعتبر النقاط A , B , E و F التي لواحقها : $z_A=3+2i$ ، $z_B=3-2i$ ، $z_E=\frac{5}{4}+i\frac{\sqrt{15}}{4}$ ، $z_F=3$ ، على الترتيب .

أ - علم النقط A , B , E و F في المعلم $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

ب - أحسب المسافات : FA , FB و FE ، ثم إستنتج أن النقاط A , B و E تنتمي إلى دائرة (Γ) مركزها F.

جـ - ماهي طبيعة المثلث ABE ؟

تمرين47

نضـــع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-8z^2+24z-32$

1 - أ - تحقق أن : $P(4)=0$.

ب - عين العددين الحقيقيين a , b بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-4)(z^2+bz+c)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

2 - المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

نعتبر النقاط A , B و C التي لواحقها : $z_A=2+2i$ ، $z_B=4$ ، $z_C=2-2i$ ، على الترتيب .

أ - علم النقط A , B و C في المعلم $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

ب - تحقق أن : $OA=OC=AB=CB$ ، ثم إستنتج طبيعة الرباعي $OABC$.

3 - أ - عين مركز وزاوية الدوران R الذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى C .

ب - تحقق أن O هي صورة C بالدوران R .

جـ - لتكن H مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$ ، عين $z_{H'}$ لاحقة النقطة H' صورة H بالدوران R .

تمرين48

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ ، (الوحدة هي $2cm$) .

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

- نصع : $a=\sqrt{3}+i$ ، $b=\sqrt{3}-i$.

أكتب a , b على الشكل الأسي ، ثم علم النقطتين A و B ذات اللاحقتين a و b ، على الترتيب .

2 - ليكن r الدوران الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ - أحسب a' لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران r .

- أكتب a' على الشكل الجبري ثم علم النقطة A' في المعلم السابق .

ب - ليكن h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

تمرين49

أحسب b' لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتحاكي h ثم علم النقطة B' في المعلم السابق .

3 ـ لتكن Γ الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ وليكـــن q نصف قطر ها .

نرمز بـ c إلى لاحقة النقطة C .

أ ـ أثبت صحة المساويات التالية : $\boxed{1}$ $c\overline{c}=q^2$

$\boxed{2}$ $(c-2i)\left(\overline{c}+2i\right)=q^2$

$\boxed{3}$ $\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=q^2$

ب ـ إستنتج أن : $c-\overline{c}=2i$ و $c+\overline{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

جـ ـ إستنتج لاحقة النقطة C وقيمة q .

تمرين50

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z، التالية :

$$z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2}=0$$

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين ذات المجهول المركب z، التاليتين :

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{2} \quad ، \quad z+\frac{1}{z}=1$$

3 ـ نعتبـــــر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود للمتغير المركب z التالي :

$$P(z)=z^4-\left(1-\sqrt{2}\right)z^3+\left(2+\sqrt{2}\right)z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+1$$

ـ تحقق أنه من أجل كل عدد مركب غير معدوم z ، فإن :

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$$

ـ أستنتج حلول المعادلة $P(z)=0$.

نصيحة حكيم لأبنه:

لا تتشكى ولا تتذمر .. أريدك متفائلاً .. مقبلاً على الحياة..

أهرب من اليائسين والمتشائمين ! وإياك أن تجلس مع رجل يتطير!!