Calcul Intégral حســاب التكــامـــل

الدوال الأصلية (تذكير)

- كل دالة f متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I.
- الدالة F هي الدالة الأصلية للدالة f على I تعني أن F قابلة للإشتقاق على I ولكل x من I، $F'(x)=f(x)$.
- لتكن F دالة أصلية للدالة f على I. الدالة الأصلية للدالة f على I والتي تنعدم في a، $(a\in I)$ هي الدالة G حيث $\forall x\in I \quad ; \quad G(x)=F(x)-F(a)$
- إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على مجال I، فإنه يوجد عدد حقيقي c بحيث $\forall x\in I\,,\ F(x)-G(x)=c$
- مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي مجموعة الدوال التي تكون على شكل $x\mapsto F(x)+k\,/\,k\in\mathbb{R}$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I.

جدول الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية :

ملاحظات	F	f	ملاحظات	F	f
				a	$\mathbf{0}$
				$ax+b$	a
$x\succ 0$	$\ln x+c$	$\frac{1}{x}$		$\frac{1}{2}x^2$	x
$u(x)\neq 0$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$n\neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	x^n
			$r\neq -1$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$	x^r
	e^x+c	e^x		$\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}+c$	$\sqrt{x}$
	$e^{u(x)}+c$	$u'(x)e^{u(x)}$		$\sin x$	$\cos x$
				$-\cos x$	$\sin x$
$a\neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}+c$	e^{ax}		tgx	$1+tg^2x$
			$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{1}{a}\cos(x+b)$	$\sin(ax+b)$
			$a\neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1) تعريف :
لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I
العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على المجال I يسمى تكامل الدالة f من a إلى b
ويكتب $\int_a^b f(x)dx$
ويقرأ تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$

ملاحظة :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$
$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

أمثلة :
$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \quad , \quad \int_0^2 x^2dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta$$

2) خاصيات

خاصية -1-
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

تطبيـق
$$\int_0^2 |x-1|dx$$

خاصية -2- لتكن f دالة متصلة على I و a عنصر من I.
الدالة الأصلية للدالة f على I والتي تنعدم في a هي $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

خاصية -3- لتكن f و g دالتين متصلتين على قطعة $[a,b]$ و λ عدد حقيقي.
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_b^a f(x)dx + \int_b^a g(x)dx$

تطبيقـات : أحسب التكاملات التالية :
$$I_1 = \int_1^3 (3x^2+2x)dx \qquad I_2 = \int_0^4 (x^2+x-1)dx$$
$$I_3 = \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx \qquad I_4 = \int_0^{-1} \frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$I_5 = \int_2^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}}dx$$
$$I_7 = \int_2^5 \frac{1}{x}dx \qquad I_8 = \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx$$
$$I_9 = \int_1^3 \frac{4}{1-5x}dx \qquad I_{10} = \int_2^1 (e^{2t}+2e^t-3)dt$$

$$I_{11} = \int_2^1 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - 3 \right) dt \qquad I_{12} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 \left| x^2 - 3x + 2 \right| dx$$

3) التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$

مثـــال (1) دالة ثابتـــة

مثـــال (2) دالة تآلفيـة

خاصية: لتكن f دالة متصلة وموجبة على المجال $[a,b]$

العدد $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز Δ المحصور بين المنحنى (ℓ) ومحور الأفاصيل والمستقيمان $(x=a)$ و $(x=b)$.

تطبيـق: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\qquad a = 1$ و $b = e$

4) تقنيات حساب التكامل

المكاملة بالأجزاء **Intégration par Parties**

تمهيد : لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال $I = [a,b]$

لدينا $\quad (f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \qquad \forall x \in I$

إذن $\quad f'(x).g(x) = (f.g)'(x) - f(x).g'(x)$

إذن $\quad \int_a^b f'(x).g(x)dx = \int_a^b (f.g)'(x)dx - \int_a^b f(x).g'(x)dx$

إذن $\quad \int_a^b f'(x).g(x)dx = \left[f.g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$

خاصية : لتكن f و g قابلتين للإشتقاق و f' و g' متصلتين على $[a,b]$.

$$\int_a^b f'(x).g(x)dx = \left[f(x).g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

تطبيقات : أحسب التكاملات التالية :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2 + x + 1 \right) \cos \frac{x}{2} dx \qquad I_4 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \qquad I_6 = \int_1^e \ln x dx$$

تمارين تطبيقية

أنظر السلسلة.

