☜ الباب الرابع : الأشكال الهندسية المألوفة .

المحتويـــــات

الكفاءات المستهدفة

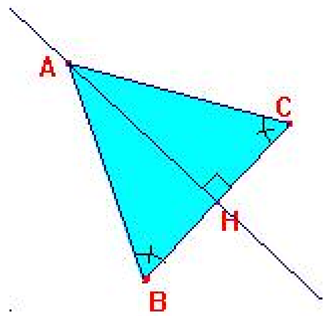
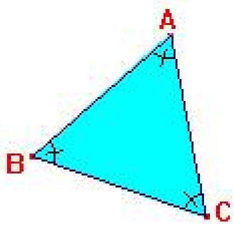
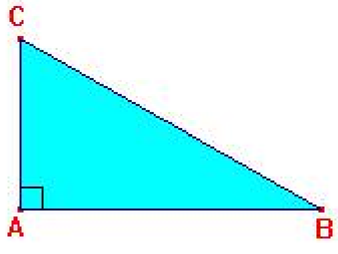
1. حل مشكلات توظف فيها خواص الأشكال الهندسية المألوفة.
2. توظيف مبرهنتي طالس و فيثاغورث و عكس كل منهما لحل مشكلات.
3. استعمال التحويلات النقطية و خواص الأشكال الهندسية المألوفة لحل مسائل.

الـــدرس

1. المثلثات

خاصية

مجموع زوايا مثلث يساوي °180

	الشكل	تعاريف	خواص مميزة
المثلث متساوي الساقين	 	ضلعان متقايسان $AB = AC$	$ABC = ACB$ (AH)محور تناظر
المثلث متقايس الأضلاع	 	الأضلاع الثلاثة متقايسة	$ABC = ACB = BAC$ 3 محاور تناظر
المثلث قائم الزاوية	 	زاوية قائمة	$BAC = 90°$ $ABC + ACB = 90°$

2. الدوائر

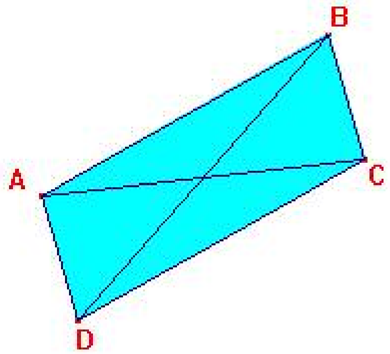
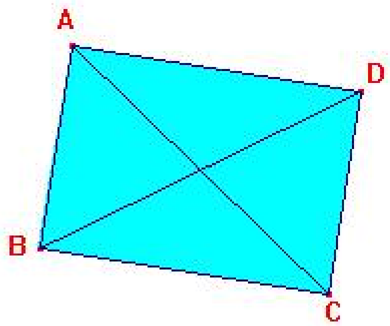
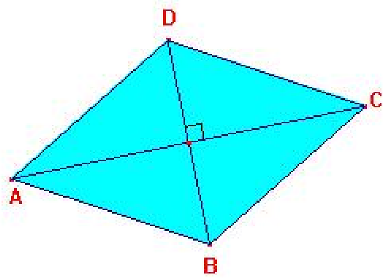
تعاريف

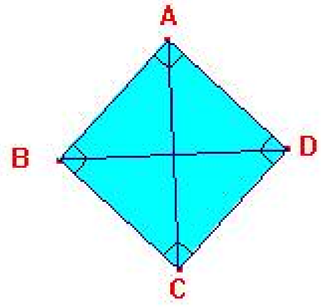
الدائرة هي مجموعة النقط المتساوية المسافة من نقطة ثابتة تسمى مركز الدائرة.

مماس دائرة مركزها O في نقطة A منها هو المستقيم العمودي على (OA) في النقطة A .

دائرتان متماستان في نقطة A هما دائرتان لهما نفس المماس في النقطة A .

