الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم

سند تكويني
موجه لمفتشي التعليم الإبتدائي
(خاص بالتكوين المتخصص)

I. مادة الحساب
II. مادة الهندسة

إعداد
هيئة التأطير بالمعهد

4 - شارع أولاد سيدي الشيخ - الحراش - الجزائر
الموقع على الأنترنت http://www.infpe.edu.dz
البريد الإلكتروني contact@infpe.edu.dz

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم

سند تكويني

موجه لمفتشي التعليم الإبتدائي

(خاص بالتكوين المتخصص)

* مادة الحساب
* مادة الهندسة

إعداد

هيئة التأطير بالمعهد:

الدكتور: أبو بكر خالد سعد الله

المدرسة العليا للأساتذة - القبة - الجزائر

السنة: 2009

الموقع على الأنترنت: http//www.infpe.edu.dz

البريد الإلكتروني: contact@infpe.edu.dz

الفهــرس

1

الحساب

تقديم

كُتِب هذا الدرس في المنطق والحساب وفق البرنامج المسطر من طرف المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم (الحراش) الهادف إلى تكوين مفتشي التعليم الابتدائي في مادة الرياضيات. وقد ارتأينا تقسيم هذا البرنامج إلى فصول هي :

1) المنطق ، 2) الأعداد العشرية ، 3) الكسور، 4) توجيهات.

وقد استعرضنا في الفصل الأول جوانب من مفاهيم المنطق الرياضي دون التعمق فيها مراعاة لمن هم غير مختصين في الرياضيات. أما الفصل الثاني فتناول الأعداد العشرية مركزا على إنجاز العمليات المتداولة وبوجه خاص عملية القسمة بشتى أنواعها.

وخصص الفصل الثالث للكسور وخواصها ومصطلحاتها. وأولينا اهتماما خاصا – كما أوصى به البرنامج – للنسبة والتناسب التي أدمجنا فيها أيضا موضوع النسب المئوية.

وينتهي هذا الدرس بفصل رابع يقدم توجيهات حول الحساب في المرحلة الابتدائية وطرق تدريسه. وقد ركزنا على تقديم آراء يبدو فيها بعض التباينات والخلافات للتأكيد على أن تدريس الحساب في هذا المستوى لا يبدو يسيرا ويتطلب عناية كبيرة لتبليغ أفكاره ومفاهيمه للمتعلم.

ولم نهتم بالجانب التدريبي (التمارين) إلا في مواقع قليلة، وأغفلنا هذا الموضوع مركزين في معظم الأحيان على المفاهيم وأهم الخواص. كما أغفلنا البراهين لأن المكان لا يسمح بتقديم كل التفاصيل، ولأن البرنامج يعفينا من ذلك.

والواقع أن العائق الذي أتعبنا في كتابة هذا الدرس هو أن الجمهور متنوع الاختصاص. فمن الجمهور من هو متخصص في الأدب العربي، ومنهم من هو في التاريخ أو الفلسفة، وربما من تخصص في الفيزياء أو الرياضيات، الخ. فكيف بنا والحال هذه أن نقدم درسا في الرياضيات يستفيد منه كل هؤلاء على السواء، وقد تباعدت مشاربهم ومعارفهم؟ لذلك حرصنا على ألا نستعمل الرموز والعلاقات الرياضية إلا نادرا.

نتمنى أن يكون هذا الدرس مفيدا للطالب المفتش مهما كان اختصاصه.

أبو بكر خالد سعد الله
قسم الرياضيات، المدرسة العليا
للأساتذة، القبة، الجزائر

I

المنطق

المنطــق

نقدم في هذا الفصل بعض مفاهيم المنطق الرياضي ومصطلحاته، مثل تحديد معنى القضية ونفيها والروابط المنطقية (الوصـــل والفـــصل). كمـــا نستعرض بإيجاز مفهوم المكمم (الكلي والوجودي) وبعض العلاقات الـــتي تربط مثل هذه المكممات.

وينتهي الفصل بموضوع للتأمل ليدرك القارئ بأن المنطق الرياضي، رغم إشادة الناس جميعا بمحاسنه ودقته فهو يعاني من هـــشاشة في بعـــض مواطنه.

1. تمهيدات :

المنطق فرع من فروع الفلسفة والرياضيات يعنى بقواعد التفكير السليم. ويشتَغِل معظم الدّارسين في مجال المنطق بنوع من التفكير يُسمَّى "القضية المنطقيّة". وتتكون هذه القضية من عبارات يمكن وصفها بأنها تبدأ بمقدمة تتبعها عبارة يطلق عليها اسم "النتيجة". فإذا كانت المقدمة تُؤَيِّد النتيجة كانت القضية المنطقية صحيحة. وإذا كانت المقدمة لا تُؤيِّد النتيجة، كانت القضية المنطقية خاطئة.

والقضية المنطقية نوعان : قضية استنتاجية وقضية استقرائية . وتكون القضية الاستنتاجية صحيحة إذا كانت المقدمة والنتيجة صحيحتين معا. وإذا كانت النتيجة لا تنشأ بالضرورة عن المقدمة فإن القضية الاستنتاجية ستكون خاطئة. أما القضية الاستقرائية، فإن صحة النتيجة لا تعتمد اعتمادًا كاملاً على المقدمة. ولما كانت النتيجة في القضية الاستقرائية لا ترتبط بالضرورة بالمقدمة فالقضية الاستقرائية لا تكون صحيحة بالمقاييس الاستنتاجية.

يتيح المنطق للعلماء استنباط الاستنتاجات من المعلومات المتوفرة لديهم. فعلى سبيل المثال نجد في أواخر القرن التاسع عشر الميلادي، الفيزيائي ألماني ولهلم وين Wilhelm Wien (1864-1928) يستخدم المنطق الاستقرائي : لقد درس العلاقة بين درجة الحرارة والطاقة التي تشعها المواد السائلة والمواد الصلبة المُسخنة. وبعد دراسته للعديد من الأمثلة المُحددة، لاحظ أن حاصل ضرب درجة حرارة المادة السائلة أو الصلبة المسخنة في الطول الموجي للإشعاع ذي الشدة القصوى عند درجة الحرارة

تلك، يعطي دائما نتيجة ثابتة. وعلى الرغم من أن وين لم يستطع فحـــص كل المواد الصلبة أو السائلة فإنه استعمل المنطق الاستقرائي كي يستنتج أن هذه القيمة الثابتة عامة، بذات القيمة لكل المواد السائلة والصلبة المُــسخنة بغض النظر عن تركيبها الفيزيائي والكيميائي.

ويُعرّفنا المنطق بصحة القضية الاستنتاجية وســلامتها مــن عــدم صحتها. وتعتمد سلامة هذه القضية على شكلها، ولــيس علــى صــدق مقدمتها التي تعتبر فرضية صحيحة. ولذلك، فقد تكون القضية الاستنتاجية صحيحة بينما مقدمتها كاذبة، وقد تكون القضية الاستنتاجية غير صحيحة بينما مقدماقما صادقة.

يمتد علم المنطق الحديث ليشمل آفاقًا أرحب بكثير مما شمله عهــد أرسطو. فقد وضع علماء المنطق المُحْدَثون نظريات وأساليب لتناول القضايا الاستنتاجية على نحو يختلف عن الاستقراء المطلق. ومــن علمــاء المنطــق الحديث البارزين الرياضيان البريطانيان جــورج بُــول George Boole (1815-1864) و أَلْفــرد وايتهــد Alfred Whitehead (1861-1947)، ثم الفيلسوف البريطاني بِرْتْرانــد راســل Bertrand Russell (1872-1970). وعلى عكس المناطقة التقليديين، فقد اســتخدم هــؤلاء المناطقة الجدد مناهج حسابية وأساليب تستخدم الرموز.

ومن المهام الأساسية لعلم المنطق الحديث اختبــار مــدى ســلامة القضايا التي نعالجها. كما أن له استخدامات مهمة أيضًا في مجالات عديــدة مثل الحواسيب والدوائر الكهربائية. ولاختبار متانة قضية ما، يقــوم عــالم المنطق أولاً بتحليل عباراقا، وترجمتها إلى صيغ رمزية يكون الحرف فيها أو

الرمز يدل على كلمة أو عبارة بأكملها في حالات عديدة. فعلى سبيل المثال إذا رمز بالحرف P لمجموعة الشهداء ورمز للشهيد ديدوش مراد بـــ a فإنـــه يكتب بالرموز $a \in P$ تعبيرا عن أن ديدوش مراد شهيد من الشهداء.

والملاحظ أن جانبًا كبيرًا من التفكير لدى الناس في حياهم اليوميـــة تفكير غير استدلالي، بمعنى أنه يؤدي إلى نتائج محتَملـــة ولـــيس إلى نتـــائج مؤكدة. ومن ثم يتم التمييز مثلا بين العلـــوم الدقيقـــة (وعلـــى رأســـها الرياضيات) والعلوم الأخرى (مثل الطب والقانون...).

وفضلاً عن الاكتشافات العلمية، ظهرت أفكار جديدة عن فلـــسفة العلم وأساليبه خلال القرن السابع عشر المـــيلادي إذ اقتـــرح الفيلـــسوف والرياضي الفرنسي رينيه ديكارت René Descartes (1596-1650) أن تكون الرياضيات النموذج الذي يجب أن تحتذي به العلـــوم الأخـــرى. واعتقد أن الرياضيات أدت إلى استنتاجات مؤكدة بـــشكل مطلـــق، لأن العملية الرياضية تبدأ بحقائق بسيطة وبديهية، ومن ثم تستعمل المنطق لتنتقل خطوة فخطوة، إلى الحقائق الأخرى.

والملاحظ أن الرياضيين لا يتوانون في صياغة المخمنات (أي نتـــائج غير مبرهن عليها) عندما يعجزون عن البرهان. وبذلك يفتحون أبوابا كثيرة للبحث. فهذه مخمنة (أو نظرية) فيرما Fermat التي صاغها هذا العـــالم في وقته و لم يتوصل العلماء إلى برهانها إلا بعد مرور أزيد من ثلاثة قرون رغـــم الجهود الجبارة التي بذلها هؤلاء على امتداد تلك الفترة.

ولا ينبغي أن يتصور القارئ أن صياغة المخمنات أمر يسير فهي تتطلب موهبة ومهارة وإبداعًا. ويستند العلماء عند صياغتها على تفسيراتهم المبنية على المعلومات المتوفرة. ويسعون لصياغة المخمنات للمساعدة على تفسير وترتيب وتوحيد الحقائق المترابطة. ثم يستعملون بعد ذلك التجريب، ووسائل أخرى للتأكد من صحة مخمناتهم.

وقد نتج اكتشاف الكوكب نِبْتُون في أواسط القرن التاسع عشر الميلادي انطلاقا صياغة مخمنة؛ إذ لاحظ الفلكيون أن الكوكب أورانوس، الذي اعتبروه أبعد الكواكب، لم يكن دوماً في الموقع الذي توقعته قوانين الجاذبية والحركة. فاستنتج من ذلك بعض الفلكيين أن القوانين لا تقوم عندما يتعلق الأمر بمثل هذه المسافات الكبيرة التي تفصل الكواكب عن الشمس. ولكن آخرين افترضوا أن التغيرات في مدار أورانوس قد تكون نتيجة لقوة جذب من كوكب مجهول، وبحساب الموقع المحتمل لمثل هذا الكوكب كي يؤثر على المدار، اكتشف الفلكيون في آخر المطاف كوكب نبتون.

ويؤدي التعبير المنطقي دورا أساسيا في صياغة النتائج رياضيًا. فعلى سبيل المثال استعمل الإيطالي غاليليو Galileo Galilei (1564-1642) الرياضيات في وصف نتائج تجاربه المتعلقة بالأجسام الساقطة، وفي تحديد المسافة التي يقطعها جسم ساقط خلال فترة زمنية معينة. وقد طور العالم الإنجليزي إسحق نيوتن Isaac Newton (1643-1727) في القرن السابع عشر الميلادي، نظرية رياضية للجاذبية فسرت العديد من أنواع الحركة على الأرض وعلى مدى الكون. وفي أوائل القرن العشرين، وجد الفيزيائي ألبرت أينشتاين Albert Einstein (1879-1955) أن الكتلة

ترتبط بالطاقة وفق معادلة بسيطة $E = mc^2$ مفادها أن الطاقة E تساوي حاصل ضرب الكتلة m في مربع سرعة الضوء c^2. وقد أصبحت هذه المعادلة لاحقًا الأساس لتطوير الطاقة النووية.

هناك في المنطق ما يسمى بجدول الحقيقة، وهي طريقة لتوضيح العلاقات المنطقية. وتستخدم هذه الجداول بوجه خاص المنشغلين بالمنطق والمعلوماتية وكل من يستعمل المنطق الرمزي. ولفهم جداول الحقيقة يجب أن نفهم أولا بعض أفكار المنطق. فالجملة البيانية الأساسية هي جملة خبرية إذا كان سيصنف معناها من حيث إنها صدق أو كذب. مثال ذلك: الجملة "الباب مفتوح" و "المصباح مضيء" جملتان خبريتان.

يمكن تكوين محتوى خبريّ عند دمج عدد محدود من الجمل الخبرية. وهكذا نستطيع مثلاً دمج الجملتين الخبريتين أعلاه لتكوين محتوى خبري "سيضيء ضوء الثلاجة إذا كان البابُ مفتوحاً و لم يحترق المصباح".

إن صدق (صحة) أو كذب (خطأ) المحتوى الخبري يعتمد على إثبات أو تكذيب كل جملة خبرية أساسية، على الطريقة التي يربط بها المحتوى الجمل. إليك ما يسمى بجدول الحقيقة الخاص بالجملة "سيضيء ضوء الثلاجة إذا كان البابُ مفتوحاً و لم يحترق المصباح". لاحظ أن هذه الجملة يمكن صياغتها كالتالي : " إذا كان البابُ مفتوحاً ولم يحترق المصباح فإن ضوء الثلاجة سيضيء " (نؤكد هنا على حرف الواو الوارد في ولم والذي يسمى في المنطق **رابط الوصل**) :

فتْح الباب	**المصباح لم يحترق**	**النور مُضاءٌ**
كاذب	كاذب	كاذب
كاذب	صادق	كاذب
صادق	كاذب	كاذب
صادق	صادق	صادق

يوضح الجدول كل مجموعات القيم الصادقة والكاذبة التي يمكن إرجاعها إلى الجمل الخبرية. ويكتمل الجدول بالإشارة إلى صدق أو كذب المحتوى الخبري لكل باب في القائمة.

كيف يكتب جدول الحقيقة إذا استبدلنا واو الوصل في الجملة الخبرية " إذا كان البابُ مفتوحاً و لم يحترق المصباح فإن ضوء الثلاجة سيضيء" بـ أو؟ بمعنى أن الجملة الخبرية ستكون كالتالي : " إذا كان البابُ مفتوحاً **أو** لم يحترق المصباح فإن ضوء الثلاجة سيضيء " (نؤكد هنا على لفظ **أو** الوارد في الجملة والذي يسمى في المنطق **رابط الفصل**) :

فتْح الباب	**المصباح لم يحترق**	**النور مُضاءٌ**
كاذب	كاذب	كاذب
كاذب	صادق	صادق
صادق	كاذب	صادق
صادق	صادق	صادق

2. تعاريف

دعنا الآن ندقق بعض التعاريف الرياضية في باب المنطق.

تعريف (القضية)

نسمي قضية كل عبارة (جملة) تحتمل الصحة أو الخطأ.

كما يمكن القول إننا نسمي قضية كل جملة صحيحة لغويا يمكن الحكم على صحة معناها من عدمه.

أمثلة

1 . العدد 4 زوجي. قضية صحيحة.

2. "العبارة $5 < 8$" قضية، وهي قضية خاطئة.

3. "الرباط عاصمة المغرب" قضية، وهي قضية صحيحة.

4. "بيروت عاصمة إسبانيا". قضية خاطئة.

5. " يوجد عدد x يحقق المساواة $x^2 = y$ " عبارة لا تمثّل قضية لأننا لا نستطيع البت في صحتها أو خطئها ما لم نُزَوِّد بتوضيحات إضافية حول الرمزين x و y .

ملاحظة :

لاحظ أن بعض القضايا في الرياضيات تضم متغيرات، وينبغي الحصول على معلومات إضافية للبت في صحتها.

تعريف (نفي القضية)

نفي قضية P هي القضية التي تكون صحيحة عندما تكون P خاطئة، وتكون خاطئة عندما تكون P صحيحة.
نرمز غالبا لنفي القضية P بـــ $\overline{P}$.

لاحظ أن نفي يكون بعدة أدوات نفي في اللغة العربية منها لا، ليس، غير،...

مثال

1. نفي القضية "الرباط عاصمة المغرب" هي " الرباط ليست عاصمة المغرب".

2. إذا كان x عددا حقيقيا فإن نفي القضية "$x \leq 2$" (أي x أصغر من **2** أو يساويه) هو "$x > 2$" (أي x أكبر تماما من **2**).

أما نفي القضية "$x < 2$" (أي x أصغر تماما من **2**) فهو "$x \geq 2$" (أي x أكبر من **2** أو يساويه).

3. نمثّل عادة العلاقة بين قضية ونفيها بجدول كما يلي، حيث يرمز 1 لصحة القضايا و 0 لخطئها :

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

تعريف (الوصل)

لتكن P و Q قضيتين. وصل القضيتين P و Q هو القضية، ذات الرمز $P \wedge Q$، التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت كل من P و Q صحيحة. إذا كان وصل القضيتين P و Q خاطئا قلنا إن P و Q متناقضتان (أو غير منسجمتين).

ملاحظة

نلاحظ أن التعريف السابقة يؤدي إلى أن قضية الوصل $P \wedge Q$ خاطئة في كل حالة من الحالات التالية :

1. إذا كانت P خاطئة.
2. إذا كانت Q خاطئة.
3. إذا كانت كلّ من P و Q خاطئة.

وبالتالي **فجدول حقيقة رابط الوصل** هو

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال

نعتبر القضيتين $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ التاليتين حيث $\boldsymbol{x}$ عدد حقيقي:

$P\ :\ x \geq 3$ ،

$Q\ :\ x \leq 3$.

عندئذ تكون قضية الوصل $P \wedge Q$ هي $x = 3$.

تعريف (الفصل)

لتكن P و Q قضيتين. فصل القضيتين P و Q هو القضية، ذات الرمز $P \vee Q$ ، التي تكون صحيحة إذا صحت إحدى القضيتين P و Q أو كلاهم.

ملاحظة

نلاحظ أن التعريف السابق يؤدي إلى أن قضية الفصل $P \vee Q$ خاطئة إذا كانت كلّ من القضيتين P و Q خاطئة، وفي ما عدا ذلك فإن القضية $P \vee Q$ صحيحة.

مثال

نعتبر القضيتين $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ التاليتين حيث $\boldsymbol{x}$ عدد حقيقي:

$P\ :\ x > 3$ ،

$Q\ :\ x < 3$.

عندئذ تكون قضية الوصل $P \vee Q$ هي $x \neq 3$.

وبالتالي **فجدول حقيقة رابط الفصل** هو

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ملاحظة

هناك أيضا رابط ثالث يسمى **الرابط المانع** (أو **الفصل الإقصائي**) عندما تكون لدينا قضيتان P و Q إن صحة القضية المستنتجة لا تكون إلا إذا صحت إحدى القضيتين P و Q دون الأخرى : بمعنى إذا صحت P فإن Q خاطئة وإذا صحت Q فإن P خاطئة.

وإذا مثلنا ذلك في جدول حقيقة فسيكون هذا الجدول على النحو التالي

P	Q	P مربوطة برابط مانع مع Q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

تعريف (الاستلزام)

لتكن P و Q قضيتين. نرمز للقضية $\overline{P} \vee Q$ بـــ $P \Rightarrow Q$، ونسميها استلزاما ونقرأها P تستلزم Q

ملاحظات

1) نجد في بعض الكتب لفظ "يقتضي" بدل "يستلزم".

2) لاحظ أن الاستلزام "علاقة" متعدية، بمعنى أن

$$\left((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\right) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

وبعبارة أخرى : إن كانت القضية P تقضي قيام القضية Q وكانت القضية Q تقتضي قيام القضية R فإن القضية P تقتضي القضية R .

3) لاحظ أن من مآخذ الاستلزام أنه يسمح بكتابة $1=2 \Rightarrow 2=3$ "دون حياء" إذ أن $\overline{P} \vee Q$ تعني هنا أن المطلوب هو صحة إحدى القضيتين $1 \neq 2$ أو $2=3$. ولما كانت القضية $1 \neq 2$ صحيحة فإن $1=2 \Rightarrow 2=3$! نعبّر عن ذلك أحيانا بالقول إن" الخاطئ يستلزم الخاطئ" (كما يستلزم الصحيح أيضا) ... خلافا لـــ "الصحيح" فهو لا يستلزم إلا "الصحيح".

لرؤية ذلك افترض أن P صحيحة. حينئذ تكون $\overline{P}$ خاطئة. وعليه إذا افترضنا أن "$P \Rightarrow Q$" صحيحة، أي أن القضية $\overline{P} \vee Q$ صحيحة (علما أن $\overline{P}$ خاطئة) فلا بد أن تكون Q صحيحة. خلاصة القول إن الانطلاق من صحة P يؤدي حتما إلى صحة Q.

ومن جهة أخرى نلاحظ أن هناك جانبا شكليا (صوريا) واضحا في مسألة "الاستلزام" : إذا كانت القضية P تعني أن "القاهرة عاصمة مصر" والقضية Q تعني "$3=3$" فمن الواضح أن $P \Rightarrow Q$ لأن $\overline{P} \vee Q$ صحيحة رغم أن موقع القاهرة لا علاقة له بالعدد 3.

كما أننا لو نعتبر القضية R القائلة "القاهرة عاصمة بيروت" وكانت S أية قضية فسنجد أن $R \Rightarrow S$ لأن $\overline{R} \vee S$ صحيحة... من حسن الحظ أننا لا نستعمل المنطق الرياضي في هذا السياق العبثي !

4) **جدول الحقيقة للاستلزام** هو

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

تعريف (التكافؤ)

لتكن P و Q قضيتين. نقول إن P و Q متكافئتان إذا كانت P تستلزم Q و Q تستلزم P.

الكتابة $P \Leftrightarrow Q$ هي الرمز المعبِّر عن تكافؤ القضيتين P و Q.

ملاحظة

1) في التعابير اللغوية نستخدم أحيانا بدل فعل "يكافئ" فعل "يعني" أو لفظ "أي".

2) نلاحظ أن تكافؤ قضيتين يعني أنهما صحيحتان معا أو خاطئتان معا، ولا يمكن أن تصح أحدهما دون الأخرى.

3) لدينا $P \Leftrightarrow \overline{(\overline{P})}$ من أجل كل قضية P، أي أن نفي نفي قضية يكافئ تلك القضية.