5) التكامل والترتيب

تمهيد : لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a,b]$ و F دالة أصلية للدالة f على $I=[a,b]$.

لدينا $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

إذا كانت f موجبة على المجال I

فإن F دالة تزايدية على $[a,b]$.

ومنه $F(b)\succ F(a)$ علما أن $b\succ a$

خاصية : لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

إذا كانت $f\geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

• لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a,b]$ $a\leq b$

بحيث $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$

لدينا $0\leq g-f$ إذن $\int_a^b (g-f)(x)\,dx\geq 0$

ومنه $\int_a^b g(x)\,dx\geq\int_a^b f(x)\,dx$

خاصية : لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a,b]$

إذا كان لكل x من $[a,b]$: $f(x)\leq g(x)$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

استنتاج : إذا كانت $f\leq 0$ و $a\leq b$

فإن $\int_a^b f(x)dx\leq 0$

خاصية : $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$

* القيمة المتوسطة لدالة متصلة على قطعة.

لتكن M القيمة القصوية للدالة f على المجال $I=[a,b]$

و m القيمة القصوية للدالة f على المجال $I=[a,b]$

لدينا لكل x من I : $m\leq f(x)\leq m$

إذن $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq m(b-a)$

إذن $m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M$

* **تعريف : العدد الحقيقي** $u=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ **يسمى القيمة المتوسطة للدالة** f **على المجال** $[a,b]$.

ملاحظة : يوجد على الأقل عنصر c **من** $[a,b]$ **بحيث** $f(c)=\mu$.

تطبيق : $\forall n\in\mathbb{N}\quad , \quad u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt$

1) بين أن (u_n) **تناقصية ومصغورة.**

2) استنتج أن (u_n) **متقاربة وأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=0$

II- تطبيقات حساب التكامل

1) حساب المساحة الهندسية

مثـــال (1) f **متصلة وموجبة**

مثـــال (2) f **متصلة وسالبة**

مثـــال (3) f **متصلة على** $[a,b]$ **وتغير الإشارة في** c $\quad a\prec c\prec b$

المساحة الهندسية $\int_a^b|f(x)|dx$

المساحة الجبرية $\int_a^b f(x)dx$

2) مساحة حيز محصور بين منحنيين

تطبيقات

أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين ℓ_f **و** ℓ_g **في الحالات التالية :**

1) $f(x)=x^2 \qquad g(x)=-x^2+x$

2) $f(x)=x^2 \qquad g(x)=\sqrt{x}$

3) حساب الحجوم

الحالة العامة : حجم مجسم في الفضاء

Volume d'un solide dans l'espace

ليكن Σ **مجسما محصورا بين المستويين** $z=\lambda_1$ **و** $z=\lambda_2$.

ليكن $V(\lambda)$ **هو حجم مجموعة النقط من الجسم** Σ **المحصورة بين المستويين** $z=\lambda_t$ **و** $z=h$.

إذن حجم مجموعة النقط المحصورة بـ $(z=\lambda_0)$ **و** $z=\lambda_0+h$ **هو** $V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)$

نفترض أن $S(\lambda_0)\prec S(\lambda_0+h)$

إذن $h(S(\lambda_0))\le V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)\le h(S(\lambda_0+h))$

