Dénombrement التعداد

I- مبدأ الجداء

تمهيد :

1) رمي قطعة نقدية :

a) اذا رمينا قطعة نقدية فاننا نحصل اما على الوجه F أو على الظهر P . P=pile , F=Face

في هذه الحالة نقول أن لنا امكانيتين .

b) و اذا رمينا القطعة النقدية مرتين فما هو عدد المكانيات الممكن الحصول عليها :

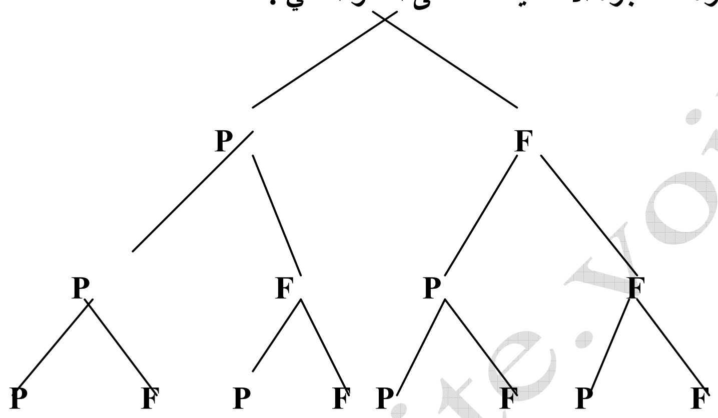
FF ; FP ; PF ; PP

c) و اذا رمينا القطعة النقدية ثلاث مرات فما هو عدد الامكانيات الممكن الحصول عليها:

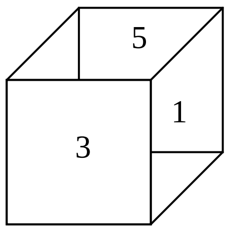
PPP ; PPF ; PFP ; FPP

FFP ; FPF ; PFF ; FFF

يمكن استعمال الشجرة " شجرة الامكانيات" على النحو التالي :



2) رمي النرد:



النرد هو مكعب عادة تكون وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6 .

a) إذا رمينا هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي النتائج الممكن المحصل عليها . الجواب : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.

لدينا إذا ستة إمكانيات .

b) اذا قمنا برمي النرد مرتين و كنا نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي مجموعة جميع الامكانيات المتوقعة ؟

الجواب : {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6).....}. يمكن إعطاء جدول للنتائج.

c) تظن عدد جميع الإمكانيات إذا قمنا برمي النرد ثلاث مرات متتالية .

3) تكوين أعداد

a) لدينا 6 بيدقات تحمل الأرقام : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6

a_1) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

a_2) ما هو عدد الأعداد المكونة من ستة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

b) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام .

ملاحظة : لعدد oxy يعتبر عدد مكون من رقمين فقط .

خلاصة : مبدأ الجداء

نعتبر p اختبار

اذا كان : الاختبار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

الاختبار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

الاختبار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد الكيفيات التي تم بها هذا الاختبار هو : $n_1 \times n_2 \times \dots \dots \dots \times n_p$

تطبيقات:

1- صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

a) نسحب من الصندوق 3 كرات واحدة تلو الأخرى و لا نعيد الكرة المسحوبة الى الصندوق

a_1) أعط عدد جميع السحبات الممكنة

a_2) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات بيضاء.

a_3) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات سوداء.

a_4) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات لها نفس اللون.

b) نفس الأسئلة علما أننا نعيد الكرة المسحوب إلى الصندوق قبل سحب الأخرى وهكذا.

2- كيس يحتوي على 5 بيدقات تحمل الأرقام 0 – 1- 2 - 3- 4 . نسحب بيدقتين بالتتابع.

إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما فرديا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية

و إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما زوجيا لا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية

a) ما هو عدد جميع الإمكانيات

b) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما فرديا

c) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما زوجي

II- الترتيبات : Les arrangement

تمهيد :

1- في قاعة انتظار إحدى العيادات يوجد 10 كراسي و 3 مرضى . بكم من طريقة يمكن للمرضى الثلاث أن يجلسوا.