4) لاحظ أن التكافؤ "علاقة" متعدية، بمعنى أن

$$((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R).$$

5) لدينا : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ من أجل قضيتين P و Q.

6) جدول الحقيقة للتكافؤ هو :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

مثال

باستعمال جدول الحقيقة نثبت أن $\overline{P} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow \overline{P \vee Q}$.

يكفي التأمل في الجدولين التاليين :

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

والجدول

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

وملاحظة أن العمود الأيمن في الجدول الأول مطابق للعمود الأيمن في الجدول الثاني... وهذا هو معنى التكافؤ.

نظرية (توزيع الفصل والوصل)

لتكن P و Q و R ثلاث قضايا. لدينا التكافؤان التاليان:

1) توزيع الفصل على الوصل:

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

2) توزيع الوصل على الفصل:

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

تمرين

لتكن P و Q قضيتين. نعرّف الرابط المانع كما أسلفنا التي نرمز لها بـــ ρ، كما يلي:

تكون $P\rho Q$ إذا وفقط إذا صحت إحدى الحالتين التاليتين :

- الحالة الأولى: P صحيحة و Q خاطئة،
- الحالة الثانية: P خاطئة و Q صحيحة.

1) اكتب جدول الحقيقة لـــ "ρ".

2) نعتبر ثلاث قضايا P، Q ، R . أثبت أن:

$$P\rho\,(Q\,\rho R) \;\Leftrightarrow\; (P\rho Q)\,\rho R$$

الحل

1) سبق وأن كتبنا الجدول المطلوب، وهو:

P	Q	$P\rho Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2) يكفي أن نكتب جدول $P\rho\,(Q\,\rho R)$

P	Q	R	$Q\rho R$	$P\rho(Q\rho R)$
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1

ثم جدول $(P\rho Q)\rho R$

P	Q	R	$P\rho Q$	$(P\rho Q)\rho R$
1	1	1	0	1
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1

وبعد ذلك نقارن العمودين الأيمنين في الجدولين فنلاحظ أنهما متطابقـــان، وهو ما يثبت التكافؤ $(P\rho Q)\rho R \;\Leftrightarrow\; P\rho\,(Q\rho R)$ المطلوب.

3. الجملة المفتوحة والمكممات

نسمي جملة مفتوحة كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة بحيث يصبح هذا النص قضية كلما حددنا قيمة المتغير.

أمثلة

1. x عدد طبيعي و $x \geq 5$. هذه جملة مفتوحة تكون قضية إذا اعتبرنا مثلا $x = 18$. والقضية تكون عندئذ صحيحة. أما إذا اعتبرنا مثلا $x = 3$ فتكون الجملة قضية خاطئة.

2. x عاصمة عربية و x تقع على ساحل البحر الأبيض المتوسط. هـــذه جملة مفتوحة تكون قضية إذا اعتبرنا مثلا x هي القاهرة. والقضية تكـــون عندئذ صحيحة. نفس الحالة عندما تختار x هي بيروت أو تونس. أمـــا إذا

اعتبرنا مثلا x هي الرياض فتكون الجملة قضية خاطئة. نفس الحالة عندما نختار x هي نواقشط أو الخرطوم أو أبوظبي.

نستعمل في الرياضيات مكممين هما "مهما كان" و"يوجد" ويسمى الأول "المكمم الكلي" ويسمى "المكمم الوجودي".

نقول مثلا : "مهما كان العدد الطبيعي x فإن $x \geq 0$". نستطيع أن نكتب هذه الجملة رمزيا بالإشارة إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بـــ $\mathbb{N}$ وباستخدام رمز "الانتماء" $\in$ (انتماء عنصر لمجموعة) ورمز "مهما كـان"، وهو $\forall$. الجملة تكتب باستعمـال كل هذه الرموز على النحو التالي:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0.$$

نلاحظ أن هذه الجملة قضية... كما نلاحظ أنها قضية صحيحة.

أما إذا كتبنا "مهما كان العدد الطبيعي x فإن $x \geq 5$". وبالكتابة الرمزية :

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 5.$$

فسنكون أمام قضية خاطئة لأن العدد 4 مثلا عدد طبيعي، غير أنه لا يحقق الشرط القائل إنه أكبر من 5.

وإذا قلنا مثلا: "يوجد عدد الطبيعي x بحيث $x \geq 5$". نستطيع أن نكتب هذه الجملة رمزيا بالإشارة إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بـــ $\mathbb{N}$ وباستخدام رمز "الانتماء" $\in$ (انتماء عنصر لمجموعة) ورمز "يوجد"، وهو $\exists$. الجملة تكتب باستعمال كل هذه الرموز على النحو التالي :

$$\exists x \in \mathbb{N} : x \geq 5.$$

نلاحظ أن هذه الجملة قضية كما نلاحظ أنها قضية صحيحة.

أما إذا كتبنا "يوجد عدد طبيعي x بحيث $4 < x < 5$"، وبالكتابة الرمزية :

$$\exists x \in \mathbb{N} : 4 > x > 5.$$

فسنكون أمام قضية خاطئة لأنه لا يوجد عدد طبيعي محصور تماما بين العددين 4 و 5.

نفي المكمم الكلي هو المكمم الوجودي ونفي المكمم الوجود هو المكمم الكلي.

أمثلة

1. نفي القضية

$$\exists x \in \mathbb{N} : x \geq 5$$

هو

$$\forall x \in \mathbb{N} : x < 5$$

وتقرأ : "مهما كان العدد الطبيعي x فإن $x < 5$". وهي قضية خاطئة.

القاعدة العامة تقول : إن كانت قضية صحيحة فنفيها سيكون قضية خاطئة. وبالمثل، إن كانت قضية خاطئة فنفيها سيكون قضية صحيحة.

ولذلك كان متوقعا أن تكون القضية "$\forall x \in \mathbb{N} : x < 5$" خاطئة لأننا كنا نعلم أن القضية قبل نفيها (وهي "$\exists x \in \mathbb{N} : x \geq 5$") كانت صحيحة.

2. نفي القضية

$$\forall x \in \mathbb{N} : 4 \leq x$$

هو

$$\exists x \in \mathbb{N} : 4 > x$$

وتقرأ : "يوجد عدد طبيعي x بحيث $x < 4$. وهي صحيحة، مثال ذلك العدد 3 عدد طبيعي وهو أصغر من 4.

4. هشاشة المنطق الرياضي

ليس هناك تعريف رياضي دقيق للبرهان المنبثق عن المنطق الرياضي، لكننا نستطيع وصفه بأنه استدلال يسمح بتوضيح صحة قضية، أو قضايا، انطلاقا من خواص وقضايا مثبتة أو مسلّم بها. ويمكن بعد ذلك ضم القضية التي تم توضيحها إلى الفرضيات ومواصلة الاستدلال من أجل إثبات قضايا أخرى. وفي كل الأحوال، فالبرهان مبني على المنطق الرياضي، ولذا لا يمكن "الطعن فيه" إن لم يكن به خلل منطقي. لكنه من الجائز الطعن في الفرضيات التي ننطلق منها لأداء البرهان.

وقد تفنّن أساتذة الرياضيات في عرض براهينهم على السبّورة أمام تلاميذهم وطلابهم، وذلك بهدف تفادي المشاكل التي قد تنجرّ عن برهان كامل و"واضح"! وهكذا نجد أحدهم يقدم برهانا بمثال ... كأن يكتفي خلال عرض برهان نظرية عامة بإثبات حالة خاصة منها، ثم يقول : "لا داعي لإثبات الحالة العامة لأن العناصر الأساسية موجودة في هذه الحالة الخاصة"!

والواقع أن هناك، في كل برهان على نتيجة رياضية، لحظة صمت تأتي في لحظة حاسمة لأن إدراك البرهان يتطلب منا دائما إدراك نتيجة بديهية. لكن علينا ألا نفهم من لفظ "بديهي" السهولة والوضوح، بل يمكن التأكيد بأنه كلما زاد تجريد نظرية كلما زاد دور "البداهة".

وخلافا لما هو متداول فلفظ "بديهي" في الرياضيات يستخدم عموما عندما نعجز عن تقديم المزيد من التوضيحات للمستمع؛ ولا تعني "البداهة" أن الأمر الذي نريد إثباته مرئي، وإنما نطلب بذلك من المتتبع أن

يبذل المزيد من الجهد الشخصي والتفكير المركز للاقتناع بصحته ويدرك بمفرده بقية الموضوع : نحن نصمت ونتوقف عن تقديم المزيد من التوضيحات في اللحظة التي ينبغي على المستمع بذل الجهد الشخصي للاقتناع. ذلك أن خطاب الرياضيات يتميز بخاصة غريبة : إنه خطاب يقنع لحظة الكفّ عن الكلام. أليس في ذلك برهان على وجود هشاشة في الرياضيات؟ إن الرياضيات ليست بالدقة التي نتصورها وليست متينة الأساس كما يزعم الزاعمون !

وإذا عدنا إلى تعريف البرهان في الرياضيات فإننا نجده مرتبطا بالمنطق حيث أن ما يميّز الرياضيات هو رفضها لكل نتيجة لم تثبت ببرهان منطقي. ولسوء الحظ فإن الفكر المنطقي ليس فكرا سائدا لدى عامة الناس ولا يتميّز بالسهولة. وأحسن دليل على ذلك أن الكثير من معتقداتنا الشخصية لم تخضع لرقابتنا "المنطقية". ما الذي يجعلنا نؤمن مثلا بأن الأرض تدور حول نفسها وحول الشمس؟ ألا يرجع ذلك الإيمان إلى ثقتنا في أقوال أساتذتنا وعلمائنا؟ ألم تعش البشرية زمنا طويلا وهي تؤمن إيمانا راسخا بأن الأرض ثابتة لا تدور ... بناء على أقوال علمائها آنذاك؟!

ولعل ما يزيد في توضيح الإشكالية التي تحيط بتعريف معنى "البرهان" الحوار الموالي الذي تصوّره الرياضيان ب. ج. ديفس Davis وَ ر. هارش Hersh. (ورد هذا الحوار في كنابهما الشهير :

Davis P. J, Herch R.: The Mathematical experience, Birkhauser, Boston 1982.

يدور هذا الحوار الطريف بين أستاذ مثالي لمادة الرياضيات وطالب في قسم الفلسفة:

الطالب: سيدي، ما هو "البرهان"؟

الأستاذ: ألا تعرف ذلك؟ في أية سنة تدرس؟

الطالب: في السنة الثالثة.

الأستاذ: هذا لا يصدّق**!** البرهان هو ما رأيتني أقوم به أمامك على السبّورة ثلاث مرات أسبوعيا خلال ثلاث سنوات**!** ... ذلك هو البرهان.

الطالب: آسف سيدي. عليّ أن أوضح بأني أدرس الفلسفة وليس الرياضيات ... و لم يسبق لي أن حضرت دروسكم.

الأستاذ: لا بأس**!** في هذه الحالة، لا بد أنك درست قليلا من الرياضيات، أليس كذلك؟ ألا تعرف برهان النظرية الأساسية في التحليل أو برهان النظرية الأساسية في الجبر؟

الطالب: أطلعت على استدلالات في الهندسة والجبر والتحليل كانت تسمى براهين. لكن ما أطلبه منكم ليس أمثلة لبراهين بل أودّ تعريفا لمفهوم «البرهان"... وإلا كيف يمكنني الاقتناع بأن هذه الأمثلة صحيحة؟

الأستاذ: نعم. كانت هذه القضية قد هيكلها العالِم المنطقي ألفرد تارسكي Tarski (1902-1983) حسب علمي، وشاركه في ذلك آخرون مثل برترند روسل Russel (1872-1970) وجيوزيبي بيانو Peano (1858-1932) ... هذا ليس مهمّا. إن ما ينبغي أن نقوم به هو التعبير عن مسلّمات (بديهيات) نظريتك بلغة شكلية (صورية) وذلك باستخدام قائمة معيّنة من الرموز والحروف. وبعد ذلك تكتب فرضيات القضية التي تريد البرهان عليها باستعمال الرموز المشار إليها آنفا. عندئذ،

تثبت أنك تستطيع التحوّل خطوة خطوة بفرضياتك (بفضل قواعد المنطق) إلى أن تصل إلى النتيجة المطلوبة. ذلك ما يسمى برهانا ! أفهمت؟

الطالب: أهذا كل ما في الأمر؟ عجيب! لقد تعلّمت التحليل الأولي والعالي والجبر العام والطبولوجيا ... لكني لم أر أبدا ما ذكرتم لي الآن.

الأستاذ: بطبيعة الحال، فليس هناك من يقوم بكل هذا من أوّله إلى آخره ... ذلك يتطلب وقتا طويلا. عليك فقط أن تثبت بأنك قادر على القيام به ... هذا يكفي!

الطالب: هذا أيضا لا يشبه ما يوجد في دروسي وفي كتبي ... الواقع أن الرياضيين لا يقدّمون براهين!

الأستاذ: كيف؟! إننا نقدّم براهين، وإذا لم يتم البرهان على نظرية فهي لا تساوي شيئا.

الطالب: إذن، ما البرهان؟ إذا كان البرهان هو لغة شكلية وقوانين تحويل فلا يمكن لأيّ كان أن يبرهن على شيء. هل ينبغي معرفة كل شيء حول اللغات الشكلية والمنطق الشكلي (الصوري) قبل الإقبال على تقديم برهان رياضي؟

الأستاذ: طبعا، لا! فبقدر ما يزداد جهلك بهذه الأمور بقدر ما يكون ذلك في صالحك! وعلى كل حال، فهي عبارة عن حيل مجرّدة غير ملموسة.

الطالب: إن كان الأمر كذلك ... فما البرهان بالضبط؟!

الأستاذ: آه ... البرهان هو استدلال يقنع أيّ شخص ملمّ بالموضوع!

الطالب: "أيّ شخص ملمّ بالموضوع"! هذا يعني أن تعريف البرهان تعريف نسبي ... فهو متعلّق بالأشخاص المهتمين بالموضوع. وهكذا، قبل أن نثبت فيما إذا كان أمر ما برهانا أم لا، لا بد أن نقرّر من سيكون الحكَم! ما علاقة هذا الكلام بالبرهان على نظرية؟!

الأستاذ: لقد ابتعدتَ كثيرا عن الموضوع! ليست هناك نسبية فيما قلته لك ... فكل الناس يعرفون ما هو البرهان ... اقرأ فقط بعض الكتب وتابع دروس رياضي كفء وستفهم!

الطالب: أأنتم متأكدون مما تقولون؟

الأستاذ: آه... من الممكن أن لا تفهم إن لم تكن موهوبا!... فهذه الحالة تحدث أحيانا.

الطالب: خلاصة قولكم أنكم تقرّرون – أنتم – ما هو البرهان؛ وإذا لم أتعلّم أنا كيف أقرّر وأحكم وفق طريقتكم فأنتم تقرّرون أني لست موهوبا!

الأستاذ: إذا لم أقم أنا بذلك فمن عساه يؤدي هذا الدور؟!

لا شك أن المتأمل في هذا الحوار يدرك أن إثبات متانة البرهان الرياضي ليس بالأمر الهيّن. غير أن ذلك لا يمنعنا من استغلال المنطق الرياضي بكل ما نستطيع في أمور حياتنا.

II

الأعداد العشرية

الكســـور

نقدم في هذا الفصل العديد من المواضيع المتعلقة بالكسور. فنتعرف في البداية على مصطلحاتها ثم نبحث عن كيفية القيام بالعمليـــات الأربعـــة عندما نجري تلك العمليات على الكسور.

كما نستعرض موضوع النسبة والتناسب مقـــدمين العديـــد مـــن الأمثلة. ونتناول بعد ذلك مفهوم النسبة المئوية مشيرين إلى أمثلـــة عمليـــة. وينتهي الفصل بتمارين متنوعة حول الكسور.

❖ الكسور

الكسـر جزء من شيء. وعندما تقاس الأشياء، فناتج القيـاس لا يساوي وحدات كاملة في أغلب الأحوال. وعلى سبيل المثال، يمكن أن يزن كتاب ما بين اثنين وثلاثة كلغ، فما زاد عن كيلوغرامين يكـون كـسرًا لوحدة الكيلوغرام. ويمكن أن يتراوح طول لوحة بين 10 و11 سم فيكون طولها 10 سم زائدًا كسرًا من وحدة القياس (وهي السنتيمتر هنا).

تنتج الكسور من تقسيم وحدة إلى عدد من الأجـزاء المتـساوية. ويمكن تقسيم الوحدة إلى أي عدد من الأجزاء. فإذا كـسرت عـصا إلى قطعتين، فلن تحصل بالضرورة على نصفين للعصا. وللحصول على نـصفين للعصا، عليك أن تكسرها إلى قطعتين متساويتي الطول.

تكتب الكسور بصورة عددية على شكل عددين يفصلهما خط أفقي على النحو : $\frac{2}{5}$ وأحيانا تكتب أفقيا على الشكل 5/2 أو 2÷5 ونقرأ 2 على 5 أو 2 تقسيم 5...

وتستخدم صيغة الكسر بهدف :

1. التعبير عن قسمة : يمكن أن يشير الكسر $\frac{2}{5}$ إلى قسمة 2 على 5، كتقسيم قطعتين من الحلوى بالتساوي على خمسة أشخاص مثلاً.

2. تمثيل نسبة : النسبة مقارنة بين كميتين قيستا بنفس الوحدات. ويمكـن للنسبة أن تقارن جزءا إلى الكل أو جزءا إلى جزء آخر. مثـال ذلـك : إذا كان فريق مسابقة مؤلفًا من بنتين وثلاثة أولاد، فتكون نسبة البنات مقارنة

بمجموع أفراد الفريق هي $\frac{2}{5}$. وتكون نسبة البنات مقارنة بجملة عدد الأولاد هي $\frac{2}{3}$.

3. الدلالة على معدّل : المعدّل هو العلاقة بين كميتين قيستا بوحدات مختلفة. مثال ذلك : يمكن لفريق كرة سلة تسجيل أهداف بمعدل هدفين في كل خمس دقائق من اللعب.

1. مصطلحات

لنتعرف الآن على بعض مصطلحات الكسور.

– **البسط** : هو العدد المكتوب فوق الخط الأفقي في الكسر.

مثال : في الكسر $\frac{2}{5}$ البسط هو العدد 2.

– **المقام** : هو العدد المكتوب تحت الخط الأفقي في الكسر.

مثال : في الكسر $\frac{2}{5}$ المقام هو 5.

– **حدّ كسر** : هو بسط الكسر أو مقامه.

– **اختصار كسر** : هو كتابة الكسر في شكل أبسط بقسمة (أو ضرب) البسط والمقام على نفس العدد. وهذا يعني تحويله إلى كسر آخر مكافئ له بحيث يقل كل من البسط والمقام عن نظيريهما في الكسر الأول. ولكن تظل قيمة الكسر الجديد مساوية لقيمة الكسر القديم.

– **تحويل الكسر**: هو تغيير في شكل الكسر وليس في قيمته، وغالبا ما يتم ذلك بقسمة أو ضرب بسط الكسر ومقامه في نفس العدد.

مثال : يمكن تحويل الكسر $\frac{2}{5}$ إلى $\frac{4}{10}$ وذلك بضرب كل من البسط والمقام في 2. نلاحظ أن العدد 0.4 يمثل كتابة أخرى لنفس العدد الذي يمثله الكسر.

– **تكافؤ الكسور** : نقول عن كسرين إنهما متكافئان إذا اختلف البسط فيهما وكذلك المقام، بينما يمثل الكسران الجزء ذاته من الكل.

ملاحظة

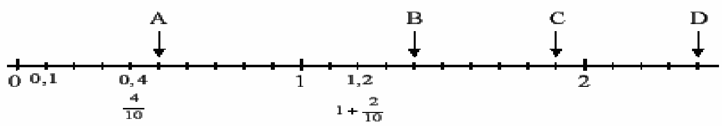
لاحظ الرسمين التاليين المكوّنين من مربعين متساويين في المساحة.

لقد قُسم المربع الأيمن إلى 16 مربعا صغيرا، وغطيت منها 6 مربعات. وبالتالي غطي منها $\frac{6}{16}$. وقسم المربع الأيسر إلى 8 مستطيلات متساوية وغطيت منها 3 مستطيلات. وبالتالي غطي منها $\frac{3}{8}$. وعندما نتأمل في الشكلين نجد أن المساحة المغطاة في المربع الأيمن تساوي المساحة المغطاة في المربع الأيسر. بمعنى أن الكسرين $\frac{6}{16}$ و $\frac{3}{8}$ المعبّرين عن التغطيتين متكافئان.

ولذا نكتب : $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$.

تمرين

لنعتبر نصف مستقيم مدرج كما هو مبين في الرسم.



لقد عيّنا نقاطا أربع هي A، B، C، D.

عيّن الأعداد الكسرية التي تمثلها هذه النقاط وقدم كسورا متكافئة تمثل كلا من هذه النقاط.

الجواب

– النقطة A : العدد الذي يمثل هذه النقطة هو $\frac{5}{10}$ أي 0.5. يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لــ $\frac{5}{10}$ مثل $\mathbf{\frac{1}{2}}$، $\mathbf{\frac{2}{4}}$، $\mathbf{\frac{6}{12}}$، $\mathbf{\frac{100}{200}}$، $\mathbf{\frac{362}{424}}$، إلخ.

– النقطة B : العدد الذي يمثل هذه النقطة هــو $1+\frac{4}{10}$ أي $\mathbf{\frac{14}{10}}$ أو 1.4.
يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لــ $\frac{7}{5}$ مثل $\mathbf{\frac{21}{15}}$، $\mathbf{\frac{28}{20}}$، $\mathbf{\frac{49}{35}}$، إلخ.

– النقطة C : العدد الذي يمثل هذه النقطة هــو $1+\frac{9}{10}$ أي $\mathbf{\frac{19}{10}}$ أو 1.9.
يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لــ $\frac{19}{10}$ مثل $\mathbf{\frac{38}{20}}$، $\mathbf{\frac{57}{30}}$، $\mathbf{\frac{152}{70}}$، إلخ.

– النقطة D : العدد الذي يمثل هذه النقطة هــو $2+\frac{4}{10}$ أي $\mathbf{\frac{24}{10}}$ أو 2.4.
يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لــ $\frac{24}{10}$ مثل $\mathbf{\frac{12}{5}}$، $\mathbf{\frac{48}{20}}$، $\mathbf{\frac{120}{50}}$، إلخ.

– **قيمة الكسر**: هي العدد الذي يمثله الكسر. فالكسور المتكافئة مثل $\mathbf{\frac{2}{5}}$ و $\mathbf{\frac{4}{10}}$ و $\mathbf{\frac{10}{25}}$ و $\mathbf{\frac{40}{100}}$ لها نفس القيمة وتمثل نفس العدد.

– **الكسر العشري** : هو كل كسر يمكن أن يكون مكافئا لكسر مقامه 10 أو قوى لــ 10 (أي 10 مضروبة في نفسها عددا من المرات، مثل 100 و 1000، إلخ.).