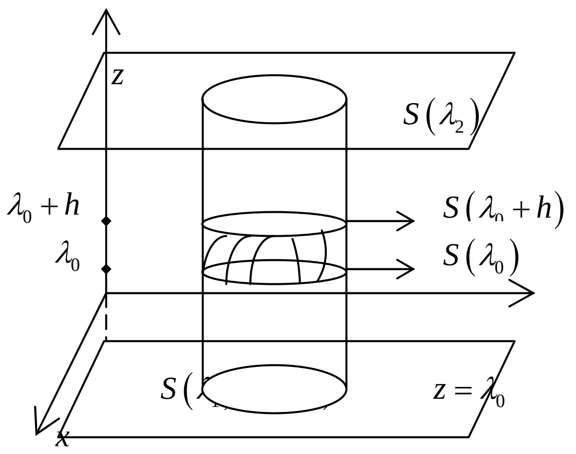
إذن $S(\lambda_0)\le\frac{V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)}{h}\le S(\lambda_0+h)$

إذن $\lim\limits_{h\to0}\frac{V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)}{h}=S(\lambda_0)$

ومنه $V'(\lambda_0)=S(\lambda_0)$

وبالتالي V **هي الدالة الأصلية للدالة** S **والتي تنعدم في** λ_1.

إذن $V(\lambda_2)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S(\lambda)d\lambda$



خاصية : الفضاء ξ منسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن Σ مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بـ $z=a$ و $z=b$.

لتكن $S(t)$ هي مساحة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الجسم Σ بحيث $z=t$.

إذا كانت $S:t\to S(t)$ متصلة على $[a,b]$

فإن حجم المجسم Σ هو : $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة القياس.

ليكن Σ مجسما محصورا بين المستويين $z=\lambda_1$ و $z=\lambda_2$.

ليكن $V(\lambda)$ هو حجم مجموعة النقط من الجسم Σ المحصورة بين المستويين $z=\lambda_t$ و $z=h$.

إذن حجم مجموعة النقط المحصورة بـ $(z=\lambda_0)$ و $z=\lambda_0+h$ هو $V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)$

نفترض أن $S(\lambda_0)\prec S(\lambda_0+h)$

إذن $h(S(\lambda_0))\le V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)\le h(S(\lambda_0+h))$

إذن $S(\lambda_0)\le\dfrac{V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)}{h}\le S(\lambda_0+h)$

إذن $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{V(\lambda_0+h)-V(\lambda_0)}{h}=S(\lambda_0)$

ومنه $V'(\lambda_0)=S(\lambda_0)$

وبالتالي V هي الدالة الأصلية للدالة S والتي تنعدم في λ_1.

إذن $V(\lambda_2)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S(\lambda)d\lambda$

خاصية : الفضاء ξ منسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن Σ مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بـ $z=a$ و $z=b$.

لتكن $S(t)$ هي مساحة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الجسم Σ بحيث $z=t$.

إذا كانت $S:t\to S(t)$ متصلة على $[a,b]$

فإن حجم المجسم Σ هو : $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة القياس.

تطبيق -1- : حساب حجم فلكة مركزها O وشعاعها R.

تطبيق -2- : حجم مجسم الدوران

Volume d'un solide de révolution

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ و ℓ المنحنى الممثل لها في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.
إذا دار ℓ حول محور الأفاصيل دورة كاملة فإنه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران.

لدينا $S(\lambda)=\pi f^2(\lambda)$

إذن $V=\int_a^b \pi f^2(\lambda)d\lambda$

خاصية : حجم مجسم الدوران المولد عند دوران المنحنى الممثل للدالة f حول المحور (Ox)

هو $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

تطبيقات : أحسب حجم مجسم الدوران المولد عند دوران المنحنى الممثل للدالة f حول المحور (Ox) في الحالتين التاليتين

(1 $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad b=1 \quad a=0$

(2 $f(x)=x^2$ $\quad b=1 \quad a=0$

تطبيقات : أحسب التكاملات التالية :

(1 $I_1=\int_0^1 \frac{t}{(3t-5)^5}dt$

(2 $I_2=\int_0^1 \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}d\theta$

(3 $I_3=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}$

(4 $I_4=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+5}$

(5 $I_5=\int_1^2 \frac{xdx}{(2x-1)^3}$

(6 $I_6=\int_0^{\pi}(2x-1)\sin x dx$

(7 f دالة زوجية :بين أن $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

(8 f دالة فردية :بين أن $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

Recueil d'annales sur les intégrales (F. Demoulin)