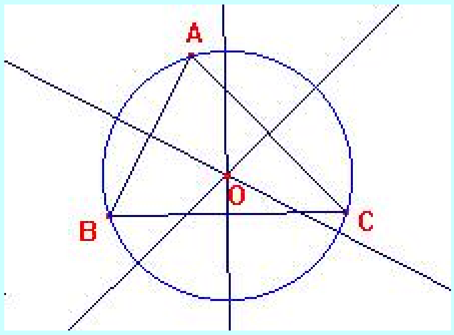
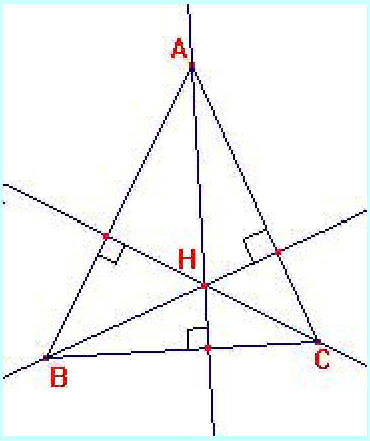
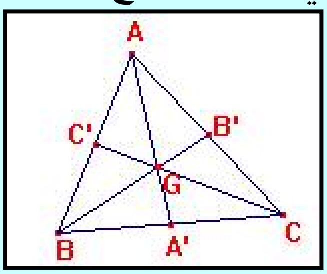
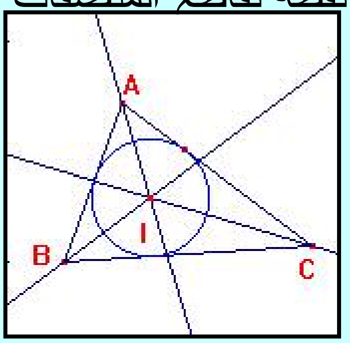
3. الرباعيات الخاصة

	الشكل	تعاريف	خواص مميزة
متوازي الأضلاع		ضلعان متقايسان $AB = AC$	القطران متناصفان
المستطيل		أربع زوايا قائمة	القطران متناصفان و متقايسان
المعين		أربع أضلاع متقايسة	القطران متناصفان و متعامدان

المربع	 	أربع زوايا قائمة و أربع أضلاع متقايسة	القطران متناصفان، متقايسان و متعامدان

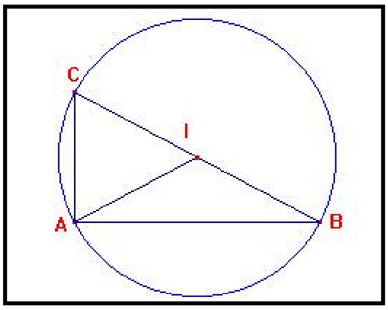
4.المستقيمات الشهيرة في مثلث

☒المراكز المختلفة لمثلث

O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث O هي نقطة تقاطع المحاور  $OA=OB=OC$	**Hنقطة تقاطع الارتفاعات** H هي نقطة تقاطع الارتفاعات  $(AH)\perp(BC)$ و$(BH)\perp(AC)$ و$(CH)\perp(AB)$
Gمركز ثقل مثلث G هي نقطة تقاطع المتوسطات  $AG=\frac{2}{3}AA'$ ، $BG=\frac{2}{3}BB'$ ، $CG=\frac{2}{3}CC'$	**Iمركز الدائرة المرسومة داخل مثلث** I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية 

☒الدائرة المحيطة بمثلث قائم

خاصيتان مميزتان:



يكون المثلث ABC قائما في النقطة A إذا و فقط إذا كانت

القطعة $[BC]$ قطرا للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

يكون المثلث ABC قائما في النقطة A إذا و فقط إذا كان طول المتوسط $[AI]$ يساوي نصف طول القطعة $[BC]$.