مثال ذلك : الكسر $\frac{2}{5}$ هو عشري لأنه يكافئ $\frac{4}{10}$، (يكفي أن نـــضرب بسطه ومقامه في 2). أما الكسر $\frac{4}{7}$ فليس عشريا لأننا لا نستطيع إيجـــاد عدد نضربه في 7 فنجد قوى لـــ 10.

– **توحيد المقامات** : توحيد مقامي كسرين يعني إيجاد كسرين لهما نفـــس المقام وكل منهما يكافئ أحد الكسرين المعطيين.

مثال ذلك : إذا أردنا توحيد مقامي الكسرين $\frac{2}{5}$ و $\frac{7}{6}$ يكفي أن نلاحـــظ أن $\frac{2}{5}$ يكافئ $\frac{12}{30}$ (بعد ضرب البسط والمقام في 6) وأن $\frac{7}{6}$ يكـــافئ $\frac{35}{30}$ (بعد ضرب البسط والمقام في 5). نلاحظ أن $\frac{12}{30}$ و $\frac{35}{30}$ يكافئـــان علـــى التوالي الكسرين $\frac{2}{5}$ و $\frac{7}{6}$ وأن لهما نفس المقام 30.

– **مقارنة الكسور** : لمقارنة كسرين نوحّد المقامين ونعتبر أن الأكـــبر مـــن الكسرين هو الكسر الذي له أكبر بسط.

مثال ذلك : أيهما أكبر $\frac{2}{3}$ أو $\frac{7}{4}$؟

نوحد المقامين فنجد : $\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$ ، $\frac{7}{4}=\frac{7\times3}{4\times3}=\frac{21}{12}$.

فنلاحظ أن بسط $\frac{21}{12}$ أكبر من بسط $\frac{8}{12}$. وبالتالي فإن $\frac{21}{12}$ أكبر من $\frac{8}{12}$، أي أن $\frac{7}{4}$ أكبر من $\frac{2}{3}$.

تمرين

قارن الكسور التالية :

$$\frac{5}{8}\text{، } \frac{5}{4}\text{ ، } \frac{3}{15}\text{ ، } \frac{9}{18}\text{، } \frac{45}{3}.$$

الجواب

نوحد المقامات فنلاحظ أنه من الممكن بعد الاختزال جعل العدد 40 مقاما مشتركا :

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times5}{8\times5}=\frac{25}{40}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{5\times10}{4\times10}=\frac{50}{40}$$

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=\frac{1\times8}{5\times8}=\frac{5}{40}$$

$$\frac{9}{18}=\frac{1\times20}{2\times20}=\frac{20}{40}$$

$$\frac{45}{3}=\frac{15}{1}=\frac{15\times40}{1\times40}=\frac{600}{40}.$$

ثم نلاحظ حسب مقارنة البسوط أن

$$\frac{5}{40}<\frac{20}{40}<\frac{25}{40}<\frac{50}{40}<\frac{600}{40}.$$

وبالتالي، وحسب المساويات السابقة، نجد :

$$\frac{3}{15}<\frac{9}{18}<\frac{5}{8}<\frac{5}{4}<\frac{600}{40}.$$

2. عمليات على الكسور

* **جمع وطرح** الكسور

كي تجمع أو تطرح كسرين لهما مقامان مختلفان، حوِّل أولا الكسرين إلى كسرين مكافئين لهما بحيث يكون للكسرين الجديدين مقام مشترك. ثم اجمع البسطين أو اطرحهما وحافظ على نفس المقام .

مثال ذلك : حساب المجموع $\frac{3}{10}+\frac{5}{8}$ والفرق $\frac{3}{10}-\frac{5}{8}$.

يوضح السطران المواليان المجموع والفارق، وكذا تفاصيل الحسابات :

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{10}=\frac{5\times5}{8\times5}+\frac{3\times4}{10\times4}=\frac{25}{40}+\frac{12}{40}=\frac{25+12}{40}=\frac{37}{40}$$

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{10}=\frac{5\times5}{8\times5}-\frac{3\times4}{10\times4}=\frac{25}{40}-\frac{12}{40}=\frac{25-12}{40}=\frac{13}{40}\,.$$

* **ضرب** الكسور

جداء كسرين هو كسر بسطه يساوي جداء البسطين ومقامه يساوي جداء المقامين.

مثال ذلك : حساب الجداء $\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}$.

يتم حساب الجداء كما يلي :

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}=\frac{5\times3}{8\times10}=\frac{15}{80}\,.$$

* حاصل **قسمة** كسرين

حاصل قسمة كسرين هو كسر يساوي جداء الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني.

مثال ذلك : حساب نسبة الكسرين $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{10}}$.

يتم هذا الحساب كما يلي :

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{10}}=\frac{5}{8}\times\frac{10}{3}=\frac{50}{24}\,.$$

نلاحظ بعد الاختزال أن $\frac{50}{24}=\frac{25}{12}$. وبالتالي فإن $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{10}}=\frac{25}{12}$

ملاحظة

يمكن أحيانا جعل عملية ضرب أو طرح أو قسمة الكسور أكثر سهولة وذلك بالقيام أولا بالاختصار كما في الأمثلة التالية.

* احسب المجموع $\frac{5}{10}+\frac{18}{12}$.

– عملية الجمع دون اختصار مسبق :

$$\frac{5}{10}+\frac{18}{12}=\frac{5\times6}{10\times6}+\frac{18\times5}{12\times5}=\frac{30}{60}+\frac{90}{60}=\frac{120}{60}=2\,.$$

– عملية الجمع باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{5}{10}+\frac{18}{12}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2\,.$$

* احسب الفارق $\frac{18}{12}-\frac{5}{10}$.

– عملية الطرح دون اختصار مسبق :

$$\frac{18}{12}-\frac{5}{10}=\frac{18\times5}{12\times5}-\frac{5\times6}{10\times6}=\frac{90}{60}-\frac{30}{60}=\frac{60}{60}=1\,.$$

– عملية الجمع باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{18}{12}-\frac{5}{10}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1\,.$$

* احسب الجداء $\frac{18}{12}\times\frac{5}{10}$.

– عملية الضرب دون اختصار مسبق :

$$\frac{18}{12}\times\frac{5}{10}=\frac{18\times5}{12\times10}=\frac{90}{120}=\frac{10\times3\times3}{10\times3\times4}=\frac{3}{4}\,.$$

– عملية الضرب باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{18}{12}\times\frac{5}{10}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\,.$$

* احسب نسبة الكسرين $\dfrac{\frac{18}{12}}{\frac{5}{10}}$.

– عملية القسمة دون اختصار مسبق :

$$\dfrac{\frac{18}{12}}{\frac{5}{10}} = \frac{18}{12} \times \frac{10}{5} = \frac{180}{60} = 3 .$$

– عملية الضرب باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\dfrac{\frac{18}{12}}{\frac{5}{10}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 3 \quad .$$

3. العوامل الأولية

1. **تفكيك عدد إلى عوامل** : إذا كتب عدد طبيعي على شكل جداء أعداد طبيعية، فإن هذه الأعداد تسمى عوامل، ونقول إننا فككنا العدد إلى عوامل.

أمثلة

في الكتابة $\mathbf{7 \times 2 = 14}$ نقول إننا فككنا العدد 14 إلى عاملين هما 2 و 7.

وفي الكتابة $\mathbf{9 \times 6 = 54}$ نقول إننا فككنا العدد 54 إلى عاملين هما 6 و 9.

وفي الكتابة $\mathbf{9 \times 4 \times 2 = 72}$ نقول إننا فككنا العدد 72 إلى 3 عوامل هي 2 و 4 و 9.

2. الأعداد الأولية : كل عدد طبيعي، فيما عدا الواحد، يمكن تقــديره كحاصل ضرب عاملين على الأقل. والعدد الذي له عاملان مختلفان فقط ــ العدد نفسه والعدد 1 يُسمى **عددًا أوليا**. فالعدد 7 عدد أوَّلي لأن عامِلَيْــهِ هما العدد 1 والعدد 7 فقط، أي $7\times 1 = 7$.

والأعداد الأولية الأولى هي

2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ،...

علما أن هذه القائمة لا تنتهي أي أن عدد الأعداد الأولية غير منته. ومــن الأعداد غير الأولية يمكن ذكر :

4 ، 15، 36 ، 168، 95812.

3. التفكيك إلى أعداد أولية : إذا فككنا عددا إلى عوامل، وكانت كل هذه العوامل أولية نقول إننا فككنا ذلك العدد إلى عوامل أولية.

أمثلة

$$15 = 3\times 5$$
$$18 = 2\times 3\times 3 = 2\times 3^2$$
$$72 = 2\times 2\times 2\times 3\times 3 = 2^3\times 3^2 .$$

ملاحظة

للحصول على تفكيك عدد طبيعي إلى عوامل أولية، نقسِّم العــدد علــى الأعداد الأولية الأولى مثل 2، 3، 5، 7، 11، ... إن كان يقبل القــسمة على هذه الأعداد (بعضها أو كلها). ونواصل نفس عملية تقسيم حاصــل القسمة على تلك الأعداد الأولية، وهكذا دواليك إلى أن نــصل إلى عــدد أولي.

أمثلة

1. تفكيك 48 إلى عوامل أولية : نقسم 48 على 2 فنجد 24. ثم نقسم 24 على 2 فنجد 12. وبعد ذلك نقسم 12 على 2 فنجد 6. وأخيرا نقسم 6 على 2 فنجد 3، مع ملاحظة أن 3 عدد أولي. وبالتالي فالتفكيك المطلوب هو

$$48 = 2\times2\times2\times2\times3 = 2^4\times3 .$$

2. تفكيك العدد 220 إلى عوامل أولية : نقسم 220 على 2 فنجد 110. ثم نقسم 110 على 2 فنجد 55. وبعد ذلك نقسم 55 على 5 فنجد 11. لاحظ أن 11 عدد أولي. ومن ثم فالتفكيك المطلوب هو

$$220 = 2\times2\times5\times11 = 2^2\times5\times11 .$$

3. تفكيك العدد 5436 إلى عوامل أولية : نقسم 5436 على 2 فنجد 2718. ثم نقسم 2718 على 2 فنجد 1359. وبعد ذلك نقسم 1359على 3 فنجد 453. وأخيرا نقسم 453 على 3 فنجد 151. نلاحظ أن 153عدد أولي. ومن ثم فالتفكيك المطلوب هو

$$5436 = 2\times2\times3\times3\times151 = 2^2\times3^2\times151 .$$

ملاحظة

كل عدد طبيعي له تفكيك إلى عوامل أولية. وهذا التفكيك وحيد، بمعنى أننا لا نستطيع إيجاد تفكيكين مختلفين إلى عوامل أولية لنفس العدد الطبيعي. أما إذا كان الأمر يتعلق بتفكيك إلى عوامل ليست كلها أولية فالتفكيك ليس بالضرورة وحيد.

مثال ذلك : $48 = 4 \times 12$ ، $48 = 8 \times 6$ ، $48 = 16 \times 3$.

وتلك 3 تفكيكات لنفس العدد.

إليك قائمة بالأعداد الأولية الأصغر من 1010.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009

4. القواسم والمضاعفات

1. **القواسم المشتركة** : عندما يكون عدد معطى عاملاً مشتركا في تفكيكين للعددين نقول إن ذلك العامل قاسم مشترك للعددين.

أمثلة

العدد 4 قاسم مشترك للعددين 8 و 24.

العدد 10 قاسم مشترك للأعداد 20، 50، 100، 260.

ليس هناك قاسم مشترك للعددين 28 و 33 (عدا 1 الذي هو دائما قاسم مشترك لكل الأعداد ولذا فلا نعير له اهتماما).

2. القاسم المشترك الأكبر : يسمى أكبر القواسم المشتركة لعددين القاسم المشترك الأكبر.

أمثلة

القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و 12 هو 4.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 48 هو 12.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و 29 هو 1.

ملاحظة

هناك كيفية للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعددين : نفكك كلا منهما إلى عوامل أولية. وعندئذ نستخرج القواسم المشتركة (بأقل أس) للعددين فيكون القاسم المشترك الأكبر هو جداء هذه العوامل.

أمثلة

لدينا $\mathbf{8 = 2^3}$ و $\mathbf{12 = 2^2 \times 3}$. ولذا فالقاسم المشترك الأكبر لـ 8 و 12 هو $\mathbf{2^2}$ أي 4.

لدينا $\mathbf{36 = 2^2 \times 3^2}$ و $\mathbf{48 = 2^4 \times 3}$. وبالتالي فالقاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 48 هو $\mathbf{2^2 \times 3}$ أي 12.

لدينا $\mathbf{18 = 2\times3^2}$ و $\mathbf{30 = 2\times3\times5}$ و $\mathbf{42 = 2\times3\times7}$. وبالتالي فالقاسم المشترك الأكبر للأعداد 18 و 30 و 42 هو $\mathbf{2\times3}$ ، أي 6.

3. الأعداد الأولية فيما بينها : نقول عن عددين إنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الوحيد لهما هو 1.

أمثلة

العددان 8 و 23 أوليان فيما بينهما.

العددان 120 و 151 أوليان فيما بينهما.

العددان 45 و 81 ليسا أوليين فيما بينهما (9 قاسم مشترك لهما).

الأعداد 6 و 27 و 31 أولية فيما بينها... رغم أن 3 قاسم مشترك لـ 6 و 27 لكنه ليس قاسما لـ 31.

4. **المضاعف المشترك الأصغر** : المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين معلومين هو أصغر عدد طبيعي يقبل القسمة على العددين المعلومين.

أمثلة

1. تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 و 24.

نكتب مضاعفات العدد 18 بالترتيب التصاعدي، وكذلك مضاعفات 24 فنجد :

18 ، 36 ، 54 ، 72، 90 ، 108، 126 ، 144 ، ...

24 ، 48 ، 72 ، 96 ، 120، 144، ...

نلاحظ أن 72 مضاعف مشترك، وهو أول عدد مشترك بين مضاعفات العددين في هذا الترتيب التصاعدي. إن 72 هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 و 24. كما نلاحظ أن 144 مضاعف مشترك للعددين المذكورين، لكنه ليس مضاعفهما الأصغر.

طريقة أخرى : نفكك العددين إلى عوامل أولية فنجد $18 = 2\times 3^2$ و $24 = 2^3\times 3$. ومن ثم نستخلص أن

$$2^3\times 3^2 = 8\times 9 = 72$$

هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين، وذلك بأخذ جداء كل العوامل باعتبار أكبر أس لها.

2. تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 84 و270.

نتبع الطريقة الثانية. لنفكك العددين إلى عوامل أولية : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ و $270 = 2 \times 3^3 \times 5$. ومن ثم نستخلص أن

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 8 \times 27 \times 35 = 3780$$

هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين، وذلك بأخذ جداء كل العوامل باعتبار أكبر أس لها.

3. أوجد طول المربع الذي يمكن تبليطه بمستطيلات طول وعرض كل منها 18 سم و 27 سم. نريد أن يكون لطول هذا الضلع أصغر قيمة ممكنة.

للإجابة عن هذا السؤال يكفي البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين ... فهو يمثل طول المربع المطلوب (لأن هذا الضلع ينبغي أن يقسم في آن واحد على 18 وعلى 24). إذن فطول ضلع المربع هو (حسب المثال الأول) 72 سم.

ملاحظة

بنفس الطريقة نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد.

5. نبذة تاريخية

قبل أكثر من 4000 سنة مضت، استخدم الفلكيون من قدامى البابليين الكسور الناتجة عن تقسيم وحدة إلى 60 جزءًا، ثم تقسيم كل جزء من هذه الأجزاء إلى 60 جزءًا، وهكذا. ومازال هذا النظام معمولاً به في تحديد الزمن وفي قياس الزوايا بالدقائق والثواني.

وخلال النهضة العلمية في العالم الإسلامي جاء العلماء العرب والمسلمون بطريقة لتسهيل حساب الكسور في النظام الستيني. وكان أول من قام بذلك السموءل بن يحيى المغربي (توفي عام570 هـ / 1175م). ثم جاء بعده غياث الدين الكاشي (توفي عام 839 هـ/1436 م) فطوّر طريقة السموءل في كتابه الشهير "مفتاح الحساب". ويبدو أنه هو أول من اخترع الكسور ليسهل الحساب لأولئك الذين يجهلون الطريقة الستينية.

واستخدم الرياضيون المصريون الذين ساعدوا في بناء الأهرامات قبل أكثر من 4000 سنة الكسور التي فيها البسط يساوي 1. وتسمى مثل هذه الكسور كسور وحدة. وقد أدى الاقتصار على استخدام كسور الوحدة فقط، إلى ضرورة التعبير عن الأجزاء الكسرية الأخرى على شكل مجاميع. فعلى سبيل المثال يتم التعبير عن $\frac{3}{4}$ بدلالة كسور الوحدة على الشكل $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

وقبل 200 قرن كتب الإغريق عن الكسور بشكل يكون فيه البسط في الأسفل والمقام في الأعلى، ولم يفرقوا بين البسط والمقام بخط. ثم توجهوا فيما بعد إلى كتابة الكسور بشكل يكون فيه البسط في الأعلى، والمقام في الأسفل. وقد أخذ الهنود بهذه الطريقة في كتابة الكسور من اليونانيين القدامى.

وخلال القرن الثامن الميلادي فتح العرب بلاد الهند وتعلموا هناك النظام العشري وطريقتهم في كتابة الكسور. وقد نشر العرب والمسلمون، خلال القرون الثلاثة الموالية هذه المعلومات في غربي آسيا وشمالي إفريقيا وأسبانيا. ثم انتشرت خلال أواخر القرن الخامس عشر الميلادي في أوروبا

عدة كتب في الحساب شرحت استخدام الكسور والنظام العشري. وبعدما عُرِفت هذه الكتب وتم الاطلاع عليها، بدأ عدد كبير مـــن الأوروبـــيين في استخدام الكسور عند إنجاز العمليات الحسابية اليومية.

أما الآن فإن العديد من المسائل التي كانت تُحَل عن طريق الكسور وباستخدام الورقة والقلم، قد أصبحت تحل باستخدام الحاسبات الإلكترونية التي تعبّر عن الكسور بالنظام العــشري. ونظــرًا لهـــذه الـــتغيرات فـــإن استخدامات الكسور تقل يوما بعد يوم. ومع ذلك تظل الصيغة الكـــسرية أداة مهمة للتعبير عن المعدلات والنسب والقسمة، كما تظل ذات أهميـــة في الجبر وفي بعض فروع الرياضيات.

❖ النسبة والتناسب

نسبة عددين هو كسر بسطه ومقامه عددان، نسميهما **حَـــدَّيْ النـــسبة**.

وتكتب النسبة بين عددين يمثلهما الحرفان a و b كما يلي: $\frac{a}{b}$.

لاحظ أن كل النسب المئوية تسمى نسبًا، فقولنا 40% يمكن أن يكتب $\frac{40}{100}$.

وقد تُستخدم النسبة لوصف عدد من العلاقـــات. فمـــثلاً يمكـــن استخدام النسب لتحديد العلاقة بين كميتين تكوّنان مزيجًا ســـائلاً. فـــإذا احتوى مزيج على 5 لترات من العصير و15 لترًا من الماء، فإن نسبة العصير في الماء هي $\frac{5}{15}$، المساوية لــ $\frac{1}{3}$. نعبّر عن ذلك بالقول إن نسبة العصير في الماء هي ثلث. أما نسبة العصير في المزيج فهو $\frac{5}{20}$ المساوية لــ $\frac{1}{4}$. نعبّـــر عن ذلك بالقول إن نسبة العصير في المزيج هي ربع.

كما يمكن أن تشير النسبة إلى معدل حدوث أمر ما، مثـــل معـــدل استهلاك الوقود في سيارة. فمعدل استهلاك الوقود لسيارة تـــستهلك لتـــرا واحدا من الوقود كلما قطعت مسافة 20 كلم يمكن التعبير عنه بالنسبة $\frac{1}{20}$.

وتعدّ النسبة من أهم الموضوعات الشائعة في الاستعمالات الرياضية، كما أنها تلعب دورًا مهمًا في كثير من قوانين علـــوم الفلـــك، والأحيـــاء، والكيمياء، والفيزياء. ففي الفيزياء مثلا، تشكل النسبة الأســـاس لمفهـــومي السرعة والتسارع. والملاحظ أن الكثير من القوانين تحتوى على ثوابت نسبية مشهورة. وتستخدم فكرة التناسب أيضًا فى العلوم الاجتماعيـــة والفنـــون. كما يستخدمها المعماريون في تصميم النماذج المجسمة وفي رسم خـــرائط المباني، إلخ.

لنتعرف الآن عن التناسب وبعض خواصه.

التناسب علاقة تكافؤ بين نسبتين. وعلى وجه التحديد فالمـــساواة $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تقول إن a يتناسب مع b بالطريقة نفسها التي يتناسب بهـــا c مع d. نلاحظ أن تلك المساواة تكتب أيضا علـــى الـــشكل $a.d=b.c$. ولذلك يقال عن النسب المتكافئة إنها متناسبة.

وفى التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، يسمى a الحد الأول و b الحد الثاني، و c الحد الثالث و d الحد الرابع.

ويسمى الحدان الأول والرابع طرفي التناسب، والثاني والثالث وسطي التناسب.

وتسمى القيمة المشتركة في التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ثابت التناسب، أي أن ثابت التناسب هو $\frac{a}{b}$ أو $\frac{c}{d}$.

وفي كل النسب يأتي حاصل ضرب الوسطين مساويًا لحاصل ضرب الطرفين (أي $a.d = b.c$). وتعطينا هذه الخاصية للنسب الطريقة الإجرائية لإيجاد الحد غير المعلوم في نسبة تكون الحدود الثلاثة الأخرى فيها معلومة.

مثال جبري : الحد غير المعلوم في التناسب $\frac{27}{12}=\frac{x}{4}$ هو x. يمكن التوصل إليه بحل المعادلة التي تعبّر عن أن حاصل ضرب الوسطين هو حاصل ضرب الطرفين، أي $12x = 27\times 4$. ومنه :

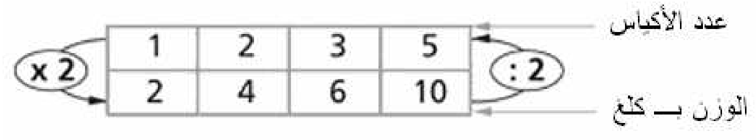
$$x=\frac{27\times 4}{12}=9\,.$$

أما ثابت التناسب فهو $\frac{27}{12}$ الذي نجده مساويا بعد الاختزال لـ 2.25.

مثال هندسي : نسبة المحيط p على القطر R في أية دائرة، متناسبة مع النسبة نفسها لأية دائرة أخرى. وكل نسبة $\frac{p}{R}$ في أية دائرة تساوى العدد الشهير π، الذي قيمته التقريبية هي **3.14159**.

