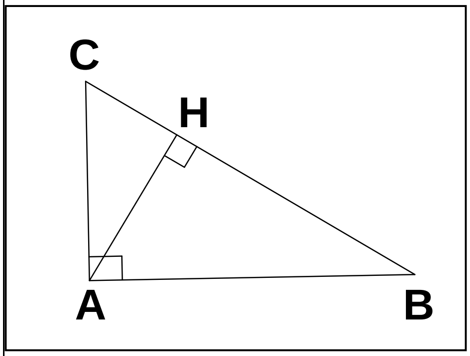
أنشطة حول المثلثات المتشابهة

نشاط 1



ABC مثلث قائم في A و $A\hat{B}C = x$. H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

1) برهن أن ABC و HAB متشابهان.

2) عيّن نسبة التشابه الذي يحوّل المثلث ABC إلى المثلث HAB .

3) أحسب $\frac{S_1}{S_2}$ إذا علمت أن S_1 هي مساحة HAB و S_2 هي مساحة ABC .

الحـــلّ

1) المثلثان ABC و HAB قائمان و لهما زاوية مشتركة إذن متشابهان.

2) لاحظ: $\boxed{\begin{array}{ccc} H & A & B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & C & B \end{array}}$ إذن $\frac{HA}{AC} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} = \cos x$ و منه نسبة التشابه الذي يحوّل المثلث ABC إلى المثلث HAB هي $\cos x$.

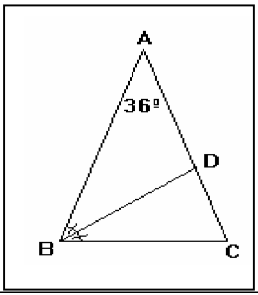
<u>**ملاحظة**</u>: بما أن $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فإن $0 < \cos x < 1$، إذن HAB تصغيرلــ ABC .

3) نسبة التشابه الذي يحوّل المثلث ABC إلى المثلث HAB هي $\cos x$ إذن $S_1 = S_2 \cos x$.

<u>**ملاحظة**</u>: يمكن استعمال نفس المعطيات لاستنتاج العلاقات المترية في مثلث قائم (بعد مقارنة ABC و HAB و HCA).

نشاط2

ABC مثلث متقايس الساقين حيث $AB = AC$ و $B\hat{A}C = 36°$.
منصف الزاوية الداخلية التي رأسها A يقطع (AC) في النقطة D .
- برهن أن BCD و ABC متشابهان.
-يعطى $AB = a$ و $BC = b$. أحسب AD وDC بدلالة a و b .



الحلّ

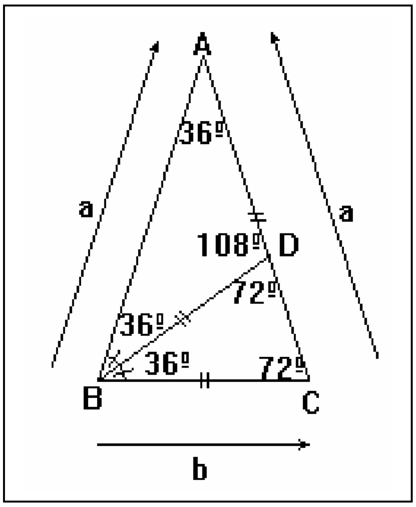
1)زوايا المثلث ABC تقايس زوايا المثلث BCD على الترتيب
إذن ABC و BCD متشابهان.

2) لاحظ :

C	B	D
↓	↓	↓
C	A	B

إذن $\frac{CB}{CA}=\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{CB}$ أي $\frac{b}{a}=\frac{BD}{a}=\frac{CD}{b}$

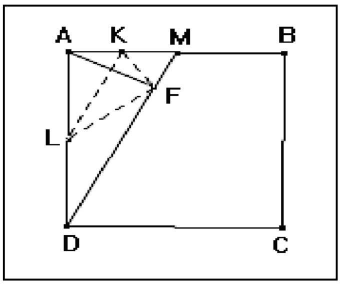
و منه $CD=\frac{ab}{a+b}$ و $BD=\frac{a^2}{a+b}$



استعمال التحويلات النقطية

نشاط1

ABCD مربع . M و L و K هي منتصفات $[AB]$ و $[AD]$ و $[AM]$ على الترتيب . F هي المسقط العمودي للنقطة A على (MD).
بين أن $(FK)\perp(FL)$.

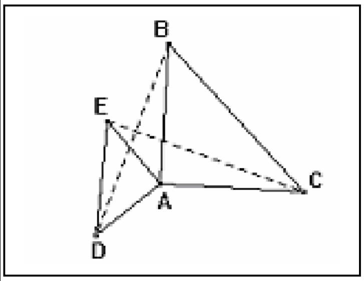


يمكن استعمال إحتفاظ التعامد بالتناظر العمودي.

ملاحظة: يمكن ،كذلك،استعمال مبرهنة فيتاغورس أو طرق أخرى.