5.مبرهنتا طالس و فيثاغورث

☒مبرهنة فيثاغورث و عكسها

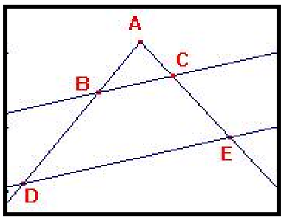
مبرهنة فيثاغورث: إذا كان مثلث ABC قائما في النقطة A فإن:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

عكس مبرهنة فيثاغورث: إذا كان في مثلث ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن المثلث ABC قائم في النقطة A .

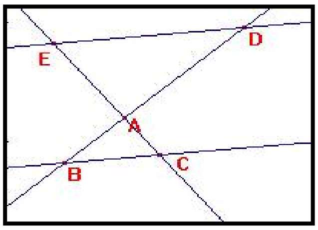
☒مبرهنة طالس و عكسها



مبرهنة طالس: النقط A ، B و D على استقامة واحدة و النقط A ، C و E على استقامة واحدة.

إذا كان المستقيمان (BC) و (DE) متوازيين فإن:

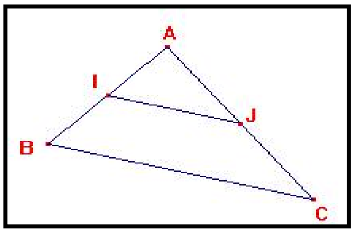
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$



عكس مبرهنة طالس: النقط A ، B و D على استقامة واحدة و النقط A ، C و E على استقامة واحدة بنفس الترتيب.

إذا كان $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ يكون المستقيمان (BC) و (DE) متوازيين.

☒مبرهنة المنتصفين في مثلث

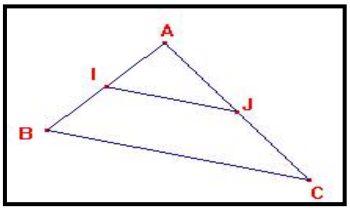


ABC مثلث. I نقطة من (AB) و J نقطة من (AC).

مبرهنة مستقيم المنتصفين:

إذا كان I منتصف $[AB]$ و كان J منتصف $[AC]$ فإن:

$$(IJ)//(BC) \text{ و } IJ=\frac{1}{2}BC$$



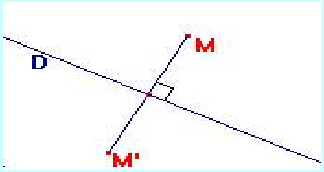
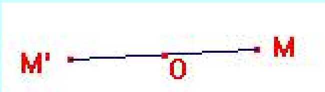
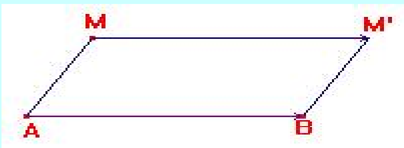
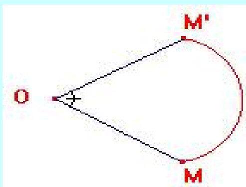
عكس مبرهنة مستقيم المنتصفين:

إذا كان I منتصف $[AB]$ و كان $(IJ)//(BC)$ فإن:

J منتصف $[AC]$

6. التحويلات النقطية في المستوي

☒ التحويلات النقطية الشهيرة

التحويل النقطي	M' صورة M	التمثيل الهندسي
التناظر المحوري الذي محوره (D)	• إذا كانت $M \in (D)$ فإن $M' = M$ • إذا كانت $M \notin (D)$ فإن (D) هي محور القطعة $[MM']$	
التناظر المركزي الذي مركزه O	• إذا كانت $M = O$ فإن $M' = O$ • إذا كانت $M \neq O$ فإن O هي منتصف القطعة $[MM']$	
الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ أو $MABM'$ متوازي أضلاع	
الدوران الذي مركزه O و زاويته α	• إذا كانت $M = O$ فإن $M' = O$ • إذا كانت $M \neq O$ فإن $OM' = OM$ و $MOM' = \alpha$	

☒ **الصور بتحويل نقطي**

مبرهنة و تعريف:

- نسمي تقايسا كل تحويل نقطي يحافظ على المسافات.
- كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب و الدوران تقايسات.