وقد غلبت على الكتب المدرسية تقديم موضوع النسبة والتناسب بأشكال توضيحية والعديد من الأمثلة. لنستعرض مثالا من هذا القبيل.

عندما يكون وزن كيس واحد من الطحين يساوي 2 كلغ فإن وزن كيسين يساوي 4 كلغ، ووزن 3 أكياس يساوي 6كلغ، ووزن 5 أكياس يساوي 10 كلغ. نمثل ذلك في الشكل التالي :



لاحظ أن الانتقال من السطر الأول إلى السطر الثاني يتم بالـــضرب في 2. أما الانتقال من السطر الثاني إلى السطر الأول فيتم بالقسمة على 2. ولـــذلك يعتـــبر 2 **ثابـــت** (أو معامـــل) **التناســـب**. ذلـــك أن $2 = \frac{10}{5} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$.

❖ **النسبة المئوية**

النِّسبة المئوية تشير إلى استخدام أجزاء المائة في الحساب. فكثيرًا ما نرى أعدادًا مثل 2%، 75% حيث الرمز % يعني في المائة. وتقرأ هـــذه الأعداد 2 في المائة، و 75 في المائة. وهكذا فإن النســبة 2% تعنـــي جزئين من المائة، و 75% تعني 75 جـــزءاً من المائة.

وكما أسلفنا فإن النسب المئوية كسور اعتيادية. فالنسبة 2% هي $\frac{2}{100}$ و $\frac{75}{100}$. والنسب المئوية أيضا كسور عشرية، حيث يمكـــن كتابـــة النسبة 2% على الشكل $\frac{0.2}{10}$ أو **0.02**. كما أن 75% هـــي **0.75**.

تستخدم النسبة المئوية بكثرة في الحياة اليومية. فالبنوك تـــستخدمها لحساب الفوائد على المدخرات والقروض. كما أن الضرائب تحسب بطريقة النسب المئوية من الدخل والأسعار ومقادير أخرى. وكـــثيرًا مـــا يكتـــب الباحثون نتائج ملاحظاتهم وتجاربهم في شكل نسب مئوية. ومنـــذ قـــرون وعالم التجارة يستخدم لفظ "في المائة". ويبدو أن هذا التقليد يعود إلى عصر

الرومان الذين كانوا يستخدمون النسب المئوية في نظام الضرائب. وقد اعتاد التجار في العصور الوسطى على استخدام أجزاء في المائة والنسبة المئوية حتى قبل ظهور نظام الأعداد العشرية.

والواقع أن الناس لم يعودوا في حاجة ماسة إلى استخدام اللفظ "في المائة" بعد اكتشاف النظام العشري، فالرقم **0.25** لا يقل سهولة عن التعامل مع 25%، غير أن النسب المئوية قد تغلغلت في نسيج الحياة اليومية والمهنية والتجارية إلى درجة أدت إلى استمرار استخدامها.

لنر كيف يتم تحويل النسب المئوية إلى كسور وتحويل الكسور إلى نسب مئوية

لتحويل نسبة مئوية إلى كسر اعتيادي أو عشري نحتاج فقط إلى كتابة النسبة المئوية في صيغة أجزاء من المائة.

– **تحويل النسبة المئوية إلى كسور اعتيادية:** لتحويل نسبة مئوية إلى كسر اعتيادي نزيل الرمز % ثم ندخل مقامًا قدره 100.

مثال ذلك : لدينا $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. وبالتالي فالكسر المساوي للنسبة المئوية 25 % هو $\frac{1}{4}$.

كما أن $\frac{37.5}{100}=\frac{3}{8}$. وبالتالي فالكسر المساوي للنسبة المئوية 37.5 % هو $\frac{3}{8}$.

– **تحويل النسب المئوية إلى كسور عشرية:** لتحويل نسبة مئوية إلى كسر عشري نزيل الرمز % ونضع الفاصلة العشرية بعد خانتين إلى اليسار.

مثال ذلك : لدينا 0,25 = 25 % . وبالتالي فالكسر العشري المساوي للنسبة المئوية 25 % هو 0,25.

كما أن $0,375 = 37.5\%$. وبالتالي فالكسر العشري المساوي للنسبة المئوية $37.5\ \%$ هو $0,375$.

– **تحويل الكسور إلى نسب مئوية .** لتحويل كسر اعتيادي إلى نسبة مئوية نقسم البسط على المقام لنحصل على كسر عشري، ثم نحرك الفاصلة العشرية خانتين إلى اليمين ونلحق الرمز % .

أمثلة

1. اكتب الكسر $\mathbf{\frac{15}{20}}$ على شكل نسبة مئوية.

يتم ذلك بضرب البسط والمقام في 5 :

$$\frac{15}{20} = \frac{75}{100} \quad (\times 5)$$

ومن ثمّ فالنسبة المئوية التي يمثلها هذا الكسر هي $75\ \%$.

2. اكتب الكسر $\mathbf{\frac{23}{25}}$ على شكل نسبة مئوية.

يتم ذلك بضرب البسط والمقام في 4:

$$\frac{23}{25} = \frac{92}{100} \quad (\times 4)$$

ومن ثمّ فالنسبة المئوية التي يمثلها هذا الكسر هي $92\ \%$.

3. اكتب الكسر $\mathbf{\frac{12}{15}}$ على شكل نسبة مئوية.

يتم ذلك بقسمة البسط والمقام على 3، ثم ضربهما في 20 :

$$\frac{12}{15} \overset{\div 3}{=} \frac{4}{5} \overset{\times 20}{=} \frac{80}{100}$$

ومن ثمّ فالنسبة المئوية التي يمثلها هذا الكسر هي 80 %.

❖ **أمثلة في النسبة المئوية**

هب أننا نريد حساب 4 % من العدد 50. نجد المطلوب عند إجراء العملية التالية كما أسلفنا : $50\times\frac{4}{100}$ فنجد 2. وهو المطلوب.

كما أن 30% من العدد 72 هو $\frac{30}{100}\times 72 = 21.6$.

و 75% من العدد 920 هو $\frac{75}{100}\times 920 = 690$.

و 250% من العدد 32 هو $\frac{32}{100}\times 250 = 80$.

حساب عدد كنسبة مئوية من عدد آخر : النسب المئوية كسور مقامها مائة، ولذا يمكن استخدام هذه الطريقة لإيجاد النسبة المئوية التي يمثلها عدد ما إلى عدد آخر.

هب أننا نريد إيجاد النسبة المئوية من العدد 30 التي يمثلها العدد 15. نكتب المسألة أولا في الصيغة التالية $30x = 15$. ومن ثم نجد $x = \frac{15}{30} = 0.5 = \frac{50}{100}$. وبالتالي فالنسبة المطلوبة هي 50%، أي أن 15 هو 50% من 30. يمكن تقديم المعطيات والمطلوب في أربع خانات كالتالي :

؟	15
100	30

وإذا سمينا المجهول a فسيكون حلا للمعادلـــة $30\times a = 100\times 15$ (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين).

– مثال ثان : احسب العدد 17 كنسبة مئوية مـــن 340. نمثـــل المعطيات والمجهول في الأربع خانات التالية :

؟	17
100	340

ومن ثم يأتي أن المطلوب هو حاصل العملية التالية $5 = \frac{100\times 17}{340}$. وبالتالي فإن 17 هو 5% من العدد 340.

– مثال ثالث : احسب العدد 420 كنسبة مئوية من 70. نمثـــل المعطيات والمجهول في الأربع خانات التالية :

؟	420
100	70

ومن ثم يأتي أن المطلوب هو حاصل العمليـــة التاليـــة $600 = \frac{100\times 420}{70}$.

وبالتالي فإن 420 هو 600% من العدد 70.

هذه المسائل يمكن حلها أيضا بمقارنة النسب. فعند تحديد النسبة المئوية مـــن العدد 30 التي يمثلها العدد 15 مثلاً، فإننا نحاول إيجاد عدد تكون نسبته إلى 100 مساوية لنسبة 15 إلى 30.

لنتساءل الآن : إذا علمنا أن 6 هو 25% من عدد ما، فما هذا العدد؟ نمثل المعطيات والمجهول في الأربع خانات التالية :

25	6
100	؟

وللحصول على المجهول نتذكر القاعدة القائلة إن حاصل ضـــرب الطـــرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، أي أن المجهول يُعطَى بحاصـــل العمليـــة: $24 = \frac{6\times100}{25}$. إذن 6 يساوي 25% من 24.

مثال ثان : 17 هو 40% من أي عدد ؟ نمثل المعطيـــات والمجهـــول في الأربـــع خانات التالية :

17	40
؟	100

وللحصول على المجهول نتذكر مرة أخرى القاعدة القائلـــة إن حاصـــل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، أي أن المجهول هنا يعطَـــى بحاصل العملية التالية : $42.5 = \frac{17\times100}{40}$. إذن 17 يساوي 40% مـــن 42.5.

مثال ثالث : 46 هو 115% من أي عدد ؟ نمثل المعطيات والمجهـــول في الأربع خانات التالية :

46	115
؟	100

وللحصول على المجهول نتذكر للمرة الثالثة القاعدة القائلة إن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، أي أن المجهول هنا يعطي بحاصـــل العملية التالية : $40 = \frac{46\times100}{115}$. إذن 46 يساوي 115% من 40.

❖ تماريـــــــن

تمرين 1

يقع بيت أحمد على رقعة من الأرض مساحتها ربع هكتار. اشترى والـــده رقعة أرض مجاورة مساحتها ثلاثة أثمان الهكتار. ما مساحة رقعـــتي الأرض معًا؟

الجواب

علينا أن نجمع ربع هكتار وثلاثة أثمان هكتار. يتم ذلك بالعمليـــة التاليـــة بمراعاة توحيد المقامات وطريقة جمع الكسور عند تساوي المقامات :

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 2}{4\times 2}+\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

وبالتالي فمساحة رقعتي الأرض الإجمالية هي خمسة أثمان هكتار.

تمرين 2

تستعمل ليلى ربع ملعقة من البنّ في إعداد فنجان واحد من القهوة.كم ملعقة من البنّ يجب أن تستعمل في إعداد ستة فناجين من القهوة؟

الجواب

علينا بضرب رُبُع في 6 فنجد :

$$\frac{1}{4}\times 6=\frac{1\times 6}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3\times 2}{2\times 2}=\frac{3}{2}=1.5 .$$

وبالتالي فإن إعداد ستة فناجين من القهوة يتطلب 1.5 ملعقة، أي ملعقـــة ونصف من البنّ.

تمرين 3

يستطيع محمد قياس المسافات بالخطى. ويبلغ متوسط طول خطوتـه ثلاثـة أرباع متر. وتبلغ غرفته 7 خطوات طولاً و 6 خطوات عرضًا. فكم طول غرفته؟ وكم عرضها بالأمتار؟

الجواب

يتم حساب الطول كما يلي :

$$\frac{3}{4}\times 7=\frac{3\times 7}{4}=\frac{21}{4}=5.25 .$$

وبالتالي فطول الغرفة هو 5.25 متر.

كما يتم حساب العرض على النحو التالي :

$$\frac{3}{4}\times 6=\frac{3\times 6}{4}=\frac{18}{4}=4.5 .$$

إذن فطول الغرفة هو 4.5 متر.

تمرين 4

تدفع كثير من الشركات عمولات لرجال مبيعاتها بمقدار معين من المال لكل وحدة يبيعونها. وغالبًا ما تكون العمولة نسبة مئوية محددة من سعر الوحدة المباعة. لنفترض أن بائعًا يتلقى عمولة مقدارها 15% من ثمن أي سلعة يبيعها. ما مقدار ما يكسبه إذا باع ثلاجة بمبلغ 25000 دينار؟

الجواب

المطلوب هو حساب 15% من 25000. إذن مقدار العمولة هو $\frac{25000\times 15}{100}$، أي 3750 دينارا.

تمرين 5

تستخدم النسب المئوية أحيانا في المقارنات. فهي تعيننا مثلا في مقارنة حجم المبيعات بحجم السلع المعروضة. وتستخدم لدى الشركات والبنوك لحساب الأرباح والخسائر. كما يستعملها المهندسون لمقارنة معدلات الإنتاج مع الأهداف المسطرة.

هب أن أحد الوكلاء اشترى دراجة من مصنع بمبلغ 7500 دينار ويريد أن يربح 25 % من سعر بيع الدراجة. فما المبلغ الذي عليه أن يطلبه ثمنا للدراجة، وكم سيكون ربحه؟

الجواب

إذا جمعنا الربح وثمن شراء الدراجة من المصنع (أي 7500 د.ج) فسنجد أن هذا المجموع يساوي ثمن البيع. وبما أن الربح يساوي 25% من سعر بيع الدراجة فإن تكلفة الدراجة من المصنع (أي 7500 د.ج) يجب أن تكون 75% من الثمن الذي يطلبه الوكيل. إذن تصبح المسألة على هذا المنوال (باستخدام قاعدة حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين) :

75000	؟
75	100

وبالتالي فثمن البيع هو $\frac{75000\times100}{75}$، أي 10.000 د.ج. أما الربح فيقدر بالعملية التالية : $\frac{25\times10.000}{100}$، أي 2500 د.ج.

تمرين 6

هب أن موظفا اقترض 60.000 دينار من البنك بسعر فائدة سنوي قدره 6 %. ما قيمة الفائدة التي يجب عليه أن يدفعها شهريا؟

الجواب

نبدأ أولا بمعرفة كـم تـساوي 6 % مـن 600.000 دينـار. إنهـا $\frac{\mathbf{6\times 600.000}}{\mathbf{100}}$، أي 36.000د.ج. إذن فعلى الموظف دفـع 36.000 د.ج. للبنك كفائدة على القرض لعام واحد.

ولمعرفة ما يجب عليه دفعه كل شهر يكفي تقسيم 36.000 علـى عـدد الشهور في السنة، أي 12. فنجد أن المبلغ المطلوب شهريا هو 3000 د.ج.

تمرين 7

هب أن ملعبا يبيع تذاكر لمباراة كرة القدم بسعر 1500 د.ج. للتـذكرة الواحدة وهذا السعر يشتمل على 10% كضريبة مبيعات على دخل الملعب من التذكرة. ما دخل الملعب من كل تذكرة؟

الجواب

يشتمل السعر على كل من الدخل و10% ضريبة المبيعات. ولـذا تمثـل 1100 د.ج. نسبة 110% من الدخل. إذن تصبح المسألة تتمثل في إيجاد عدد تكون نسبة 110% منه مساوية لمبلغ 1100 د.ج.

هذا العدد يحسب كالتالي :

1500	؟
110	100

وعليه فالدخل هو $\frac{\mathbf{1100\times 100}}{\mathbf{110}}$، أي 1000 د.ج.

III

حساب الكسور

الكســـور

نقدم في هذا الفصل العديد من المواضيع المتعلقة بالكسور. فنتعرف في البداية على مصطلحاتها ثم نبحث عن كيفية القيام بالعمليـــات الأربعـــة عندما نجري تلك العمليات على الكسور.

كما نستعرض موضوع النسبة والتناسب مقـــدمين العديـــد مـــن الأمثلة. ونتناول بعد ذلك مفهوم النسبة المئوية مشيرين إلى أمثلـــة عمليـــة. وينتهي الفصل بتمارين متنوعة حول الكسور.

❖ الكسور

الكســـر جزء من شيء. وعندما تقاس الأشياء، فناتج القيـــاس لا يساوي وحدات كاملة في أغلب الأحوال. وعلى سبيل المثال، يمكن أن يزن كتاب ما بين اثنين وثلاثة كلغ، فما زاد عن كيلوغرامين يكـــون كـــسرًا لوحدة الكيلوغرام. ويمكن أن يتراوح طول لوحة بين 10 و11 سم فيكون طولها 10 سم زائدًا كسرًا من وحدة القياس (وهي السنتيمتر هنا).

تنتج الكسور من تقسيم وحدة إلى عدد من الأجـــزاء المتـــساوية. ويمكن تقسيم الوحدة إلى أي عدد من الأجزاء. فإذا كـــسرت عـــصا إلى قطعتين، فلن تحصل بالضرورة على نصفين للعصا. وللحصول على نـــصفين للعصا، عليك أن تكسرها إلى قطعتين متساويتي الطول.

تكتب الكسور بصورة عددية على شكل عددين يفصلهما خط أفقي على النحو : $\frac{2}{5}$ وأحيانا تكتب أفقيا على الشكل 5/2 أو 2÷5 ونقرأ 2 على 5 أو 2 تقسيم 5...

وتستخدم صيغة الكسر بهدف :

1. التعبير عن قسمة : يمكن أن يشير الكسر $\frac{2}{5}$ إلى قسمة 2 على 5، كتقسيم قطعتين من الحلوى بالتساوي على خمسة أشخاص مثلاً.

2. تمثيل نسبة : النسبة مقارنة بين كميتين قيستا بنفس الوحدات. ويمكـــن للنسبة أن تقارن جزءا إلى الكل أو جزءا إلى جزء آخر. مثـــال ذلـــك : إذا كان فريق مسابقة مؤلفًا من بنتين وثلاثة أولاد، فتكون نسبة البنات مقارنة

بمجموع أفراد الفريق هي $\frac{2}{5}$. وتكون نسبة البنات مقارنــة بجملــة عــدد الأولاد هي $\frac{2}{3}$.

3. الدلالة على معدّل : المعدّل هو العلاقة بين كميتين قيــستا بوحــدات مختلفة. مثال ذلك : يمكن لفريق كرة سلة تسجيل أهداف بمعدل هدفين في كل خمس دقائق من اللعب.

1. مصطلحات

لنتعرف الآن على بعض مصطلحات الكسور.

– **البسط** : هو العدد المكتوب فوق الخط الأفقي في الكسر.

مثال : في الكسر $\frac{2}{5}$ البسط هو العدد 2.

– **المقام** : هو العدد المكتوب تحت الخط الأفقــي في الكسر.

مثال : في الكسر $\frac{2}{5}$ المقام هو 5.

– **حدّ كسر** : هو بسط الكسر أو مقامه.

– **اختصار كسر** : هو كتابة الكسر في شكل أبسط بقسمة (أو ضــرب) البسط والمقام على نفس العدد. وهذا يعني تحويله إلى كسر آخر مكافئ لــه بحيث يقل كل من البسط والمقام عن نظيريهما في الكسر الأول. ولكن تظل قيمة الكسر الجديد مساوية لقيمة الكسر القديم.

– **تحويل الكسر**: هو تغيير في شكل الكسر وليس في قيمته، وغالبا ما يــتم ذلك بقسمة أو ضرب بسط الكسر ومقامه في نفس العدد.

مثال : يمكن تحويل الكسر $\frac{2}{5}$ إلى $\frac{4}{10}$ وذلك بضرب كل من البسط والمقــام في 2. نلاحظ أن العدد 0.4 يمثل كتابة أخرى لنفس العدد الذي يمثله الكسر.

– **تكافؤ الكسور** : نقول عن كسرين إنهما متكافئان إذا اختلف البسط فيهما وكذلك المقام، بينما يمثل الكسران الجزء ذاته من الكل.

ملاحظة

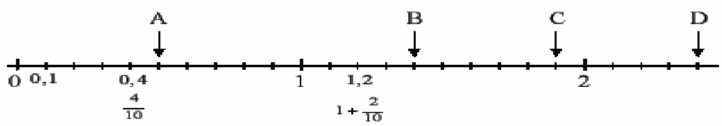
لاحظ الرسمين التاليين المكوّنين من مربعين متساويين في المساحة.

لقد قُسم المربع الأيمن إلى 16 مربعا صغيرا، وغطيت منها 6 مربعات. وبالتالي غطي منها $\frac{6}{16}$. وقسم المربع الأيسر إلى 8 مستطيلات متساوية وغطيت منها 3 مستطيلات. وبالتالي غطي منها $\frac{3}{8}$. وعندما نتأمل في الشكلين نجد أن المساحة المغطاة في المربع الأيمن تساوي المساحة المغطاة في المربع الأيسر. بمعنى أن الكسرين $\frac{6}{16}$ و $\frac{3}{8}$ المعبّرين عن التغطيتين متكافئان.

ولذا نكتب : $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$.

تمرين

لنعتبر نصف مستقيم مدرج كما هو مبين في الرسم.



لقد عيّنا نقاطا أربع هي A، B، C ، D.

عيّن الأعداد الكسرية التي تمثلها هذه النقاط وقدم كسورا متكافئة تمثل كلا من هذه النقاط.

الجواب

– النقطة A : العدد الذي يمثل هذه النقطة هو $\frac{5}{10}$ أي 0.5. يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لـــ $\frac{5}{10}$ مثل $\mathbf{\frac{1}{2}}$، $\mathbf{\frac{2}{4}}$، $\mathbf{\frac{6}{12}}$، $\mathbf{\frac{100}{200}}$، $\mathbf{\frac{362}{424}}$، إلخ.

– النقطة B : العدد الذي يمثل هذه النقطة هـــو $1+\frac{4}{10}$ أي $\mathbf{\frac{14}{10}}$ أو 1.4.

يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لـــ $\frac{7}{5}$ مثل $\mathbf{\frac{21}{15}}$، $\mathbf{\frac{28}{20}}$، $\mathbf{\frac{49}{35}}$، إلخ.

– النقطة C : العدد الذي يمثل هذه النقطة هـــو $1+\frac{9}{10}$ أي $\mathbf{\frac{19}{10}}$ أو 1.9.

يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لـــ $\frac{19}{10}$ مثل $\mathbf{\frac{38}{20}}$، $\mathbf{\frac{57}{30}}$، $\mathbf{\frac{152}{70}}$، إلخ.

– النقطة D : العدد الذي يمثل هذه النقطة هـــو $2+\frac{4}{10}$ أي $\mathbf{\frac{24}{10}}$ أو 2.4.

يمكن أيضا تمثيل ذلك بكسور مكافئة لـــ $\frac{24}{10}$ مثل $\mathbf{\frac{12}{5}}$، $\mathbf{\frac{48}{20}}$، $\mathbf{\frac{120}{50}}$، إلخ.

– **قيمة الكسر**: هي العدد الذي يمثله الكسر. فالكسور المتكافئة مثل $\mathbf{\frac{2}{5}}$ و $\mathbf{\frac{4}{10}}$ و $\mathbf{\frac{10}{25}}$ و $\mathbf{\frac{40}{100}}$ لها نفس القيمة وتمثل نفس العدد.

– **الكسر العشري** : هو كل كسر يمكن أن يكون مكافئا لكسر مقامه 10 أو قوى لـــ 10 (أي 10 مضروبة في نفسها عددا من المرات، مثل 100 و 1000، إلخ.).

مثال ذلك : الكسر $\frac{2}{5}$ هو عشري لأنه يكافئ $\frac{4}{10}$، (يكفي أن نضرب بسطه ومقامه في 2). أما الكسر $\frac{4}{7}$ فليس عشريا لأننا لا نستطيع إيجاد عدد نضربه في 7 فنجد قوى لـ 10.