2- أربعة أطفال دخلوا إلى قاعة للمطالعة فوجدوا 5 طاولات. بكم من طريقة يمكن للأطفال أن يجلسوا (كل طاولة لا تسع إلا لطفل على الأكثر)

3- قسم يحتوي على42 تلميذ . بكم من طريقة يمكن اختيار ثلاث تلاميذ واحد تلو الأخر من هذا القسم .

تعريف:

كل ترتيب ل p عنصر من بين n عنصر $(p \leq n)$ يسمى يسمى ترتيبه ل p عنصر من بين n

عدد الترتيبات :

تمهيد :

مجموعة تتكون من n عنصر .

نريد اختيار p عنصر من بين n بالتتابع

لاختيار العنصر الأول لدينا n طريقة

و لاختيار العنصر الثاني لدينا $(n-1)$ طريقة

و لاختيار العنصر p^n لدينا $(n-p+1)$ طريقة.

وحسب مبدأ الجداء لدينا : $n(n-1) \dots \dots .(n-p+1)$ طريقة مختلفة لاختيار p عنصر من بين n.

مبرهنة :

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n $p \leq n$ هو $n(n-1) \dots \dots \dots .(n-p+1)$ و نرمز له ب A_n^p

$$A_5^3 = n(n-1) \dots \dots (n-p+1)$$

مثال : A_5^1 , A_6^2 , A_5^3

III - التبديلات : les permutations

تعريف :

كل ترتيبة ل n عنصر من بين n عنصر تسمى تبديلة ل n عنصر

عدد التبديلات :

عدد التبديلات ل n عنصر هو العدد A_n^n

$n(n-1)..............\times 2\times 1$

و نرمز له ب: $n!$ و نقرأ n عاملي أو n factoriel .

$n!=n(n-1)..............\times 2\times 1$

اصطلاح : $0!=1$

مثال : $63!=$ $5!=$ **120**

ملاحظة هامة :

$$A_n^p=n(n-1)........(n-p+1)$$

$$=\frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p=n(n-1)........(n-p+1)$$

$$=\frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\boxed{A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}}$$

تطبيقات :

أنظر التمارين

VI- التأليفات : Les combinaisons

تمهيد :

1- نعتبر المجموعة : $E=\{a,b,c,d\}$

حدد جميع أجزاء E

2- نريد اختيار شخصين ثانيا من بين 5 أشخاص

ما هو عدد الطرق لإجراء هذا الاختبار.

تعريف :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر

كل جزء من E مكون من P عنصر (p≤n) يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n

عدد التأليفات :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و (p≤n)

إذا أردنا اختيار p عنصر بالتتابع و بدون إحلال من E فإن عدد جميع الإمكانيات هو A_n^p :

و ليكن N هو عدد التأليفات ل p عنصر من بين n

نلاحظ أنه بالنسبة للتأليفات الترتيب غير مهم

اذن لكل تأليفة ل p عنصر من بين n هناك ل p عنصر من بين n هناك $p!$ ترتيبة ل p عنصر من بين n و منه :

$$A_n^p=p!N \quad \text{أي} \quad N=\frac{A_n^p}{p!}$$

مبرهنة :

عدد التاليفات ل p عنصر من بين n (p≤n) هو العدد $\frac{A_n^p}{p!}$ و الذي نرمز له ب : C_n^p

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

تطبيقات:

1- أحسب : $C_n^0 \quad , \quad C_n^1 \quad , \quad C_3^1 \; , \; C_4^2$

2- بين أن : $= C_n^{n-p} \; C_n^p$

3- بين أن : $1 \le p \le n \quad , \quad C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

4- مثلث باسكال

5- صيغة الجدائية : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

أمثلة : 1) أحسب : $(n+1)^5$

2) بين أن : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

استنتج عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر

خاصية : عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر هو 2^n

$$\boxed{cardP(E) = 2^{cardE}}$$