صور بعض الأشكال الهندسية بتناظر، انسحاب أو دوران:

- صورة مستقيم (قطعة مستقيمة) هو مستقيم (قطعة مستقيمة) .
- صورتا مستقيمان متوازيان(متعامدان) هما مستقيمان متوازيان(متعامدان) .
- صورة دائرة مركزها O هي دائرة تقايسها مركزها O' حيث O' هو صورة O.
- صورة تقاطع هي تقاطع الصور.
- صورة زاوية هي زاوية تقايسها.

تمارين محلولة وطرائـــــق .

تمرين محلول 1

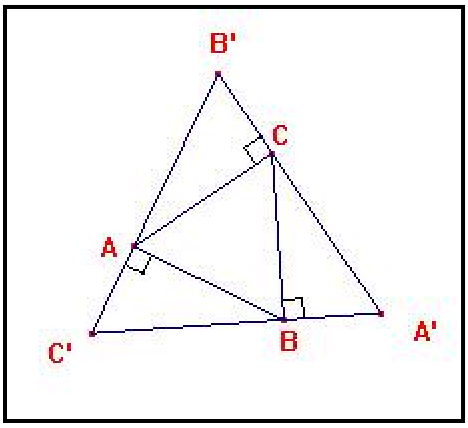
تعيين طبيعة مثلث

النــــص:

ABC مثلث متقايس الأضلاع. المستقيمات العمودية على (AB) في A و على (BC) في B و على (AC) في C تتقاطع في النقط A'، B' و C'.

بين أن المثلث $A'B'C'$ متقايس الأضلاع.

الحــل:



- بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن:

$$ABC = BAC = ACB = 60^{\circ}$$

من $C'AB + BAC + CAB' = 180°$

و $C'AB = 90°$ و $BAC = 60°$

نستنتج أن: $CAB' = 30°$

و بما أن المثلث CAB' قائم في النقطة C فإن:

$CAB' + AB'C = 90°$ و منه: $AB'C = 60°$ و بالتالي: $C'B'A' = 60°$

- بنفس الطريقة نثبت أن: $A'C'B' = 60°$

- من $C'A'B' + B'A'C' + C'A'B' = 180°$ نستنتج أن: $C'A'B' = 60°$

زوايا المثلث $A'B'C'$ متقايسة فهو إذن متقايس الأضلاع.

تمرين محلول 2

إثبات أن مستقيمين متعامدان

النـــص:

(C) و (C') دائرتان لهما نفس نصف القطر و مركزاهما O و O'على الترتيب.

(C) و (C') يتقاطعان في نقطتين A و B.

أثبت أن المستقيمين (OO') و (AB) متعامدان.

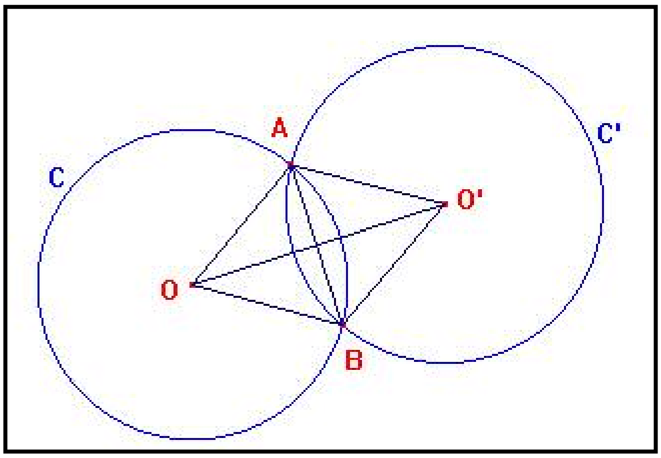
الحــل:

للدائرتين (C) و (C') نفس نصف القطر

و بالتالي: $OA = OB = O'A = O'B$.