– **توحيد المقامات** : توحيد مقامي كسرين يعني إيجاد كسرين لهما نفس المقام وكل منهما يكافئ أحد الكسرين المعطيين.

مثال ذلك : إذا أردنا توحيد مقامي الكسرين $\frac{2}{5}$ و $\frac{7}{6}$ يكفي أن نلاحظ أن $\frac{2}{5}$ يكافئ $\frac{12}{30}$ (بعد ضرب البسط والمقام في 6) وأن $\frac{7}{6}$ يكافئ $\frac{35}{30}$ (بعد ضرب البسط والمقام في 5). نلاحظ أن $\frac{12}{30}$ و $\frac{35}{30}$ يكافئان على التوالي الكسرين $\frac{2}{5}$ و $\frac{7}{6}$ وأن لهما نفس المقام 30.

– **مقارنة الكسور** : لمقارنة كسرين نوحّد المقامين ونعتبر أن الأكبر من الكسرين هو الكسر الذي له أكبر بسط.

مثال ذلك : أيهما أكبر $\frac{2}{3}$ أو $\frac{7}{4}$؟

نوحد المقامين فنجد : $\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$ ، $\frac{7}{4}=\frac{7\times3}{4\times3}=\frac{21}{12}$.

فنلاحظ أن بسط $\frac{21}{12}$ أكبر من بسط $\frac{8}{12}$. وبالتالي فإن $\frac{21}{12}$ أكبر من $\frac{8}{12}$، أي أن $\frac{7}{4}$ أكبر من $\frac{2}{3}$.

تمرين

قارن الكسور التالية :

$$\frac{5}{8}\text{، } \frac{5}{4}\text{، } \frac{3}{15}\text{، } \frac{9}{18}\text{، } \frac{45}{3}.$$

الجواب

نوحد المقامات فنلاحظ أنه من الممكن بعد الاختزال جعل العدد 40 مقاما مشتركا :

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times 5}{8\times 5}=\frac{25}{40}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{5\times 10}{4\times 10}=\frac{50}{40}$$

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=\frac{1\times 8}{5\times 8}=\frac{5}{40}$$

$$\frac{9}{18}=\frac{1\times 20}{2\times 20}=\frac{20}{40}$$

$$\frac{45}{3}=\frac{15}{1}=\frac{15\times 40}{1\times 40}=\frac{600}{40}.$$

ثم نلاحظ حسب مقارنة البسوط أن

$$\frac{5}{40}<\frac{20}{40}<\frac{25}{40}<\frac{50}{40}<\frac{600}{40}.$$

وبالتالي، وحسب المساويات السابقة، نجد :

$$\frac{3}{15}<\frac{9}{18}<\frac{5}{8}<\frac{5}{4}<\frac{600}{40}.$$

2. عمليات على الكسور

* **جمع وطرح** الكسور

كي تجمع أو تطرح كسرين لهما مقامان مختلفان، حوِّل أولا الكسرين إلى كسرين مكافئين لهما بحيث يكون للكسرين الجديدين مقام مشترك. ثم اجمع البسطين أو اطرحهما وحافظ على نفس المقام .

مثال ذلك : حساب المجموع $\frac{3}{10}+\frac{5}{8}$ والفرق $\frac{3}{10}-\frac{5}{8}$.

يوضح السطران المواليان المجموع والفارق، وكذا تفاصيل الحسابات :

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{10}=\frac{5\times5}{8\times5}+\frac{3\times4}{10\times4}=\frac{25}{40}+\frac{12}{40}=\frac{25+12}{40}=\frac{37}{40}$$

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{10}=\frac{5\times5}{8\times5}-\frac{3\times4}{10\times4}=\frac{25}{40}-\frac{12}{40}=\frac{25-12}{40}=\frac{13}{40}.$$

* **ضرب** الكسور

جداء كسرين هو كسر بسطه يساوي جداء البسطين ومقامه يساوي جداء المقامين.

مثال ذلك : حساب الجداء $\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}$.

يتم حساب الجداء كما يلي :

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}=\frac{5\times3}{8\times10}=\frac{15}{80}.$$

* حاصل **قسمة** كسرين

حاصل قسمة كسرين هو كسر يساوي جداء الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني.

مثال ذلك : حساب نسبة الكسرين $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{10}}$.

يتم هذا الحساب كما يلي :

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{10}}=\frac{5}{8}\times\frac{10}{3}=\frac{50}{24}.$$

نلاحظ بعد الاختزال أن $\frac{50}{24}=\frac{25}{12}$. وبالتالي فإن $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{10}}=\frac{25}{12}$

ملاحظة

يمكن أحيانا جعل عملية ضرب أو طرح أو قسمة الكسور أكثر سهولة وذلك بالقيام أولا بالاختصار كما في الأمثلة التالية.

* احسب المجموع $\frac{5}{10}+\frac{18}{12}$.

- عملية الجمع دون اختصار مسبق :

$$\frac{5}{10}+\frac{18}{12}=\frac{5\times 6}{10\times 6}+\frac{18\times 5}{12\times 5}=\frac{30}{60}+\frac{90}{60}=\frac{120}{60}=2\,.$$

- عملية الجمع باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{5}{10}+\frac{18}{12}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2\,.$$

* احسب الفارق $\frac{18}{12}-\frac{5}{10}$.

- عملية الطرح دون اختصار مسبق :

$$\frac{18}{12}-\frac{5}{10}=\frac{18\times 5}{12\times 5}-\frac{5\times 6}{10\times 6}=\frac{90}{60}-\frac{30}{60}=\frac{60}{60}=1\,.$$

- عملية الجمع باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{18}{12}-\frac{5}{10}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1\,.$$

* احسب الجداء $\frac{18}{12}\times\frac{5}{10}$.

- عملية الضرب دون اختصار مسبق :

$$\frac{18}{12}\times\frac{5}{10}=\frac{18\times 5}{12\times 10}=\frac{90}{120}=\frac{10\times 3\times 3}{10\times 3\times 4}=\frac{3}{4}\,.$$

- عملية الضرب باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{18}{12}\times\frac{5}{10}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\,.$$

* احسب نسبة الكسرين $\dfrac{\frac{18}{12}}{\frac{5}{10}}$.

– عملية القسمة دون اختصار مسبق :

$$\frac{\frac{18}{12}}{\frac{5}{10}} = \frac{18}{12} \times \frac{10}{5} = \frac{180}{60} = 3 .$$

– عملية الضرب باستخدام الاختصار مسبقا :

$$\frac{\frac{18}{12}}{\frac{5}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 3 \quad .$$

3. العوامل الأولية

1. تفكيك عدد إلى عوامل : إذا كتب عدد طبيعي على شكل جداء أعداد طبيعية، فإن هذه الأعداد تسمى عوامل، ونقول إننا فككنا العدد إلى عوامل.

أمثلة

في الكتابة $\mathbf{7 \times 2 = 14}$ نقول إننا فككنا العدد 14 إلى عاملين هما 2 و 7.

وفي الكتابة $\mathbf{9 \times 6 = 54}$ نقول إننا فككنا العدد 54 إلى عاملين هما 6 و 9.

وفي الكتابة $\mathbf{9 \times 4 \times 2 = 72}$ نقول إننا فككنا العدد 72 إلى 3 عوامل هي 2 و 4 و 9.

2. الأعداد الأولية : كل عدد طبيعي، فيما عدا الواحد، يمكن تقـــديره كحاصل ضرب عاملين على الأقل. والعدد الذي له عاملان مختلفان فقط ـــ العدد نفسه والعدد 1 يُسمى **عددًا أوليا**. فالعدد 7 عدد أوَّلي لأن عامِلَيْـــهِ هما العدد 1 والعدد 7 فقط، أي $7\times1=7$.

والأعداد الأولية الأولى هي

2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ،...

علما أن هذه القائمة لا تنتهي أي أن عدد الأعداد الأولية غير منته. ومـــن الأعداد غير الأولية يمكن ذكر :

4 ، 15، 36 ، 168، 95812.

3. التفكيك إلى أعداد أولية : إذا فككنا عددا إلى عوامل، وكانت كل هذه العوامل أولية نقول إننا فككنا ذلك العدد إلى عوامل أولية.

أمثلة

$$15=3\times5$$

$$18=2\times3\times3=2\times3^2$$

$$72=2\times2\times2\times3\times3=2^3\times3^2\,.$$

ملاحظة

للحصول على تفكيك عدد طبيعي إلى عوامل أولية، نقسِّم العـــدد علـــى الأعداد الأولية الأولى مثل 2، 3، 5، 7، 11، ... إن كان يقبل القـــسمة على هذه الأعداد (بعضها أو كلها). ونواصل نفس عملية تقسيم حاصـــل القسمة على تلك الأعداد الأولية، وهكذا دواليك إلى أن نـــصل إلى عـــدد أولي.

أمثلة

1. تفكيك 48 إلى عوامل أولية : نقسم 48 على 2 فنجد 24. ثم نقسم 24 على 2 فنجد 12. وبعد ذلك نقسم 12 على 2 فنجد 6. وأخيرا نقسم 6 على 2 فنجد 3، مع ملاحظة أن 3 عدد أولي. وبالتالي فالتفكيك المطلوب هو

$$48 = 2\times 2\times 2\times 2\times 3 = 2^4\times 3\,.$$

2. تفكيك العدد 220 إلى عوامل أولية : نقسم 220 على 2 فنجد 110. ثم نقسم 110 على 2 فنجد 55. وبعد ذلك نقسم 55 على 5 فنجد 11. لاحظ أن 11 عدد أولي. ومن ثم فالتفكيك المطلوب هو

$$220 = 2\times 2\times 5\times 11 = 2^2\times 5\times 11\,.$$

3. تفكيك العدد 5436 إلى عوامل أولية : نقسم 5436 على 2 فنجد 2718. ثم نقسم 2718 على 2 فنجد 1359. وبعد ذلك نقسم 1359على 3 فنجد 453. وأخيرا نقسم 453 على 3 فنجد 151. نلاحظ أن 153عدد أولي. ومن ثم فالتفكيك المطلوب هو

$$5436 = 2\times 2\times 3\times 3\times 151 = 2^2\times 3^2\times 151\,.$$

ملاحظة

كل عدد طبيعي له تفكيك إلى عوامل أولية. وهذا التفكيك وحيد، بمعنى أننا لا نستطيع إيجاد تفكيكين مختلفين إلى عوامل أولية لنفس العدد الطبيعي. أما إذا كان الأمر يتعلق بتفكيك إلى عوامل ليست كلها أولية فالتفكيك ليس بالضرورة وحيد.

مثال ذلك : $48 = 4\times 12$ ، $48 = 8\times 6$ ، $48 = 16\times 3$.

وتلك 3 تفكيكات لنفس العدد.

إليك قائمة بالأعداد الأولية الأصغر من 1010.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009

4. القواسم والمضاعفات

1. **القواسم المشتركة** : عندما يكون عدد معطى عاملاً مشتركا في تفكيكين للعددين نقول إن ذلك العامل قاسم مشترك للعددين.

أمثلة

العدد 4 قاسم مشترك للعددين 8 و 24.

العدد 10 قاسم مشترك للأعداد 20، 50، 100، 260.

ليس هناك قاسم مشترك للعددين 28 و 33 (عدا 1 الذي هو دائما قاسم مشترك لكل الأعداد ولذا فلا نعير له اهتماما).

2. القاسم المشترك الأكبر : يسمى أكبر القواسم المشتركة لعددين القاسم المشترك الأكبر.

أمثلة

القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و 12 هو 4.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 48 هو 12.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و 29 هو 1.

ملاحظة

هناك كيفية للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعددين : نفكك كلا منهما إلى عوامل أولية. وعندئذ نستخرج القواسم المشتركة (بأقل أس) للعددين فيكون القاسم المشترك الأكبر هو جداء هذه العوامل.

أمثلة

لدينا $\mathbf{8 = 2^3}$ و $\mathbf{12 = 2^2 \times 3}$. ولذا فالقاسم المشترك الأكبر لـ 8 و 12 هو $\mathbf{2^2}$ أي 4.

لدينا $\mathbf{36 = 2^2 \times 3^2}$ و $\mathbf{48 = 2^4 \times 3}$. وبالتالي فالقاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 48 هو $\mathbf{2^2 \times 3}$ أي 12.

لدينا $\mathbf{18 = 2\times3^2}$ و $\mathbf{30 = 2\times3\times5}$ و $\mathbf{42 = 2\times3\times7}$. وبالتالي فالقاسم المشترك الأكبر للأعداد 18 و 30 و 42 هو $\mathbf{2\times3}$ ، أي 6.

3. الأعداد الأولية فيما بينها : نقول عن عددين إنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الوحيد لهما هو 1.

أمثلة

العددان 8 و 23 أوليان فيما بينهما.

العددان 120 و 151 أوليان فيما بينهما.

العددان 45 و 81 ليسا أوليين فيما بينهما (9 قاسم مشترك لهما).

الأعداد 6 و 27 و 31 أولية فيما بينها... رغم أن 3 قاسم مشترك لـ 6 و 27 لكنه ليس قاسما لـ 31.

4. **المضاعف المشترك الأصغر** : المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين معلومين هو أصغر عدد طبيعي يقبل القسمة على العددين المعلومين.

أمثلة

1. تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 و 24.

نكتب مضاعفات العدد 18 بالترتيب التصاعدي، وكذلك مضاعفات 24 فنجد :

18 ، 36 ، 54 ، 72، 90 ، 108، 126 ، 144 ، ...

24 ، 48 ، 72 ، 96 ، 120، 144، ...

نلاحظ أن 72 مضاعف مشترك، وهو أول عدد مشترك بين مضاعفات العددين في هذا الترتيب التصاعدي. إن 72 هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 و 24. كما نلاحظ أن 144 مضاعف مشترك للعددين المذكورين، لكنه ليس مضاعفهما الأصغر.

طريقة أخرى : نفكك العددين إلى عوامل أولية فنجد $18 = 2\times3^2$ و $24 = 2^3\times3$. ومن ثم نستخلص أن

$$2^3\times3^2 = 8\times9 = 72$$

هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين، وذلك بأخذ جداء كل العوامل باعتبار أكبر أس لها.

2. تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 84 و270.

نتبع الطريقة الثانية. لنفكك العددين إلى عوامل أولية : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ و $270 = 2 \times 3^3 \times 5$. ومن ثم نستخلص أن

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 8 \times 27 \times 35 = 3780$$

هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين، وذلك بأخذ جداء كل العوامل باعتبار أكبر أس لها.

3. أوجد طول المربع الذي يمكن تبليطه بمستطيلات طول وعرض كل منها 18 سم و 27 سم. نريد أن يكون لطول هذا الضلع أصغر قيمة ممكنة.

للإجابة عن هذا السؤال يكفي البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين ... فهو يمثل طول المربع المطلوب (لأن هذا الضلع ينبغي أن يقسم في آن واحد على 18 وعلى 24). إذن فطول ضلع المربع هو (حسب المثال الأول) 72 سم.

ملاحظة

بنفس الطريقة نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد.

5. نبذة تاريخية

قبل أكثر من 4000 سنة مضت، استخدم الفلكيون من قدامى البابليين الكسور الناتجة عن تقسيم وحدة إلى 60 جزءًا، ثم تقسيم كل جزء من هذه الأجزاء إلى 60 جزءًا، وهكذا. ومازال هذا النظام معمولاً به في تحديد الزمن وفي قياس الزوايا بالدقائق والثواني.

وخلال النهضة العلمية في العالم الإسلامي جاء العلماء العرب والمسلمون بطريقة لتسهيل حساب الكسور في النظام الستيني. وكان أول من قام بذلك السموءل بن يحيى المغربي (توفي عام570 هـ / 1175م). ثم جاء بعده غياث الدين الكاشي (توفي عام 839 هـ/1436 م) فطوّر طريقة السموءل في كتابه الشهير "مفتاح الحساب". ويبدو أنه هو أول من اخترع الكسور ليسهل الحساب لأولئك الذين يجهلون الطريقة الستينية.

واستخدم الرياضيون المصريون الذين ساعدوا في بناء الأهرامات قبل أكثر من 4000 سنة الكسور التي فيها البسط يساوي 1. وتسمى مثل هذه الكسور كسور وحدة. وقد أدى الاقتصار على استخدام كسور الوحدة فقط، إلى ضرورة التعبير عن الأجزاء الكسرية الأخرى على شكل مجاميع. فعلى سبيل المثال يتم التعبير عن $\frac{3}{4}$ بدلالة كسور الوحدة على الشكل $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

وقبل 200 قرن كتب الإغريق عن الكسور بشكل يكون فيه البسط في الأسفل والمقام في الأعلى، ولم يفرقوا بين البسط والمقام بخط. ثم توجهوا فيما بعد إلى كتابة الكسور بشكل يكون فيه البسط في الأعلى، والمقام في الأسفل. وقد أخذ الهنود بهذه الطريقة في كتابة الكسور من اليونانيين القدامى.

وخلال القرن الثامن الميلادي فتح العرب بلاد الهند وتعلموا هناك النظام العشري وطريقتهم في كتابة الكسور. وقد نشر العرب والمسلمون، خلال القرون الثلاثة الموالية هذه المعلومات في غربي آسيا وشمالي إفريقيا وأسبانيا. ثم انتشرت خلال أواخر القرن الخامس عشر الميلادي في أوروبا

عدة كتب في الحساب شرحت استخدام الكسور والنظام العشري. وبعدما عُرِفت هذه الكتب وتم الاطلاع عليها، بدأ عدد كبير مـــن الأوروبـــيين في استخدام الكسور عند إنجاز العمليات الحسابية اليومية.

أما الآن فإن العديد من المسائل التي كانت تُحَل عن طريق الكسور وباستخدام الورقة والقلم، قد أصبحت تحل باستخدام الحاسبات الإلكترونية التي تعبّر عن الكسور بالنظام العـــشري. ونظـــرًا لهـــذه الـــتغيرات فـــإن استخدامات الكسور تقل يوما بعد يوم. ومع ذلك تظل الصيغة الكـــسرية أداة مهمة للتعبير عن المعدلات والنسب والقسمة، كما تظل ذات أهميـــة في الجبر وفي بعض فروع الرياضيات.

❖ النسبة والتناسب

نسبة عددين هو كسر بسطه ومقامه عددان، نسميهما **حَـــدَّيْ النـــسبة**.
وتكتب النسبة بين عددين يمثلهما الحرفان a و b كما يلي: $\frac{a}{b}$.
لاحظ أن كل النسب المئوية تسمى نسبًا، فقولنا 40% يمكن أن يكتب $\frac{40}{100}$.

وقد تُستخدم النسبة لوصف عدد من العلاقـــات. فمـــثلاً يمكـــن استخدام النسب لتحديد العلاقة بين كميتين تكوّنان مزيجًا ســـائلاً. فـــإذا احتوى مزيج على 5 لترات من العصير و15 لترًا من الماء، فإن نسبة العصير في الماء هي $\frac{5}{15}$، المساوية لــ $\frac{1}{3}$. نعبّر عن ذلك بالقول إن نسبة العصير في الماء هي ثلث. أما نسبة العصير في المزيج فهو $\frac{5}{20}$ المساوية لــ $\frac{1}{4}$. نعبّـــر عن ذلك بالقول إن نسبة العصير في المزيج هي ربع.

كما يمكن أن تشير النسبة إلى معدل حدوث أمر ما، مثـــل معـــدل استهلاك الوقود في سيارة. فمعدل استهلاك الوقود لسيارة تـــستهلك لتـــرا واحدا من الوقود كلما قطعت مسافة 20 كلم يمكن التعبير عنه بالنسبة $\frac{1}{20}$.

وتعدّ النسبة من أهم الموضوعات الشائعة في الاستعمالات الرياضية، كما أنها تلعب دورًا مهمًا في كثير من قوانين علـــوم الفلـــك، والأحيـــاء، والكيمياء، والفيزياء. ففي الفيزياء مثلا، تشكل النسبة الأســـاس لمفهـــومي السرعة والتسارع. والملاحظ أن الكثير من القوانين تحتوى على ثوابت نسبية مشهورة. وتستخدم فكرة التناسب أيضًا فى العلوم الاجتماعيـــة والفنـــون. كما يستخدمها المعماريون في تصميم النماذج المجسمة وفي رسم خـــرائط المباني، إلخ.

لنتعرف الآن عن التناسب وبعض خواصه.

التناسب علاقة تكافؤ بين نسبتين. وعلى وجه التحديد فالمـــساواة $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تقول إن a يتناسب مع b بالطريقة نفسها التي يتناسب بهـــا c مع d. نلاحظ أن تلك المساواة تكتب أيضا علـــى الـــشكل $a.d=b.c$. ولذلك يقال عن النسب المتكافئة إنها متناسبة.

وفى التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، يسمى a الحد الأول و b الحد الثاني، و c الحد الثالث و d الحد الرابع.

ويسمى الحدان الأول والرابع طرفي التناسب، والثاني والثالث وسطي التناسب.

وتسمى القيمة المشتركة في التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ثابت التناسب، أي أن ثابت التناسب هو $\frac{a}{b}$ أو $\frac{c}{d}$.

وفي كل النسب يأتي حاصل ضرب الوسطين مساويًا لحاصل ضرب الظرفين (أي $a.d = b.c$). وتعطينا هذه الخاصية للنسب الطريقة الإجرائية لإيجاد الحد غير المعلوم في نسبة تكون الحدود الثلاثة الأخرى فيها معلومة.

مثال جبري : الحد غير المعلوم في التناسب $\frac{27}{12}=\frac{x}{4}$ هو x. يمكن التوصل إليه بحل المعادلة التي تعبّر عن أن حاصل ضرب الوسطين هو حاصل ضرب الطرفين، أي $12x = 27\times 4$. ومنه :

$$x=\frac{27\times 4}{12}=9 .$$

أما ثابت التناسب فهو $\frac{27}{12}$ الذي نجده مساويا بعد الاختزال لـ 2.25.

مثال هندسي : نسبة المحيط p على القطر R في أية دائرة، متناسبة مع النسبة نفسها لأية دائرة أخرى. وكل نسبة $\frac{p}{R}$ في أية دائرة تساوى العدد الشهير π، الذي قيمته التقريبية هي **3.14159**.

وقد غلبت على الكتب المدرسية تقديم موضوع النسبة والتناسب بأشكال توضيحية والعديد من الأمثلة. لنستعرض مثالا من هذا القبيل.

عندما يكون وزن كيس واحد من الطحين يساوي 2 كلغ فإن وزن كيسين يساوي 4 كلغ، ووزن 3 أكياس يساوي 6كلغ، ووزن 5 أكياس يساوي 10 كلغ. نمثل ذلك في الشكل التالي :

عدد الأكياس	5	3	2	1
الوزن بــ كلغ	10	6	4	2

لاحظ أن الانتقال من السطر الأول إلى السطر الثاني يتم بالــضرب في 2. أما الانتقال من السطر الثاني إلى السطر الأول فيتم بالقسمة على 2. ولـــذلك يعتـــبر 2 **ثابـــت** (أو معامـــل) **التناســـب**. ذلـــك أن $2 = \frac{10}{5} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$.