النشاط2

ACB و AED مثلثان قائمان في A حيث: AB=AC و AD=AE.
بين ان $(BD)\perp(EC)$.

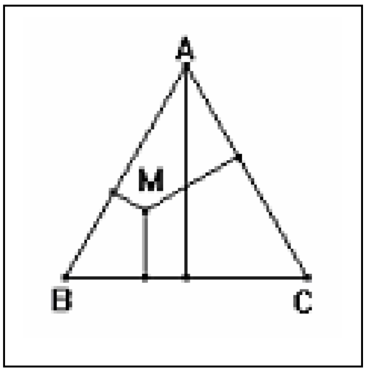


نستعمل الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

البرهان باستعمال مساحات

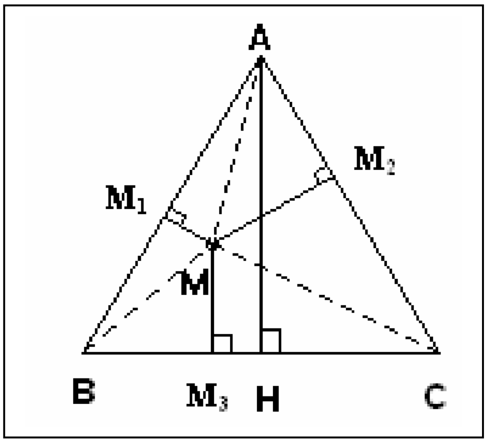
نشاط1

ABC مثلث متقايس الأضلاع .
برهن أنه مهما تكن وضعية النقطة M داخل هذا المثلث،
فإن ارتفاعه يساوي مجموع المسافات بين M و أضلاعه.
(يمكن حساب مساحة ABC بطريقتين) .



حل

نسمي H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .
M_1و M_2 و M_3 هي،على الترتيب،المساقط العمودية للنقطة M على (AB) و (AC) و (BC) على الترتيب.
نحسب المساحة S للمثلث ABC بطريقتين :



طريقة1 :

$$S=\frac{1}{2}\times BC\times AH \quad .... \quad (i)$$

طريقة 2:

$$S=\frac{1}{2}\times AB\times MM_1+\frac{1}{2}\times AC\times MM_2+\frac{1}{2}\times BC\times MM_3$$

و بما أن $AB=AC=BC$

فإن $S=\frac{1}{2}\times BC\times\left(MM_1+MM_2+MM_3\right) \quad .... \quad (ii)$

من (i) و (ii) نستنتج : $\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times BC\times\left(MM_1+MM_2+MM_3\right)$

أي $AH=MM_1+MM_2+MM_3$.

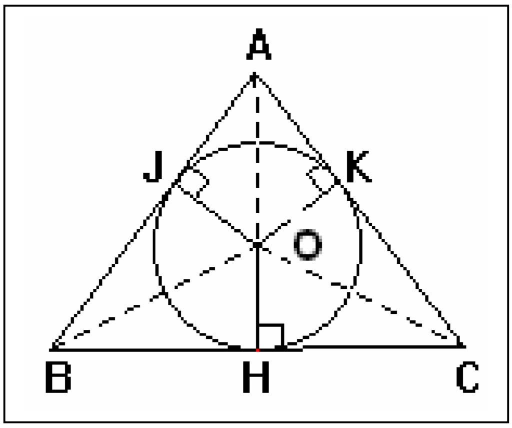
ملاحظة :

عندما يطرح السؤال على الشكل التالي: هل مهما تكن M داخل المثلث المتقايس الأضلاع ABC، فإن الإرتفاع يساوي مجموع المسافات بين M و الأضلاع ؛يمكن تخمين النتيجة باستعمال أحد برمجيات للهندسة الحركية، ثم البرهان بعد ذلك.

نشاط2

ABC مثلث متقايس الساقين حيث AB=AC=5cm و BC=6cm . أحسب نصف القطر r للدائرة (Γ) المرسومة داخل المثلث ABC .

حلّ



- نسمي H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

نجد AH=4cm باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

- نحسب المساحة S للمثلث ABC بطريقتين:

الطريقة 1 :

$S=\frac{1}{2}\times BC\times AH$ ؛نجد $(i)......S=12cm^2$

الطريقة2:

الدائرة (Γ) التي مركزها O ونصف قطرها r تمس الأضلاع ،على الترتيب، في النقط J،H،K

(O هي بطبيعة الحال نقطة تقاطع المنصفات الداخلية)

$S=\frac{1}{2}\times AB\times OJ+\frac{1}{2}\times BC\times OH+\frac{1}{2}\times AC\times OK$ أي $S=\frac{1}{2}\times r\times(AB+BC+AC)$

لأن $OJ=OH=OK=r$ ؛نجد $(ii).......S=8r$

من (i) و (ii) نستنتج : $8r=12$ ؛ نجد $r=1,5cm$.