إذن الرباعي $OBO'A$ معين .

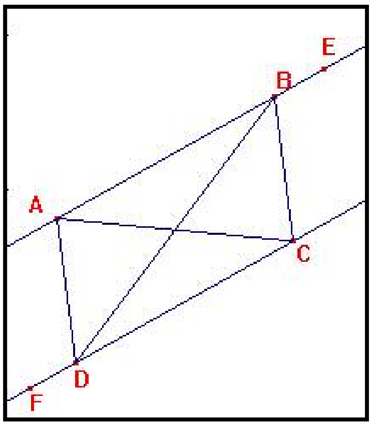
نعلم أن قطري معين متعامدان و منه: المستقيمين (OO') و (AB) متعامدان.



تمرين محلول 3

إثبات أن رباعيا متوازي أضلاع

النـــص:



$ABCD$ متوازي أضلاع. نعتبر النقطتين E و F

حيث: $E \in (AB)$ ، $F \in (DC)$ و $BE = DF$ (أنظر الشكل المقابل)

برهن أن: $AECF$ متوازي أضلاع .

الحـــل:

$ABCD$ متوازي أضلاع ومنه $(AB)//(CD)$ مع $AB = CD$.

بما أن $E \in (AB)$ و $F \in (DC)$ فإن (AE) و (CF) متوازيان.

و لدينا من جهة ثانية $AE = AB + BE$ و $CF = CD + DF$

و بما أن $AB = CD$ و $BE = DF$ فإن $AE = CF$

لدينا إذن: $\begin{cases} (AE)//(CF) \\ AE = CF \end{cases}$ و منه: $AECF$ متوازي أضلاع.

تمرين محلول 4

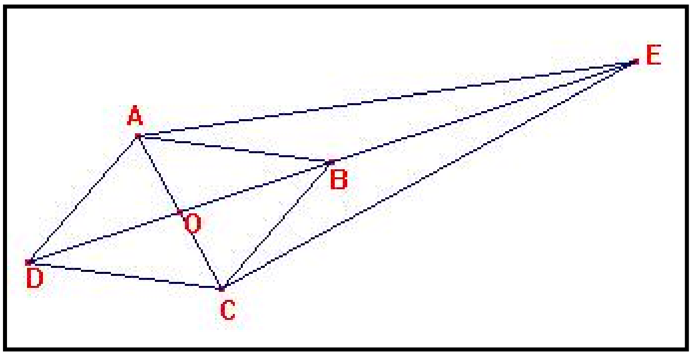
التعرف على مركز ثقل مثلث

النـــص:

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O و لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى النقطة B .

– ما هو مركز ثقل المثلث ACE ؟

الحــل:



بما أن النقطتان D و E متناظرتان بالنسبة إلى النقطة B فإن النقطة D، O B، E استقامية مع $DB = EB$.

بما أن النقطة O هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ فإن قطراه متناصفان و بالتالي فالنقطة O هي منتصف كل من القطعتين $[AC]$ و $[BD]$.

و بالتالي فالنقطة E تنتمي إلى المتوسط $[EO]$ في المثلث ACE و لدينا:

$DB = EB = 2BO$.

هكذا إذن: $EO = 3BO$ و $EB = \frac{2}{3}EO$.

نستنتج مما سبق أن النقطة B هي مركز ثقل المثلث ACE.