❖ النسبة المئوية

النِّسبة المئوية تشير إلى استخدام أجزاء المائة في الحساب. فكثيرًا ما نرى أعدادًا مثل 2%، 75% حيث الرمز % يعني في المائة. وتقرأ هـــذه الأعداد 2 في المائة، و 75 في المائة. وهكذا فإن النســبة 2% تعنـــي جزئين من المائة، و 75% تعني 75 جــزءاً من المائة.

وكما أسلفنا فإن النسب المئوية كسور اعتيادية. فالنسبة 2% هي $\frac{2}{100}$ و $\frac{75}{100}$. والنسب المئوية أيضا كسور عشرية، حيث يمكـــن كتابـــة النسبة 2% على الشكل $\frac{0.2}{10}$ أو **0.02**. كما أن 75% هـــي **0.75**.

تستخدم النسبة المئوية بكثرة في الحياة اليومية. فالبنوك تــستخدمها لحساب الفوائد على المدخرات والقروض. كما أن الضرائب تحسب بطريقة النسب المئوية من الدخل والأسعار ومقادير أخرى. وكــثيرًا مـــا يكتـــب الباحثون نتائج ملاحظاهم وتجارهم في شكل نسب مئوية. ومنـــذ قـــرون وعالم التجارة يستخدم لفظ "في المائة". ويبدو أن هذا التقليد يعود إلى عصر

الرومان الذين كانوا يستخدمون النسب المئوية في نظام الضرائب. وقد اعتاد التجار في العصور الوسطى على استخدام أجزاء في المائة والنسبة المئوية حتى قبل ظهور نظام الأعداد العشرية.

والواقع أن الناس لم يعودوا في حاجة ماسة إلى استخدام اللفظ "في المائة" بعد اكتشاف النظام العشري، فالرقم **0.25** لا يقل سهولة عن التعامل مع 25%، غير أن النسب المئوية قد تغلغلت في نسيج الحياة اليومية والمهنية والتجارية إلى درجة أدت إلى استمرار استخدامها.

لنر كيف يتم تحويل النسب المئوية إلى كسور وتحويل الكسور إلى نسب مئوية

لتحويل نسبة مئوية إلى كسر اعتيادي أو عشري نحتاج فقط إلى كتابة النسبة المئوية في صيغة أجزاء من المائة.

– **تحويل النسبة المئوية إلى كسور اعتيادية:** لتحويل نسبة مئوية إلى كسر اعتيادي نزيل الرمز % ثم ندخل مقامًا قدره 100.

مثال ذلك : لدينا $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. وبالتالي فالكسر المساوي للنسبة المئوية 25 % هو $\frac{1}{4}$.

كما أن $\frac{37.5}{100}=\frac{3}{8}$. وبالتالي فالكسر المساوي للنسبة المئوية 37.5 % هو $\frac{3}{8}$.

– **تحويل النسب المئوية إلى كسور عشرية:** لتحويل نسبة مئوية إلى كسر عشري نزيل الرمز % ونضع الفاصلة العشرية بعد خانتين إلى اليسار.

مثال ذلك : لدينا 0,25 = 25 % . وبالتالي فالكسر العشري المساوي للنسبة المئوية 25 % هو 0,25.

كما أن $0,375 = 37.5\%$. وبالتالي فالكسر العشري المساوي للنسبة المئوية $37.5\ \%$ هو $0,375$.

– **تحويل الكسور إلى نسب مئوية .** لتحويل كسر اعتيادي إلى نسبة مئوية نقسم البسط على المقام لنحصل على كسر عشري، ثم نحرك الفاصلة العشرية خانتين إلى اليمين ونلحق الرمز % .

أمثلة

1. اكتب الكسر $\frac{15}{20}$ على شكل نسبة مئوية.

يتم ذلك بضرب البسط والمقام في 5 :

$$\frac{15}{20} \overset{\times 5}{\underset{\times 5}{=}} \frac{75}{100}$$

ومن ثمّ فالنسبة المئوية التي يمثلها هذا الكسر هي $75\ \%$.

2. اكتب الكسر $\frac{23}{25}$ على شكل نسبة مئوية.

يتم ذلك بضرب البسط والمقام في 4:

$$\frac{23}{25} \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{=}} \frac{92}{100}$$

ومن ثمّ فالنسبة المئوية التي يمثلها هذا الكسر هي $92\ \%$.

3. اكتب الكسر $\frac{12}{15}$ على شكل نسبة مئوية.

يتم ذلك بقسمة البسط والمقام على 3، ثم ضربهما في 20 :

$$\frac{12}{15} \overset{\div 3}{=} \frac{4}{5} \overset{\times 20}{=} \frac{80}{100}$$

ومن ثمّ فالنسبة المئوية التي يمثلها هذا الكسر هي 80 %.

❖ **أمثلة في النسبة المئوية**

هب أننا نريد حساب 4 % من العدد 50. نجد المطلـــوب عنـــد إجراء العملية التالية كما أسلفنا : $\mathbf{50 \times \frac{4}{100}}$ فنجد 2. وهو المطلوب.

كما أن 30% من العدد 72 هو $\mathbf{21.6 = 72 \times \frac{30}{100}}$.

و 75% من العدد 920 هو $\mathbf{690 = 920 \times \frac{75}{100}}$.

و 250% من العدد 32 هو $\mathbf{80 = 250 \times \frac{32}{100}}$.

حساب عدد كنسبة مئوية من عدد آخر : النسب المئوية كسور مقامهـــا مائة، ولذا يمكن استخدام هذه الطريقة لإيجاد النسبة المئوية التي يمثلها عـــدد ما إلى عدد آخر.

هب أننا نريد إيجاد النسبة المئوية من العدد 30 التي يمثلـــها العـــدد 15. نكتب المسألة أولا في الـــصيغة التاليـــة $\mathbf{30x = 15}$. ومـــن ثم نجـــد $\mathbf{x = \frac{15}{30} = 0.5 = \frac{50}{100}}$. وبالتالي فالنسبة المطلوبة هي 50%، أي أن 15 هو 50% من 30. يمكن تقديم المعطيات والمطلوب في أربــــع خانـــات كالتالي :

15	؟
30	100

وإذا سمينا المجهول a فسيكون حلا للمعادلة $30\times a = 100\times 15$ (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين).

– مثال ثان : احسب العدد 17 كنسبة مئوية من 340. نمثل المعطيات والمجهول في الأربع خانات التالية :

17	؟
340	100

ومن ثم يأتي أن المطلوب هو حاصل العملية التالية $5 = \frac{100\times 17}{340}$. وبالتالي فإن 17 هو 5% من العدد 340.

– مثال ثالث : احسب العدد 420 كنسبة مئوية من 70. نمثل المعطيات والمجهول في الأربع خانات التالية :

420	؟
70	100

ومن ثم يأتي أن المطلوب هو حاصل العملية التالية $600 = \frac{100\times 420}{70}$.

وبالتالي فإن 420 هو 600% من العدد 70.

هذه المسائل يمكن حلها أيضا بمقارنة النسب. فعند تحديد النسبة المئوية من العدد 30 التي يمثلها العدد 15 مثلاً، فإننا نحاول إيجاد عدد تكون نسبته إلى 100 مساوية لنسبة 15 إلى 30.

لنتساءل الآن : إذا علمنا أن 6 هو 25% من عدد ما، فما هذا العدد؟ نمثل المعطيات والمجهول في الأربع خانات التالية :

6	25
؟	100

وللحصول على المجهول نتذكر القاعدة القائلة إن حاصل ضـــرب الطـــرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، أي أن المجهول يُعطَى بحاصـــل العمليـــة: $\frac{6\times100}{25} = 24$. إذن 6 يساوي 25% من 24.

مثال ثان : 17 هو 40% من أي عدد ؟ نمثل المعطيـــات والمجهـــول في الأربـــع خانات التالية :

40	17
100	؟

وللحصول على المجهول نتذكر مرة أخرى القاعدة القائلـــة إن حاصـــل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، أي أن المجهول هنا يعطَـــى بحاصل العملية التالية : $\frac{17\times100}{40} = 42.5$. إذن 17 يساوي 40% مـــن 42.5.

مثال ثالث : 46 هو 115% من أي عدد ؟ نمثل المعطيات والمجهـــول في الأربع خانات التالية :

115	46
100	؟

وللحصول على المجهول نتذكر للمرة الثالثة القاعدة القائلة إن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، أي أن المجهول هنا يعطي بحاصـــل العملية التالية : $\frac{46\times100}{115} = 40$. إذن 46 يساوي 115% من 40.

❖ تماريــــــن

تمرين 1

يقع بيت أحمد على رقعة من الأرض مساحتها ربع هكتار. اشترى والـــده رقعة أرض مجاورة مساحتها ثلاثة أثمان الهكتار. ما مساحة رقعـــتي الأرض معًا؟

الجواب

علينا أن نجمع ربع هكتار وثلاثة أثمان هكتار. يتم ذلك بالعمليـــة التاليـــة بمراعاة توحيد المقامات وطريقة جمع الكسور عند تساوي المقامات :

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 2}{4\times 2}+\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

وبالتالي فمساحة رقعتي الأرض الإجمالية هي خمسة أثمان هكتار.

تمرين 2

تستعمل ليلى ربع ملعقة من البنّ في إعداد فنجان واحد من القهوة. كم ملعقة من البنّ يجب أن تستعمل في إعداد ستة فناجين من القهوة؟

الجواب

علينا بضرب رُبُع في 6 فنجد :

$$\frac{1}{4}\times 6=\frac{1\times 6}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3\times 2}{2\times 2}=\frac{3}{2}=1.5 .$$

وبالتالي فإن إعداد ستة فناجين من القهوة يتطلب 1.5 ملعقة، أي ملعقـــة ونصف من البنّ.

تمرين 3

يستطيع محمد قياس المسافات بالخطى. ويبلغ متوسط طول خطوتـــه ثلاثـــة أرباع متر. وتبلغ غرفته 7 خطوات طولاً و 6 خطوات عرضًا. فكم طول غرفته؟ وكم عرضها بالأمتار؟

الجواب

يتم حساب الطول كما يلي :

$$\frac{3}{4}\times 7=\frac{3\times 7}{4}=\frac{21}{4}=5.25\,.$$

وبالتالي فطول الغرفة هو 5.25 متر.

كما يتم حساب العرض على النحو التالي :

$$\frac{3}{4}\times 6=\frac{3\times 6}{4}=\frac{18}{4}=4.5\,.$$

إذن فطول الغرفة هو 4.5 متر.

تمرين 4

تدفع كثير من الشركات عمولات لرجال مبيعاتها بمقدار معين من المال لكل وحدة يبيعونها. وغالبًا ما تكون العمولة نسبة مئوية محددة من سعر الوحدة المباعة. لنفترض أن بائعًا يتلقى عمولة مقدارها 15% من ثمن أي ســـلعة يبيعها. ما مقدار ما يكسبه إذا باع ثلاجة بمبلغ 25000 دينار؟

الجواب

المطلوب هو حساب 15% مـــن 25000. إذن مقـــدار العمولـــة هـــو $\frac{25000\times 15}{100}$، أي 3750 دينارا.

تمرين 5

تستخدم النسب المئوية أحيانا في المقارنات. فهي تعيننا مثلا في مقارنة حجم المبيعات بحجم السلع المعروضة. وتستخدم لدى الشركات والبنوك لحساب الأرباح والخسائر. كما يستعملها المهندسون لمقارنة معدلات الإنتاج مع الأهداف المسطرة.

هب أن أحد الوكلاء اشترى دراجة من مصنع بمبلغ 7500 دينار ويريد أن يربح 25 % من سعر بيع الدراجة. فما المبلغ الذي عليه أن يطلبه ثمنا للدراجة، وكم سيكون ربحه؟

الجواب

إذا جمعنا الربح وثمن شراء الدراجة من المصنع (أي 7500 د.ج) فسنجد أن هذا المجموع يساوي ثمن البيع. وبما أن الربح يساوي 25% من سعر بيع الدراجة فإن تكلفة الدراجة من المصنع (أي 7500 د.ج) يجب أن تكون 75% من الثمن الذي يطلبه الوكيل. إذن تصبح المسألة على هذا المنوال (باستخدام قاعدة حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين) :

75000	؟
75	100

وبالتالي فثمن البيع هو $\frac{75000\times100}{75}$، أي 10.000 د.ج. أما الربح فيقدر بالعملية التالية : $\frac{25\times10.000}{100}$، أي 2500 د.ج.

تمرين 6

هب أن موظفا اقترض 60.000 دينار من البنك بسعر فائدة سنوي قدره 6 %. ما قيمة الفائدة التي يجب عليه أن يدفعها شهريا؟

الجواب

نبدأ أولا بمعرفة كم تساوي 6 % من 600.000 دينار. إنها $\frac{6\times 600.000}{100}$، أي 36.000د.ج. إذن فعلى الموظف دفع 36.000 د.ج. للبنك كفائدة على القرض لعام واحد.

ولمعرفة ما يجب عليه دفعه كل شهر يكفي تقسيم 36.000 على عدد الشهور في السنة، أي 12. فنجد أن المبلغ المطلوب شهريا هو 3000 د.ج.

تمرين 7

هب أن ملعبا يبيع تذاكر لمباراة كرة القدم بسعر 1500 د.ج. للتذكرة الواحدة وهذا السعر يشتمل على 10% كضريبة مبيعات على دخل الملعب من التذكرة. ما دخل الملعب من كل تذكرة؟

الجواب

يشتمل السعر على كل من الدخل و10% ضريبة المبيعات. ولهذا تمثل 1100 د.ج. نسبة 110% من الدخل. إذن تصبح المسألة تتمثل في إيجاد عدد تكون نسبة 110% منه مساوية لمبلغ 1100 د.ج.

هذا العدد يحسب كالتالي :

1500	؟
110	100

وعليه فالدخل هو $\frac{1100\times 100}{110}$، أي 1000 د.ج.

IV

توجيهات الخبراء في تدريس الحساب

توجيهـــات

نقدم في هذا الفصل توجيهات مفيدة في تدريس مادة الحساب أثناء المرحلة الابتدائية. وهذه التوجيهات منبثقة في الواقـــع عـــن آراء مختلـــف المختصين. فمنهم خبراء تابعين لهيئات رسمية تعنى بتـــدريس الرياضـــيات، ومنهم مشاهير في الرياضيات اهتموا بتدريسها.

وقد قدمنا لمحة تاريخية عن العدد والحساب ولخصنا في عدة أمـــاكن التوجيهات العامة التي ينبغي أن تراعى في تدريس هذه المادة.

❖ مقدمة

تشتكي المدارس الابتدائية في كل أنحاء العالم من الصعوبات المتزايدة التي تجدها في تلقين دروس الحساب وجعل التلميذ يستوعب كيفية إجراء العمليات الأربع والمفاهيم الأساسية في الحساب. ورغم ذلك قلَّ ما نجد في المدارس تلاميذ يعيدون سنتهم لأنهم لم يحفظوا مثلا جدول الضرب عن ظهر قلب أو لأنهم لا يحسنون إجراء عملية الجمع. وأما التلميذ فيعرف اليوم صعوبات جمة في إدراك مفهوم العدد وخواصه المتشعبة. كما تواجهه عوائق تقف حجر عثرة بينه وبين العمليات الحسابية، سيما إذا ما تعلق الأمر بإجراء العمليات الأربع المألوفة. وقد زاد الطين بلة تفاقمُ استخدام الآلة الحاسبة التي صارت تقوم بجلّ العمليات الحسابية المطلوبة من التلميذ حتى أن بعض المربين أصبحوا يرون هذه الآلة نقمة على تلميذ هذا العصر.

ويلاحظ الخبراء أن التلاميذ في هذا المستوى ينتقلون إلى مرحلة التعليم المتوسط وهم لا يفرقون بين العدد والرقم، ويقضون وقتا غير قصير لإجراء أبسط العمليات الحسابية إذا ما منعوا من استعمال الآلة. كما يشير المربون إلى ثغرات في الإلمام بمبادئ المنطق الذي تبنى عليه مختلف العمليات الحسابية. وهناك أيضا نقص في توظيف الذاكرة لتحتفظ بالعمليات الانتقالية قبل بلوغ النتيجة النهائية.

ويشكو المعلمون في مختلف المستويات من كون التلاميذ يتسرعون في إجراء الحسابات دون محاولة التأمل في المسألة المطروحة، ورسم خطة الحل أو الإجابة قبل هذا وذاك. كما يلاحظ هؤلاء المعلمون أن التلاميذ

غالبا ما يعجزون عن توظيف المعلومات المتوفرة لديهم، بل إنهم غالبا ما يقلبون الأمور فيحاولون تكييف معطيات المسألة المطروحة مع تلك المعلومات بدل القيام بالعكس.

إن مسألة تدريس الحساب في المدارس الابتدائية بوجه خاص صار موضوع نقاشات حادة دون أن يتوصل الخبراء إلى طريقة ناجعة تضمن النتيجة. ويلاحظ في بلاد الغرب – التي يحسبها البعض تسيطر على هذا الوضع التربوي – أن نتائج الدراسات الميدانية تثبت بأن معظم تلاميذهم "لا يميّزون بين الرقم والعدد" ولا يتحكّمون في أدنى تقنيات الحساب ويقضون مدة طويلة للقيام بأبسط الحسابات إن حُرِموا من استخدام الآلة. ويشير معلّموهم إلى أن هؤلاء التلاميذ "لا يتقنون نظام العدّ العشري" المتداول في عصرنا و"لا يحسنون التعامل مع الكسور"، وهذا يعني أنهم لا يلِمّون بمفهوم العدد.

لتناول هذا الموضوع يرى البعض أن هناك طريقتين متداخلتين تسمحان بالتأمل في العوائق التي يلقاها التلميذ في درس الحساب : تتمثل الطريقة الأولى في إعادة النظر في المدرسة وتنظيمها لتحرير طاقة التلميذ مراعين في ذلك مستجدات المجتمع الحادي والعشرين. أما الطريقة الثانية فتستجوب التاريخ وتبحث في الكيفيات التي مكّنت الحضارات المتعاقبة من تسوية القضايا المرتبطة بالعدّ والحساب والقياس. ومن ثم تبرز العوائق الراسبة في ذهن تلميذ هذا العصر، إذ ينبغي ألا ننسى بأن لغة وأدوات الرياضيات اليوم هي "تشْكِلَة" من النتائج التي تراكمت خلال آلاف السنين. ولذلك سنتحدث في البداية عن شيء من التاريخ.

ومن جهة ثانية فإن فرنسا تحتل المرتبة الثانية (بعد الولايات المتحدة) في البحث الرياضي، وتجربتها في هذا الاختصاص عريقة وتعود إلى قرون عديدة. وقد استطاعت لحد الآن أن تحافظ على هذا المكسب في مستوى البحث (خلافا لوضعها بالنسبة للاختصاصات الأخرى) غير أن الإصلاحات التي أجرتها على منظومتها التربوية لم تكلل بالنجاح. ومن المعلوم أن المناهج الفرنسية في مجال الرياضيات خلال الستينيات من القرن العشرين كانت تميل إلى التجريد لأسباب تاريخية يضيق المقام لذكرها هنا، وشيئا فشيئا تخلى المربون وواضعو البرامج المدرسية عن هذا الاتجاه. ومن ثمّ نجد ثراء كبيرا في آراء الخبراء المتضاربة. وهذا الثراء هو الذي جعلنا نركّز في هذا المقال على المدرسة الفرنسية ومواقف رجالها.

أما بخصوص الولايات المتحدة فعلينا ألا نعتقد بأنها في منأى من قضية الانشغال بطرق تعليم الرياضيات، ولا أدل على ذلك من إنشاء الرئيس بوش في أبريل 2006 لجنة قومية للرياضيات لتقديم الاستشارة على المستوى القومي في مادة الرياضيات وتدريسها وتحسين مستوى أمريكا في هذا الفرع. وقد قدمت اللجنة تقريرا أوليا يقع في 16 صفحة في يناير 2007، أكدت فيه الحاجة الماسة إلى القيام بتدابير ناجعة من أجل النهوض بتدريس الرياضيات في البلاد بعد أن لاحظت تدني المستوى في المدارس والمعاهد.

❖ لـــمحة تاريخية عن العدد والحساب

هناك إدراك عالمي لدى الخبراء التربويين اليوم بأن أحد أسباب سوء تعلم الحساب هو الإهمال الملاحظ في توظيف تاريخ الأفكار، سيما تطور نظام العدّ والعمليات الحسابية : كيف بَنَى العقل البشري، تحت تأثيرات بيئية وثقافية وظرفية متعددة الأشكال، العدد ونظام العدّ لبنةً لبنةً؟ وكيف استخدم في ذلك ما وصله من الأعمال التي أنجزت خلال القرون المتعاقبة. دعنا نلقي نظرة سريعة عن أهم المراحل التاريخية التي مرّ بها مفهوم العدد والعمليات الحسابية الأولية. ذلك أن التأمل في تطور مفهوم ما يفيدنا في المجال التربوي عندما نبحث في كيفية توصيل هذا المفهوم إلى المتعلم.

1. كيف كانت البداية؟

في البداية، قبل 300 ألف سنة، لم يكن الفكر البـــشري يـــدرك مفهوم الوحدات العددية. ويمكن أن نتخيل بأن الحيوانات وقتئـــذ كانـــت ضخمة ترى الجنس البشري كفرد من أفرادها، ولا يمثل سوى قطعة من لحم أو فريسة صالحة للأكل عند الجوع. وربما كان بعض البشر أو كلهم يرون أنفسهم كذلك. كما أن مفهوم الحدود الجغرافية والملكية لم يكن معروفـــا آنذاك، فأرض الله واسعة تسع لجميع خلقه ولا مجال للتنافس على الامتلاك. وإن كان الأمر كذلك فما الحاجة للعد والحساب وتحديد المساحات؟

وبمرور الزمن تنقّل الإنسان من بقعة إلى أخرى. وتزايد عدد البشر وتجمّعوا في أماكن معينة تمتاز بوفرة الماء أو سهولة الاحتماء أو خصوبة تربتها فصار الفرد أو الجماعة تمتلك قطعة من الأرض تسكنها، وربما تفلح

جزءا منها، ولها حدود تفصلها عن باقي البشر. والتجمعات السكانية تقضي بأن كل واحد يحتاج إلى خدمة الآخرين، ومن ثمّ نشأت الحرف وتعددت، فهذا حداد، وذاك إسكافي، وهذا نجار، وذاك مزارع، الخ. والحرفيون يحتاجون، بحكم طبيعة نشاطهم، إلى حساب الطول والمساحة والحجم والوزن. وكل هذه المسائل لا يمكن حلّها إلا بالعدّ والحساب والإلمام بقواعدهما.