تمرين محلول 5

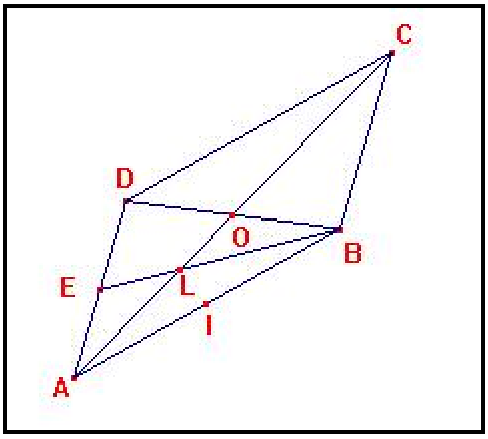
البرهان على استقامية نقط

النـــص:

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. لتكن النقطة E منتصف $[AD]$ و لتكن النقطة I منتصف $[AB]$. المستقيمان (AC) و (BE) يتقاطعان في النقطة L.

برهن استقامية النقط D، L و I.

الحــل:



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. و منه النقطة O هي منتصف $[BD]$.

المستقيم (AO) هو إذن متوسط في المثلث ABD.

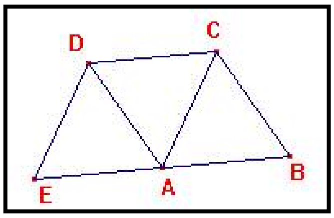
كذلك المستقيم (BE) هو متوسط في المثلث ABD.

النقط L هي إذن مركز ثقل المثلث ABD. و بالتالي فالمتوسط الثالث (DI) يمر من النقطة L.

نستنتج هكذا إذن استقامية النقط D، L و I.

تمرين محلول 6

التعرف على مثلث قائم



النـــص:

ABC، ACD و ADE 3 مثلثات متقايسة الأضلاع كما هو موضح في الشكل المقابل.

أثبت أن المثلث BCE قائم.

الحــل:

لدينا $\widehat{BAE}=3\times60°=180°$ و منه فالنقط B ، A و E على استقامة واحدة.

بالإضافة إلى ذلك لدينا $AB=AE$ ومنه فإن النقطة A منتصف القطعة $[BE]$.

لدينا $CA=AB=AE$ و منه $CA=\frac{1}{2}BE$

في المثلث BCE طول المتوسط $[CA]$ يساوي نصف طول القطعة $[BE]$.

و بالتالي فالمثلث BCE قائم في النقطة C.

تمرين محلول 7

التعرف على مثلث قائم

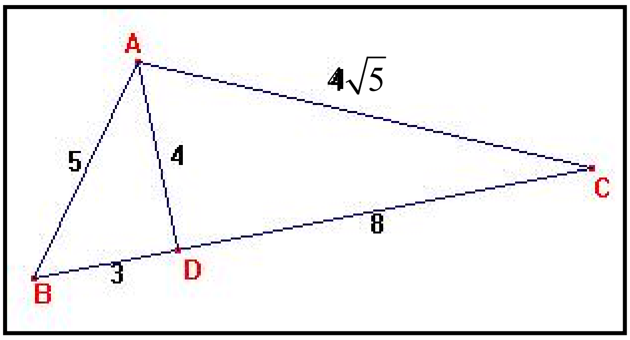
النـــص:

ABC و ADC مثلثان وضعيتهما موضحة في الشكل الموالي.

1 – هل المثلثان ABD و ADC قائمين؟

2 – ماذا يمكن أن نستنتج بالنسبة للنقط B ، D و C؟

3 – هل المثلث ABC قائما في النقطة A ؟



الحـــل:

1. $AB^2 = 5^2 = 25$ و $DB^2 + DA^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ومنه: $AB^2 = DB^2 + DA^2$

نستنتج إذن حسب عكس مبرهنة فيثاغورث أن المثلث ABD قائم في النقطة D.

$AC^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 80$ و $DA^2 + DC^2 = 4^2 + 8^2 = 80$ و منه: $AC^2 = DA^2 + DC^2$

نستنتج إذن حسب عكس مبرهنة فيثاغورث أن المثلث ADC قائم في النقطة D.

2. $BDC = BDA + CDA = 90° + 90° = 180°$

نستنتج أن النقط B، D و C على استقامة واحدة.

3. بما أن النقط B، D و C على استقامة واحدة فإن: $BC = BD + DC = 11$

لدينا من جهة $BC^2 = 11^2 = 121$ و لدينا من جهة ثانية $AB^2 + AC^2 = 5^2 + \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 105$

بما أن $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ فإن المثلث ABC ليس قائما في النقطة A.

ملاحظة: بالنسبة للسؤال الثالث استعملنا الخاصية التالية:

إذا كان $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ فإن المثلث ABC ليس قائما في النقطة A.

تسمى هذه الخاصية بالعكس النقيض لمبرهنة فيثاغورث و هي مكافئة لهذه المبرهنة.

تمرين محلول 8

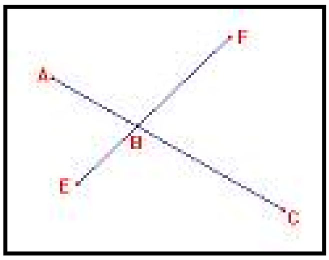
التعرف على مستقيمات متوازية

النـــص:

في الشكل المقابل القطعتان $[AC]$ و $[EF]$ تتقاطعان في النقطة B حيث: $AB = 6$، $BC = 10$، $EB = 4.8$ و $BF = 8$

1 – هل المستقيمان (AE) و (FC) متوازيين؟

2 – هل المستقيمان (AF) و (EC) متوازيين؟



الحــل:

1. النقط A ، B ، C و النقط E ، B ، F على استقامة واحدة بنفس الترتيب.

لدينا $\frac{BA}{BC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ و $\frac{BE}{BF}=\frac{4.8}{8}=\frac{3}{5}$ و منه $\frac{BA}{BC}=\frac{BE}{BF}$

و بالتالي ،حسب عكس مبرهنة طالس، المستقيمان (AE) و (FC) متوازيان.

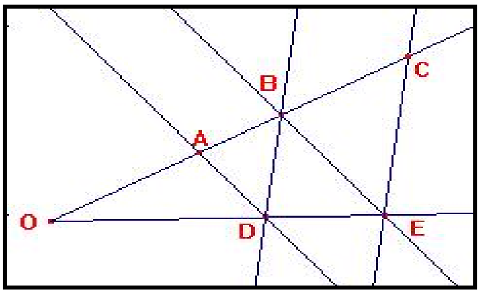
2. النقط A ، B ، C و النقط F ، B ، E على استقامة واحدة بنفس الترتيب.

لدينا $\frac{BA}{BC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ و $\frac{BF}{BE}=\frac{8}{4.8}=\frac{5}{3}$ و منه $\frac{BA}{BC}\neq\frac{BF}{BE}$

و بالتالي فالمستقيمان (AF) و (EC) غير متوازيين.

تمرين محلول 9

إثبات علاقة



النــــص:

في الشكل المقابل النقط O ، A ، B ، C

على استقامة واحدة و كذلك النقط O ، D ، E حيث:

$(BE)//(AD)$ و $(CE)//(BD)$

– أثبت أن: $OB^2=OA\times OC$

الحــل:

حسب نظرية طالس لدينا من جهة: $\frac{OD}{OE}=\frac{OA}{OB}$ و لدينا من جهة ثانية: $\frac{OD}{OE}=\frac{OB}{OC}$

نستنتج مما سبق أن: $\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}$

و بالتالي: $OB^2=OA\times OC$

تمرين محلول 10

إثبات أن قطعتين مستقيمتين متقايستان

النــــص:

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. (D) مستقيم يمر من O.