وعندما زادت النشاطات التجارية والاقتصادية والتعاملات المختلفة بين الناس صار العدد وتطويره موضوعا بالغ الأهمية. ومما زاد تدريجيا في انشغال الأفراد والمجتمعات بموضوع العدد وترقيته والبحث في خصائصه اهتمامهم المتنامي بالشؤون العلمية مثل الجغرافية والفلك.

ولا شك أن الإنسان كان قبل آلاف السنين يستخدم أصابعه في إجراء عمليات الحسابية، وكذا الحجارة وحصى الرمل ونحوها. وربما كان الإنسان يخزّن بكيفيات مختلفة بعض النتائج الحسابية لاستخدامها مستقبلا. كانت الأشكال الأولى للأرقام عبارة عن رموز تتكون من خطوط (بعضها غير مستقيم) عمودية أو أفقية، كل خط منها يساوي 1. لكن هذه الأشكال صارت شيئا فشيئا لا تفي بحاجيات الناس لكتابة الأعداد الكبيرة، ولذلك تبنّوا رموزا ما فتئت تزداد فعالية.

2. الحساب عند قدماء المصريين والبابليين وغيرهم

كان المصريون القدماء يستخدمون منذ حوالي 4 آلاف سنة قبـــل الميلاد رمزا خاصا للرقم 10. وهكذا فكتابة العدد 11 مـــثلا لا يتطلـــب سوى رقمين (بدل 11 رقما). وكان العدد 99 قبل ذلك الوقت يتطلـــب 99 رمزا فأصبح لا يتطلب أكثر من 18 رمزا أو رقما. وبطبيعة الحال، فلو كان النظام العشري هو القائم آنذاك لما احتاجوا إلى إضافة مضاعفات 10. والملاحظ عند قدماء المصريين أن موقع الرقم في كتابة العدد لا يهمّ في هذه الحالة، وترتيب الأرقام أيضا لا يؤثر في قراءة العدد ... فلا معـــنى لـــديهم لمرتبة الآحاد ولا لمرتبة العشرات، الخ.

وظهرت أيضا أنظمة عدّ أخرى في العهود الغابرة مثل تلك التي ابتدعها البابليون الذين لجئوا إلى النظام الستيني المستعمل في تحديد الزمن (انظر كيف تشتغل الساعات) والقياسات الفلكية وبعض الحسابات الرياضية. وكان السومريون والبابليون يكتبون الأرقام مستخدمين رسوما مسمارية أفقية أو عمودية.

ويعتقد بعض المؤرخين أن السومريين هم أول من ســـجّل الأعـــداد بشكل متميّز، حوالي 3200 سنة قبل الميلاد، وتركوا لنا آثارا شـــاهدة علـــى ذلك. وكان لهذا الإبداع أثر إيجابي على تجارتهم واقتصادهم. كمـــا اســـتعملوا نظامين للترقيم، أحدهما تجميعي بسيط مثل الذي كان سائدا لـــدى الـــشعوب القديمة.

وعلينا أن نضيف بهذا الشأن أن الرومانيين استخدموا في بعض الحالات نظام عدّ يعتمد على الأساس 12. كما استخدم قبائل المايا Maya في أمريكا الجنوبية نظاما يعتمد على العدد 20 ... فكان يرمز إليه بفأس بينما رمزوا للعدد 60 بثلاثة فؤوس. والواقع أنه يمكن تصنيف أنظمة العد إلى 3 أصناف هي :

- العدّ التجميعي الذي يستعمل فقط فكرة الجمع،

- هناك صنف آخر يمزج بين الجمع والضرب. فالعدد 60 يمكن التعبير عنه برمزين يدلان على عملية ضرب 6 في 10،

- صنف ثالث يراعي موقع الرقم أو الرمز في الكتابة.

3. الأرقام تتطور

- الأرقام اليونانية : لجأ الإغريق إلى نوعين من العدّ : كان الأول مبنيا على الحروف الأولى التي تبدأ بها أسماء الأرقام. أما النوع الثاني للترقيم فقد أدخل في القرن الثالث قبل الميلاد حيث استخدمت الأبجدية اليونانية كلها للدلالة على الأرقام، إضافة إلى رموز ثلاثة من الأبجدية الفينيقية. ويسمح هذا النظام بتمثيل أعداد كبيرة باستخدام عدد معقول من الرموز (27 رمزا بالإضافة إلى الأعمدة).

- الأرقام الرومانية : يسمح نظام الرموز المستخدمة عند الرومانيين بالتعبير عن كل الأعداد المحصورة بين 1 ومليون باستخدام 7 رموز. ونلاحظ أن الرموز تقرأ في النظام الروماني من اليسار إلى اليمين. وعندما نضع مَدّة فوق رقم فمعناه أنه مضروب في 1000. ولذلك فمن الناحية

النظرية يمكن بهذه الطريقة كتابة أي عدد صحيح، لكن الأمر ليس كـذلك من الناحية العملية. ومع هذا، فالعيب الكبير في الرموز الرومانية يكمن في أنها لا تسمح بإجراء الحسابات الكتابية السريعة.

– الأرقام في الهند : اجتهد قدماء الهنود في البحث عن تسهيل عملية الترقيم فتعاملوا مع الأعداد الكبيرة بوضع أسماء خاصة تدل على مضاعفات العدد 10 حتى وصلوا إلى مائة مليون. وفي اللغة السنسكريتية القديمة هناك تسميات لكل مضاعفات الرقم 10 حتى بلغوا العدد المساوي لـ 1 متبوعا بثلاثة وعشرين صفرا.

ونجد لدى الهنود إلماما بالنظام العشري في الترقيم. وكانوا يستعملون تسعة رموز للإشارة إلى الأعداد من الواحد إلى التسعة. ورغم ذلك لم تكن الطريقة الهندية في كتابة الأعداد واضحة بالقدر الكافي في العديد من الحالات. فعلى سبيل المثال فإن كتابة العدد 307 يتطلب منهم كتابة الرقمين 3 و 7 وترك فراغ بينهما أو علامة تدل على خلو مرتبة العشرات. كما تتطلب كتابة العدد 30007 ترك 3 فراغات. وأنت تتصور الغموض الذي يطرأ في هذه الحالة لدى محاولة التمييز بين فراغ واحد وفراغين أو أكثر من الناحية العملية في المؤلفات. ولذلك قام الهنود في مرحلة ثانية بملء الفراغات السالفة الذكر بدوائر صغيرة أو نقاط تشبه الصفر.

4. الحساب عند العرب

يستعمل الناس اليوم ما يسمى في الغرب بالأرقام العربية. والواقع أن هذا النظام قد شرع في تصميمه الهنود قبل الميلاد بثلاثة قرون، ثم أخذ العرب والمسلمون على عاتقهم تطوير هذا النظام ورموزه. ويؤكد المؤرخون بناء على المخطوطات المتوفرة لديهم أن الأوربيين شرعوا في استعمال الأرقام العربية ابتداء من القرن العاشر الميلادي.

ومن الأهمية بمكان أن نشير إلى أن ظهور الإسلام كان حافزا كبيرا في البحث والتنقيب في المجال العلمي في شتى المجالات، ومنها الرياضيات والحساب. وهكذا اهتم المسلمون بالرقم والعدد والحساب لقضاء حاجاتهم والسير قدما نحو تأسيس حضارة معالمها لا زالت حاضرة اليوم لتشهد على عمقها وأصالتها.

كان العرب في بداية الأمر يرمزون للأرقام بحروف أبجدية. ثم توصلوا إلى صياغة أشكال للأرقام واستخدموها في حسابهم. وقد قسم المسلمون الحساب العملي إلى حسابين، هما الحساب الغباري (أو الحساب الهندي) وحساب اليد (أو الحساب الهوائي). والحساب الغباري هو الحساب الذي يحتاج الناس خلال استعماله إلى أدوات بسيطة أو معقدة كالقلم أو اللوح أو الغبار (التراب). أما الحساب الهوائي فهو الحساب الذي لا يحتاج في استعماله إلى أية أدوات باستثناء اليد.

ومن المعلوم أن العلماء المسلمين اهتموا بالحساب الهوائي وقننوه في كتبهم الحسابية ووضعوا له قواعد لتسهيل استغلاله في حل مسائل الحساب العملي الذي تحتاجه الحياة العامة في التعاملات التجارية وغيرها. وأبسط طرق الحساب الهوائي القاعدة التي نوضحها من خلال إجراء عملية الجمع التالية : 356 +483. للقيام بهذه العملية نتبع الخطوات الخمس التالية التي ينبغي أن تتم دون أية كتابة حيث لا نعتمد أثناء الجمع سوى على الذاكرة وحركات اليدين:

أ) 300+400=700.

ب) 50+80=130.

ج) نجمع حاصلي الجمع السابقين فنجد : 700+130=830.

د) 6+3=9.

ه) نجمع ما تحصلنا عليه في الخطوتين الثالثة والرابعة فنجد المطلوب وهو : 830+9=839.

وكان الهنود يجرون حساباتهم على اللوح والتراب ففضّل العرب القيام بذلك مستخدمين الورق والحبر لأن التراب تذريه الرياح فيزول ما سجّل عليه من حساب. ومن المعلوم أن المسلمين هم الذين عرّفوا بالحساب الهندي إذ لم يكن يتداوله آنذاك إلا القليل من الناس سيما التجار، بل لم يكن منتشرا حتى في الهند ذاتها. وتشمل العمليات الحسابية التي تناولها علماء المسلمين عدة عمليات منها : جمع الأعداد وتضعيفها والطرح (المسمى التفريق) والضرب والقسمة واستخراج الجذور.

وقد بلغ علم الحساب عند العرب والمسلمين مستوى من الرقي جعلهم يتجاوزون الجانب العملي المتصل بصفة مباشرة بحياة الناس. وهكذا راحوا يبدعون القوانين والنظريات المختلفة التي تفيد في حل مسائل متنوعة أسهمت في بناء الحضارة العربية الإسلامية.

5. ظهور الآلة الحاسبة

يجمع المؤرخون على أن أول آلة حاسبة كانت تلك التي ظهرت في الصين خلال القرن التاسع قبل الميلاد، وهي المسماة "المِـعداد الصيني". وهذا على الرغم من أنه لم يكن في الواقع آلة بالمعنى الحديث إذ ليس فيه ما يتطلب شيئا من علم الميكانيك. وأصبحت هذه الآلة تتكوّن بعد تطويرها من إطار مربع أو مستطيل الشكل يصنع عموما من الخشب، وتتخلّله قضبان أفقية متوازية تحمل سبع كرات خشبية أو زجاجية تنزلق يمينا ويسارا لتقترب أو تبتعد من قضيب آخر شاقولي يقسم الإطار الخشبي إلى قسمين. أما طريقة الحساب فهي تتم بتحريك الكرات، وتقرأ النتائج حسب وضعية تلك الكرات داخل الإطار. ولا زال المعداد إلى اليوم محل اهتمام، ولا زالت تجرى به بعض المسابقات الحسابية في الشرق والغرب ويتخذ كأداة تعليمية في العديد من المدارس.

ويعتبر عام 1617 لدى مؤرخي العلوم تاريخا بارزا في الابتكارات الخاصة بالحاسبات حيث قام الأنكليزي جون نيبير Napier (1550-1617) في تلك السنة بإنجاز جداول متحركة تتكوّن من قضبان يؤدي تحريكها إلى إجراء عمليات حسابية بسرعة كبيرة مقارنة مع ما يقضيه البشر دون استعمال آلة. وقد حظيت هذه الجداول، بفضل طريقة حسابها

السريع، باهتمام كبير من قبل الفلكيين والرياضيين. ثم قام الأنكليزي إدمون غنتر Gunter (1581- 1626) عام 1620 بتحسين ابتكار نابيير فصارت تلك الجداول أشبه بالمساطر الحسابية التي تم تداولها حتى نهاية الستينيات من القرن العشرين.

وتحقّق خلال الأربعة قرون الماضية تقدم ملحوظ في مكْـــنَـــنَة الحساب على يد الألماني ولهلم شيكارد Schickard (1592-1635) الذي صمّم عام 1624 "ساعة حاسبة"، وهي آلة تقوم بالعمليات الأربع. ولسوء الحظ فإن هذه الآلة لم تصنع قط. ثم تلاه الرياضي والفيلسوف الفرنسي بليز باسكال Pascal (1623-1662) وجاء بآلته الحاسبة الشهيرة، التي لا تحسن سوى إجراء عمليتي الجمع والضرب، ابتكرها صاحبها عام 1642 وهو غير ملم بأعمال من سبقوه في هذا المجال.

ومن المحاولات الأخرى صناعة مسطرة حاسبة من قبل الإنكليزي وليم أوغتريد Oughtred (1574-1660) عام 1657. نشير في هذا السياق إلى أن هذا العالم هو الذي أدخل في الرياضيات الرمز × كعلامة لعملية الضرب. وبعد ذلك قـــام الألماني غوتفريد ويلهلم ليبنيتز Leibniz (1646-1716) عام 1673 بتحسين آلة باسكال فأدخل عليها إمكانية إجراء عمليتي الضرب والقسمة. ومن ثم اعتبرت آلة ليبنيتز من قبل بعض المؤرخين أول آلة حاسبة قادرة على إجراء العمليات الأربع بطريقة ميكانيكية، إضافة إلى استخراج الجذور التربيعية.

6. الابتكارات تتواصل لتبسيط الحساب

تواصلت الأبحاث خلال عشرات السنين من أجل تحسين أداء آلتي باسكال وليبنيتز حتى تصبحا قابلتين للتسويق، لكن بدون جدوى. فظل استخدام هذه الآلات حكرا على بعض العلماء المبتكرين دون سواهم. لكن حلول القرن التاسع عشر بتحولاته الصناعية ونشاطاته المتعددة في المجال التجاري سرّع من وتيرة البحث في موضوع الآلة الحاسبة لأنها صارت من ضروريات الحياة الاقتصادية. و لم تظهر ثمرة هذه الأبحاث إلا ابتداء من سنة 1820.

وقد ظهرت في مطلع القرن التاسع عشر الميلادي آلة حاسبة ميكانيكية – حجمها كحجم الطاولة – سماها صاحبها توماس دي كولمار Thomas de Colmar (1785-1870) "أريتمومتر arithmometer ". جاءت بعدها آلة الإنكليزي شارل باباج Babbage (1792-1871) الذي حاول أن يجعل منها آلة تحلّ المعادلات وتجري العمليات المعقدة في التحليل الرياضي. لكن عراقيل تقنية حالت دون تحقيق هذا الحلم.

ويرى المؤرخون أن آلة باباج كانت في الواقع حاسبة تضم كل مركبات ومواصفات الحواسيب التي ظهرت إلى الوجود في منتصف القرن العشرين ... بل يذكر أن ما صنعته شركة آي بي آم IBM خلال السبعينيات من القرن العشرين هو إنجاز لمشروع آلة باباج التي صممت في مطلع القرن التاسع عشر !! وعلى كل الحال فإنه يمكننا القول بأن الأفكار الأساسية لصناعة الآلات الحاسبة كانت موجودة في منتصف القرن التاسع عشر، سيما بعد ظهور أعمال الإنكليزي جورج بول Boole (1815- 1864) الذي نشر كتابا عام 1847 يعتبر أساس الحسابات التي تقوم بها أية آلة.

تلك هي أهم المحطات التي مرّ بها العدد والعمليات عليه حتى وصل بنا الأمر إلى اختراع الآلة الحاسبة الحديثة التي لا زال أداؤها يتحسن يوما بعد يوم. واللافت للانتباه أن الثمرة التي نجنيها اليوم في حقل الحساب بكل مركباته لم تكن بفعل شخص بعينه، أو مرحلة زمنية خاصة، بل كانت حصيلة تطور فكري شامل شارك فيه، كما أوضحنا، علماء كثيرون وحضارات أصيلة متعاقبة عبر القرون. وهو ما يدعونا إلى التأمل مليا — نحن رجال التربية والتعليم — في هذا التطور للعدد والحساب عندما يتعلق الأمر بوضع مناهج تربوية تعنى بمادة الحساب خصوصا، والرياضيات عموما. كما أن الواجب يستوقفنا لتوظيف هذه المعلومات التاريخية في سبيل إدراك العوائق لدى تلاميذ اليوم في استيعاب درس الحساب.

❖ الخبراء يتفطنون

قليل من الناس يعلمون أن الرياضي الألماني الشهير ديفيد هيلبرت Hilbert(1862-1943) كان قد ألقى محاضرة فريدة من نوعها عـــام 1900 في المؤتمر الدولي الثاني للرياضيات. كانت هذه المحاضرة متميزة لأن صاحبها، بدل معالجة مسألة من مسائل الرياضيات المتعددة، راح يقدم جملة من المسائل المعقّدة بلغ عددها 23 مسألة مفتوحة.

ومن المعروف لدى المختصين أن طرح هذه المسائل هو الذي أدى دورا رئيسا في التقدم الباهر الذي حققته الرياضيات خلال القرن العشرين. إذ بلغ انشغال الرياضيين بهذه المسائل درجة جعلتهم يتوصلون إلى إنشاء فروع رياضية جديدة. وقد انقضى القرن العشرين ومازال الرياضيون يواصلون البحث في ما تبقى من مسائل هيلبرت ... لأنها لم تحلّ كلها بعد.

وما دام الأمر كذلك، ونظرا إلى ما آلت إليه أوضاع الرياضيات من تقدم في البحث لدى "الجيل القديم" وعزوف لدى "الجيل الجديد" إزاء الرياضيات خاصة والعلوم عامة فقد ارتأت مجموعة من الرياضيين سنة 1990 خلال انعقاد الجمعية العامة للاتحاد الدولي للرياضيات باليابان أن تكون سنة 2000 – وهي الذكرى المئوية لمحاضرة هيلبرت– السنة الدولية للرياضيات. وتبنى الاتحاد الدولي للرياضيات هذه الفكرة خلال اجتماعه المنعقد عام 1992، ونصّب لجنة تضم كبار الرياضيين العالميين أشرف عليها الرياضي الكبير جاك لويس ليونس Lions (1927-2001) من أجل جعل سنة 2000 سنة دولية للرياضيات، عسى أن تفتح أبوابا جديدة أمام رياضيي القرن الحادي والعشرين وتحفز الشباب والتلاميذ على الاهتمام بالرياضيات.

والملاحظ في العديد من البلدان، سيما في العالم المتقدم، أن الهوة التي تفصل عالَم الرياضيات بعامة الناس متزايدة الاتساع. فانتشرت ظاهرة عزوف الطلبة عن دراسة الرياضيات في عدد كبير من بلدان العالم. ومنذ فترة أدرك جلّ الرياضيين خطر هذا التوجّه الدولي العام على مصير الرياضيات. ولذا كان الاتحاد الدولي للرياضيات قد حدّد أهدافا ثلاثة لتظاهرات عام 2000 هي :

1) التحديات الكبرى للقرن العشرين،

2) الرياضيات مفتاح للنمو،

3) مظاهر الرياضيات.

ودعا الاتحاد كافة دول العالم والهيئات العلمية والثقافية إلى العمل على تجسيد هذه الأهداف. ولعل تبسيط عملية "تقريب الرياضيات من الجمهور العريض" تمرّ من خلال التعريف ببعض العلماء الذين أسهموا في صناعة الرياضيات عبر القرون المتوالية، والتركيز على مجريات حياتهم وأفكارهم. كما يراه البعض يمرّ عبر استعراض مواضيع متنوعة ذات صلة بالرياضيات في الصحف والمجلات ومختلف الكتب ووسائل الإعلام المسموعة والمرئية، وكذا شبكة الإنترنت والوسائل السمعية البصرية المختلفة. وينبغي الابتعاد، في كل الأحوال، عن الخوض في تفاصيل المفاهيم والنظريات الرياضية حتى لا يملّ القارئ أو المستمع.

لكن هذه المساعي التي قطعت شوطا كبيرا في بلاد الغرب لم تحقق النجاح المأمول في جلب شريحة واسعة من الباحثين، كما أنها لم تزد في اهتمام التلاميذ بالرياضيات. ومن المحاولات التي قام بها المربون على مستوى المناهج التعليمية إدماج الألعاب والمسائل الترفيهية في الرياضيات لشد انتباه التلاميذ. وحاولوا عندما أدركوا الصعوبات التي يتلقاها هؤلاء التلاميذ في استيعاب درس الرياضيات إلى إعادة النظر في طريقة إلقاء الدرس مستغلين ما جادت به التكنولوجيات الحديثة من وسائل جديدة. بل لجأ واضعو المناهج وخبراء التدريس أمام الفشل الواضح لهذه المحاولات إلى تخفيف المنهاج وتجريده من كل "العقبات"، أي من المفاهيم والدروس التي يجد فيها التلميذ صعوبة كبيرة.

وهكذا صارت العديد من المناهج الرياضية في البلاد المتقدمة وغير المتقدمة هزيلة تعتمد على الآلة والحلول الجاهزة وصار التلميذ يفتقد في تكوينه إلى المقدرة على التأمل والاستنباط واستخلاص النتائج عبر الاستدلال الذي يفرضه المنطق الرياضي. ومن ثم نرى أن الخبراء أنفسهم وقعوا بين نارين : هل نلتزم في مناهجنا بما تفرضه علينا صرامة الرياضيات ومتانة منطقها ودقة نتائجها حتى لو كلفنا ذلك ترك الكثير من الضحايا في صفوف التلاميذ غير القادرين على مواكبة هذا الأسلوب؟ أم نعالج في مناهجنا القليل من المعلومات الرياضية مركزين على الجاهز من الحلول دون أن نعير الاهتمام اللازم لما تتطلبه الرياضيات من تكوين فكري مجرد، وبذلك يتزايد اهتمام معظم التلاميذ بالرياضيات؟

والواقع أن آراء الخبراء تتأرجح بين الموقفين. بل ويصل بينهم الخلاف أحيانا إلى أشده. ويمكن القول إن الذين يميلون إلى الرأي الأول هم الباحثون وكبار العلماء، في حين يميل رجال التربية والسياسة إلى الرأي الثاني. وحجة الباحثين أن نوعية التكوين بالمدرسة على الطريقة الثانية لا تؤدي إلى تكوين علماء مفكرين وباحثين (عمدة المستقبل)، فلماذا لا نضحي من أجل ضمان وجود فئة قوية من الباحثين، لضمان كثافة البحث والتقدم العلمي في العالم؟ أما حجة أصحاب الرأي الثاني فتقول إنه من غير المعقول أن نعقّد المناهج إلى درجة نجعل التسرب المدرسي يتفاقم بنسب غير معقولة في البلاد.

❖ رأي أكاديمية العلوم الفرنسية

كان وزير التربية الفرنسي قد راسل يوم 14 ديسمبر 2006 أكاديمية العلوم الفرنسية العريقة يسألها رأيها في قضية تدريس مادة الحساب في المرحلة الابتدائية، قبل اتخاذ القرارات المناسبة. فشكلت الأكاديمية لجنة لدراسة الموضوع ثم أرسل تقرير الأكاديمية في نهاية يناير 2007 إلى الوزير الذي اتخذ على إثرها (في أبريل 2007) إجراءات ملزمة للمعلمين بدءا من السنة الدراسية 2007-2008.