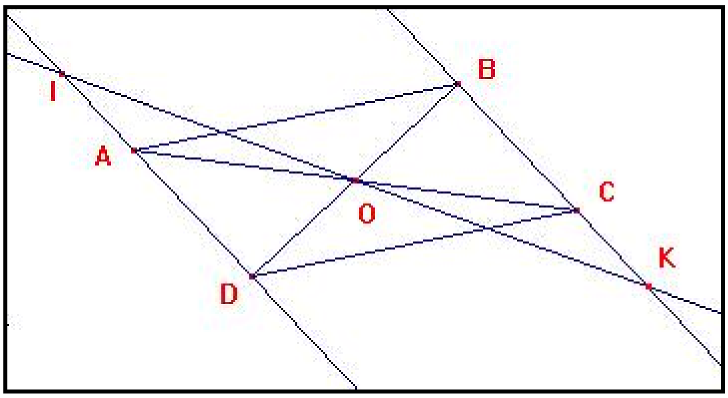
(D) يقطع المستقيم (AD) في النقطة I و يقطع المستقيم (BC) في النقطة K .

أثبت أن $AI = CK$

طـــــريقــة

للبرهنة على أن لقطعتين مستقيمتين نفس الطول يمكن إثبات أن إحداهما هي صورة الأخرى بأحد التحويلات الشهيرة.

الحــل:



- صورتا النقطتين A و D بواسطة التناظر المركزي الذي مركزه O هما على الترتيب النقطتان C و B. و منه صورة المستقيم (AD) هو المستقيم (BC).

- صورة المستقيم (D) هو المستقيم (D) نفسه لأنه يمر من مركز التناظر O.

- النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (AD) و منه فصورتها هي نقطة تقاطع صورتي كل من (D) و (AD) و بالتالي فصورة النقطة I هي النقطة K.

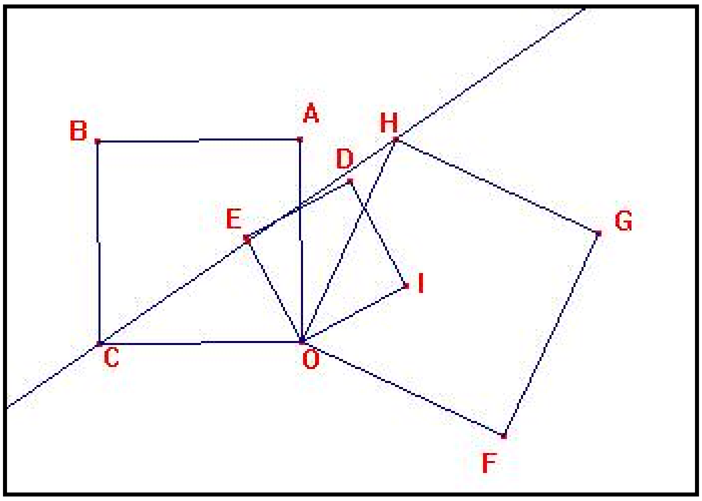
لدينا إذن صورة النقطة A هي النقطة C و صورة النقطة I هي النقطة K بواسطة التناظر المركزي الذي مركزه O.
بما أن التناظر المركزي تقايس فإن: $AI = CK$

تمرين محلول 11

إثبات أن ثلاث نقط في استقامية

النـــص:

نعتبر المربعات الثلاثة $OABC$، $OIDE$ و $OFGH$ في الشكل أسفله بحيث أن النقطة C، E و H في استقامية.
برهن أن النقط A، I و F في استقامية.



طـــريقــة

للبرهنة على أن ثلاث نقط في استقامية يمكن إثبات أن هذه النقط هي صور لثلاث نقط في استقامية واحدة بأحد التحويلات الشهيرة.

الحـــل:

صور النقط C ، E و H بواسطة الدوران الذي مركزه O و زاويته الموجهة $(-90°)$هي على الترتيب النقط A ، I و F. و منه صورة المستقيم (CE) هو المستقيم (AI).
و بنا أن النقطة H تنتمي إلى المستقيم (CE) فإن صورتها F بواسطة نفس الدوران تنتمي إلى المستقيم (AI).

نستنتج إذن أن النقط A، I و F في استقامية.