وتلاحظ الأكاديمية في ديباجتها أن مستوى التلاميذ في المرحلة الثانوية في الحساب بات ضعيفا، ومردّ ذلك أسس الحساب التي لم يتم استيعابها بالشكل المناسب في المرحلة الابتدائية. كما يشير التقرير إلى أن المسألة المطروحة شديدة التعقيد نظرا لتواجد منهاج وتعليمات يعمل بها المفتشون التربويون والمعلمون، وهو ما يتطلب الحذر الشديد عندما يتعلق الأمر بوضع توصيات، وإلا أدى تدخل هذه الهيئة إلى تعميق سوء الفهم لدى رجال التربية والتعليم. وعليه ترى الأكاديمية أن من واجبها عدم اللجوء إلى إصدار توصيات تتطلب التنفيذ المباشر لهذا الأمر أو ذلك، بل تلح على ضرورة القيام بدراسات وتحاليل معمقة بعد هذه التوصيات، ولا يهم أن تتناقض مع رأي الأكاديمية.

ويلاحظ التقرير مثلا أنه تم في الماضي فصل دراسة الأعداد عن المقادير، أي بدل تدريس $12m = 7m + 5m$، نلقن التلميذ العملية $12=7+5$. وهنا يوصى بالرجوع إلى وصل الأعداد بالمقادير لأنها أكثر ثراء وأقرب إلى ذهن التلميذ. وقياس المقادير والكميات هي الأطوال

والمساحات والحجوم ثم الزمن ودرجة الحرارة، وعدد السكان، الخ. وترى الأكاديمية أن استعمال تمثيل المقادير في جداول وبيانات يمكن أن يكون مناسبة لإجراء مقارنات بين مختلف المقادير وتمهد الطريق لمعارف رياضية أخرى.

وفي موضوع الأسس المعرفية للحساب يؤكد الأكاديميون أن البحث في علم النفس المعرفي وعلم الأعصاب بين أنه إذا استثنينا عددا قليلا من الأطفال الذين يعانون من خلل في استيعاب مادة الحساب، مصدره الوراثة ونحوها، فكل الأطفال يمتلكون حدسا فطريا للحساب. وهذا الحدس يتمثل منذ نعومة الأظافر في القدرة على تقييم الكميات المتصلة والمتقطعة.

وهذه القدرة تنمو حتى في غياب في التربية والتعليم. وهكذا فالتلميذ يدخل المدرسة مزودا بكمّ من الحدسيات والمهارات ينبغي ألا نهملها وألا نحاربها بل ينبغي استغلالها وتوظيفها باعتبارها تمثل عمدة إدراك مغزى الحساب العددي. وقد أثبتت البحوث أيضا أن هناك ظواهر أخرى للحساب لا تتطور تلقائيا وتتطلب جهدا تعلميا.

إن الترميز العشري للأعداد والكسور تمثل لدى الطفل كائنات غير فطرية تتطلب تطوير تمثيلات ذهنية جديدة. وكذلك الشأن بالنسبة للربط بين العدد والفضاء. ومن المهم أن نعرف بأن تنفيذ خوارزميات الحساب الدقيق يتطلب جهدا معتبرا من التركيز والذاكرة. ويشير التقرير إلى أن البحث المعرفي يبيّن أن الحساب العددي غالبا ما يتم تلقينه بشكل سطحي. ولذا لا ينبغي أن نتذرع بالانشغال بكسب الآليات الذهنية على حساب الفهم والإدراك، إذ أن اكتساب الآليات يمثل محصلة طبيعية لممارسة منتظمة وواضحة في ذهن الطفل للحساب.

وفي باب المبادئ العامة لتعليم الحساب تلاحظ الأكاديمية أن الهدف من تعلم الحساب هدف مزدوج : تزويد الطفل بقاعدة صلبة من الآليات، ثم جعل هذه الحسابات ترتبط على الدوام بمغزاها الكمي وحل المشكلات الملموسة. والعقبة الأسوء التي ينبغي هنا تفاديها هي تعلم الحلول الحسابية الجاهزة البعيدة عن إدراك المفاهيم الحسابية.

ويؤكد الأكاديميون الفرنسيون على ضرورة بدء تعليم الحساب بممارسة موازية للعد والعمليات الحسابية الأولية. وهم يرون أن مفهوم العمليات يتم استيعابه بشكل أفضل إذا ما تمت من خلال مسائلة متصلة بالواقع المعيش. ومن جهة أخرى هناك عدة مقاربات كلها ضرورية ومتكاملة (منها الحساب الذهني، الحساب الكتابي، الحساب بالآلة والعلاقة بين الحساب الدقيق والحساب التقريبي). وينبغي تزويد التلميذ بمعارف "سيالة" ومرنة.

وفي موضوع استعمال الآلة الحاسبة والألعاب يرى التقرير أنها صارت اليوم ذات استعمال يومي من قبل الجمهور، ولها مكانتها في حياة الأطفال، وهي كثيرة الاستعمال في المدرسة، سيما في علوم الطبيعة. ويمكن أن يستفيد منها خيال الطفل في المرحلة الابتدائية إذ تدعوه إلى استكشاف قواعد الحساب من خلال اللعب. وقد أثبتت دراسة بالولايات المتحدة أن استخدام الألعاب في سن مبكّر بشكل مناسب يسمح للتلاميذ – خاصة القادمون من وسط فقير – بالحصول على معدّلات أعلى بعد أن كان مستواهم ضعيفا. لكن الأكاديميين سرعان ما يستدركون وينبهون بأنه لا ينبغي على الآلة أن تعوض الجهد الفكري.

ومن جهة أخرى يذكّر التقرير بوجود رابط قوي بين الحساب والهندسة يعود تاريخه إلى آلاف السنين. والفكرة التي تتمثل في كوننا نستطيع قياس الفضاء بواسطة الأعداد، وكوننا نستطيع تعويض فكرة هندسية ببعض الحسابات تتعلق بالإحداثيات تؤدي دورا بارزا في العديد من فروع الرياضيات. وعليه ينبغي إدخال هذه الروابط في وقت مبكر بالمدرسة الابتدائية.

لنلخص ما جاء في تقرير الأكاديمية في النقاط التالية :

1. يتطلب تحسين مستوى التلميذ في الحساب إجراءات حذرة.

2. ينبغي أن يتم تدريس الحساب مستغلا المواد الأخرى (اللغة، العلوم الطبيعية، الجغرافية الرياضة).

3. تعلم الحساب يعتمد على حدس العدّ لدى الطفل ومادة ترفيهية (لعب).

4. ينبغي أن يبدأ تعلم الحساب بممارسة متوازية للعد وللعمليات الأربع حتى بلوغ الأعداد العشرية والكسور.

5. تتطور المهارة في الحساب اعتمادا على عدة مقاربات، منها الحساب الذهني.

6. لا يمكن تطوير تعلم الحساب بمعزل عن مادة الهندسة.

7. تكتسي النسبة والتناسب أهمية بالغة سيما في العلوم الطبيعية. ومن ثم وجب التحكم في بعض العمليات على الكسور.

8. مسألة تعلم الحساب مسألة إرادة وعمل ومتعة. والألعاب تمثل مصدرا طبيعيا للحساب.

9. علينا أن نطمح في الوصول إلى أن يحب كافة التلاميذ الحساب، ونحن نستطيع ذلك.

❖ رأي الرياضي الفرنسي لورنت لافــورغ Lafforgue

لعله من المفيد قبل تقديم رأي العالم لافورغ أن نعرف بهذه الشخصية الفذّة حتى نتعرف على مكانته المرموقة : ولد لورنت لافورغ عام 1966 في باريس، ودرس بها وتخرج من كلية معلميها العريقة عام 1986. وانضم كباحث في الرياضيات إلى المركز القومي للبحث العلمي الفرنسي (CNRS) عام 1990. وتحصل على الدكتوراه من جامعة باريس الجنوبية عام 1994. وقد نال عام 1998 ميدالية من مركز البحث السالف الذكر، ثم جائزة كلاي Clay الأمريكية عام 2000، تلتها جائزة أخرى من أكاديمية العلوم الفرنسية عام 2001. كما أحرز على أكبر استحقاق في الرياضيات (وهي ميدالية فيلدز Fields المعادلة لجائزة نوبل التي لا تمنح للرياضيين) وعمره لم يتجاوز 35 سنة.

وفي عام 2004 صار عضوا في أكاديمية العلوم الفرنسية. يشغل لافورغ الآن منصب أستاذ دائم بمعهد الدراسات العليا العلمية الشهير (IHES) الكائن بباريس، وهو منصب لا يفوز به إلا قلّة من الأساتذة لا يتجاوز عددهم عدد أصابع اليد.

وقد اهتم لافورغ مبكرا بموضوع تدريس الرياضيات وكتب عنه الكثير. ولذلك عيّنه رئيس الجمهورية الفرنسي في خريف سنة 2005 عضوا في المجلس الأعلى للتربية. ويضم هذا المجلس تسعة أعضاء يتم تعينهم لمدة ست سنوات. والمجلس هيئة استشارية أنشئ يوم 23 أبريل 2005 من أجل العمل على توجيه المدرسة ورسم مستقبلها. ويقدم المجلس في هذا السياق الاستشارة بطلب من وزير التربية والتعليم العالي. كما يقدم سنويا تقريرا غير سري لرئيس الجمهورية حول وضع المنظومة التربوية وحصيلة التجارب الميدانية.

أما عضوية لافورغ في هذا المجلس فلم تدم طويلا إذ أن الرسالة الحادة اللهجة التي وجهها إلى رئيس المجلس والتي يدين فيها وضع التربية وتدريس مادة الرياضيات في فرنسا جعلت السلطات الفرنسية العليا تطلب منه الاستقالة قبل أول اجتماع للمجلس. واستقال لافورغ ونشرت بعد ذلك لائحة تطلب من الرئيس الفرنسي عدم قبول هذه الاستقالة وقعها آلاف المهتمين، لكن ذلك ظل بدون جدوى. ومع ذلك استمر لافورغ في إبداء آرائه الناقدة بشأن المنظومة التربوية الفرنسية كلما أتيحت له الفرصة.

ولهذا كله تعتبر آراء لافورغ في المنظومة التربوية بالغة الأهمية لمكانته العلمية ومواقفه المستقلة وانشغاله الدائم بإعادة تأسيس المدرسة الرياضية الفرنسية. ذلك ما يبرر اهتمامنا بآرائه في هذا الباب.

1. نظرة لافورغ للرياضيات وعلاقتها باللغة

تناول لافورغ في كتاباته موضوع اللغة التي يوليها أهمية قلّ نظيرها في تكوين الطفل. لنستعرض بعض أفكاره في ربطه بين اللغة والرياضيات. لقد أوضح لافورغ أن الرياضيات تقوم على قواعد منطقية كما وضعها أرسطو، أي على شكل من أشكال القواعد اللغوية، ليست بالضبط تلك القواعد التي تتحكم في النص الأدبي، بل هي قبل كل شيء قواعد وضع الجمل. والرياضيات، مهما بلغ تقدمها، تتمثّل دائما في صياغة "جمل بسيطة وتافهة" توضع الواحدة منها تلو الأخرى، وهي جمل "ينبغي عليها احترام نفس القواعد الأولية. وبدون تلك القواعد، وبدون تلك الضوابط اللغوية ليست هناك رياضيات."

تقوم الرياضيات في نظر لافورغ على فنّ التحكم في قواعد المنطق والوصل بينها بمرونة، وتقوم أيضا على المهارة المكتسبة من الممارسة المتمثلة في تحويل أشكال الاستدلال. وبدون هذه الحرية في صياغة الجمل صياغات متعددة ومختلفة من أجل الخضوع إلى متطلبات الاستدلال فليست هناك رياضيات. وتعتمد الرياضيات كذلك على فنّ التركيب. فكل نصّ رياضي له نقطة انطلاق يواصل بعده مساره نحو هدف منشود بإتباع مسالك تتماشى مع ذلك الهدف، وهي "مسالك يمكن أن تتباعد عن بعضها البعض لتلتقي بعد ذلك أو تتقاطع أو تتفرع قبل أن تؤول مجتمعةً نحو هدفها. وبدون المقدرة على تنظيم الاستدلال وترجمته في نص ليقرأ من قبل آخرين "فليست هناك رياضيات بالمعنى المتداول لدى الرياضيين."

ويرى لافورغ أن الرياضيات تتقدم عبر القرون بفضل النضج البطيء والمتواصل لمفاهيمها، أي "بفضل ألفاظ جديدة تمكّن من التحكم في الكائنات". إذا لم يحمل كائن اسمًا فإنه يظل "خارج سيطرة الإنسان، وغير مرأي، ويستحيل تمثّله فكريا". وحتى يشرع الرياضيون في إدراكه خلال بحثهم الطويل فإنهم يستخدمون الكناية والتعابير الغامضة ... "وقد يحدث أن تكون تلك الكناية معبّرة عن مضمون مئات الصفحات من النصوص ... ذلك هو الثمن الذي ندفعه عندما نكون فاقدين للكلمات، ويكون العقل منغمسا في محاولة التفكير بدون كلمات".

يقول لافورغ بوصفه رياضيا بأنه يحتك يوميا بباحثين منتشرين عبر العالم، ثقافاتهم شتى وأنماط حياتهم الشخصية مختلفة، وقناعاتهم ومعتقداتهم متعارضة ... غير أن وسط الرياضيات ليس وسطا تنازعيا": إن كان الموضوع هو الرياضيات فلا بد أن هناك دوما إجماعا في الرأي. إن الاحترام الدقيق لتلك القوانين عبر العالم بأكمله هو الذي يسمح بإنشاء فضاء مشترك.

وقد ربط لافورغ الجمال باللغة والحقيقة : "إن الجمال والحقيقة هما الكلمتان الرئيسيتان لكل رياضي، وأعتقد أن ذلك يصدق على كل رجل علم". يؤمن الرياضي بأن الحقيقة موجودة بشكل مستقل عن شخصه وعن الجميع، وهو يعتقد أن الحقيقة في انتظاره، وأن من مهامه البحث عنها. وهو يعلم أن الجمال هو أبرز ما يميّز الحقيقة، "وعندما يدرك الرياضي الحقيقة فجزاؤه هو أن يتأمل في جمالها ". لكن ينبغي أن نعترف بأن "جمال الرياضيات والعلوم صعب الإدراك"، وأنه لا يمكن بلوغه إلا بعد سنين طويلة من الدراسة.

2. نداء من أجل إعادة تأسيس المدرسة

كان لافورغ من وراء نشر نداء عنوانه "من أجل إعادة تأسيس المدرسة" وذلك بمعية أربعة من أشهر الأساتذة. وقد انضم إلى هذا النداء آلاف المتتبعين والمهتمين في فرنسا. وجاء في هذا النداء أن المدرسة الفرنسية صارت منذ عدة سنوات "مريضة" : فقد بلغ عدد التلاميذ نهاية المرحلة الابتدائية الذين لا يلمون بأبسط قواعد القراءة والكتابة والحساب نحو 30%. وبيّنت تقييمات عام 2005 أن 60% من هؤلاء التلاميذ لا يتقنون إجراء العملية المتمثلة في قسمة 60 على 4 ذهنيا، و 70% منهم لا يحسنون إجراء عملية الضرب 27×23.5 كتابيا. ويلاحظ النداء أن في إهمال المدرسة قضاء على الترقية الاجتماعية.

أما أسباب هذا الوضع فتعود إلى المناهج المدرسية الهزيلة التي لا تتوانى رغم ذلك في التعبير عن طموحات مفرطة. ومن السباب الأخرى، تقليص عدد الساعات للمواد الأساسية، وكذا فرض طرق تدريس جديدة على المعلمين لا تراعي تجاربهم، مبنية على مبدأ عدم التلقين وترك التلميذ يبني المعرفة من تلقاء نفسه. كما أن انتقال التلميذ من سنة إلى أخرى أصبح لا يخضع لضوابط مرتبطة بمستواه بل يخضع لحسابات سياسية.

ويقدم النداء الخطوات التي يراها الضرورية للنهوض بالمدرسة الفرنسية، وهي :

1. لا بد من تصميم مناهج جديدة للمرحلة الابتدائية، تكون قصيرة في نصها، صريحة في تعابيرها، واضحة للجميع في معانيها. وعليها أن تقدم قائمة المعارف الواجب تدريسها دون فرض طرق تعليمها.

2. ردّ الحرية التربوية للمعلم حتى يتصرف وفق خصوصيات تلاميذه ومعطيات درسه مستغلا تجربته الخاصة. وعلى المفتشين تقييم أداء المعلم على أساس النتائج المحصل عليها.

3. فرض شروط صارمة في ما يخص مستوى التلميذ وانتقاله من سنة إلى أخرى. ولا يجوز أن نسمح لتلميذ بالانتقال إلى السنة الموالية إن لم يكن مؤهلا لاستيعاب مناهجها.

3. تعقيبات لافورغ على رأي الأكاديمية

اطلع لافورغ على رأي الأكاديمية الذي أوردناه أعلاه فقدم تعقيبات كتابية على مضمونه. وفي هذا السياق يلاحظ لافورغ أن النص لا يشدد على تكوين المعلمين ولا يؤكد بكفاية على أهمية ربط العدد بمختلف المقادير، إذ ينبغي التمييز بين مختلف المقادير. فإذا كنا نستطيع جمع الأطوال والمساحات والكتل فإننا لا نستطيع جمع درجات الحرارة، علما أن درجات الحرارة تفيد في إدخال الأعداد السالبة.

وأعاب المعقّب على الأكاديميين ضعف الإشارة إلى عاملي "التركيز" و"الذاكرة" ووضعهم "الجهد" و"اللعب" في نفس الكفة. ويعلق لافورغ عما ورد في التقرير بشأن تجربة الولايات المتحدة بالتنبيه إلى أن هذا البلد ليس مرجعا في هذا المجال مقارنة بدول الشمال الأوروبي (فنلندا، السويد،...) والمدرسة الروسية. وأوضح أنه احتك في فرنسا بالعديد من المعلمين والمعلمات وتبيّن له أن كثرة ممارسة الألعاب داخل الفصل تؤدي بتلاميذ المرحلة الابتدائية إلى التكاسل وعدم الرغبة في بذل الجهد.

أما استعمال الآلة فيحذر منه لافورغ، بل يراه كارثة على تعليم الحساب، ويقترح منع استعمال الآلة الحاسبة داخل الفصل في المرحلة الابتدائية. ذلك أن الآلة لا تمثل لدى الطفل سوى "صندوق أسود" يقوم بالحساب دون معرفة كيف يقوم بذلك، مسلمًا بهذا الدور دون محاولة فهم ما يجري. والواقع يبيّن أن تواجد الآلة الحاسبة في المدرسة يؤدي بمعظم التلاميذ إلى عدم بذل الجهد الفكري اللازم للتحكم في آليات الحساب.

ومن جهة أخرى يلاحظ لافورغ أن الحديث عن "التربية الرياضية" بدل "الرياضيات" خطأ لأن الرياضيات مادة خاصة ولا تكفي لتشكيل "تربية"، فهي "تعليم" وليست "تربية". ويآخذ لافورغ زملاءه الأكاديميين عندما يستعملون عبارات مثل "إن الأبحاث أثبتت"، مع أن النص غير موجه لمختصين في علم النفس والأعصاب، لأن ذلك يعني في نظره أننا نقدم "حججا سلطوية" وليس حججا علمية، في حين ينبغي ألا نشير سوى إلى لحجج ذات العلاقة المباشرة بتناسق مادة الحساب ومنطقها الداخلي.

ويشدد لافورغ على ضرورة استظهار بعض المعارف الرياضية عن ظهر قلب، مثل جداول الجمع والضرب. ويعيب على التقرير كونه لا يشير إلى ذلك موضحا أن هذا السلوك جعل أغلب التلاميذ في المرحلة المتوسطة، وحتى الثانوية، لا يلمون بجدول الضرب. ومن جهة أخرى لا يوافق لافورغ على وضع كل المقاربات المشار إليها (الحساب الذهني، الحساب الكتابي، الحساب بالآلة والعلاقة بين الحساب الدقيق والحساب التقريبي) في نفس الكفة.

❖ مقترحات فريق لافورغ

بحث لافورغ مع مجموعة من المعلمين والأساتذة في مختلف المواد بهدف الوصول إلى توصيات ناجعة تفيد في تدريس مادة الحساب في المرحلة الابتدائية. نستعرض في ما يلي أهم أفكار هذا الفريق :

1. أهداف وحدود تعلم الحساب في المرحلة الابتدائية

الهدف هو جعل التلميذ يلم بالمعارف الخاصة بالأعداد الطبيعية (0، 1، 2، 3، ...) وكتابتها في النظام العشري، ثم إتقان إجراء العمليات الأربع سواء بصفة مجردة غير مرتبطة بالمقادير أو ذات صلة بالأطوال والمساحات والحجوم والكتل والزوايا والزمن. وينبغي على التلميذ أيضا أن يكون قادرا في نهاية المرحلة الابتدائية على تحرير نص سليم لحل مسألة حسابية حتى لو كانت المسألة مستمدة من الواقع وتطلبت صياغة جمل توضيحية.

والغرض من ذلك هو تنمية التفكير والتدرّب على ترتيب الأفكار والتعبير عنها بتسلسل منطقي سليم، وهذا أمر أساسي يفيد في متابعة تعلم الرياضيات وعلوم الطبيعة أثناء المراحل الدراسية الموالية. وإذا كان أساس مادة الحساب في المرحلة الابتدائية هو الأعداد الطبيعية فإن حساب الكسور أمر مهم أيضا. ومن ثم تأتي أهمية الحساب التقريبي الأعقد من الحساب الدقيق، ولذا ينبغي تناوله في هذه المرحلة.

2. المبادئ العامة لتعليم الحساب في المرحلة الابتدائية

نقدم أدناه أبرز هذه المبادئ، مع العلم أن تطبيقها يتطلب متسعا من الوقت ينبغي توفيره من قبل الجهات المختصة :

- اكتساب آليات الحساب (إتقان كامل لجداول الجمع والضرب وطرق إجراء العمليات الأربع).

- تنويع وضعيات التعلم في تناول الأعداد والعمليات عليها.

- الإكثار من الأمثلة التطبيقية وتنويع المقاربات (مثل الحساب الذهني والحساب الكتابي، ...) علما أن المبدأ العام الذي يسير عليه كل تعلم هو التقدم خطوة خطوة من اليسير إلى العسير، ومن الأعداد الصغير إلى الأعداد الكبيرة، ومن الأشكال الهندسية البسيطة إلى المعقدة.

- إدخال المفاهيم الجديدة الواحد تلو الآخر معتمدين في ذلك على المعارف المكتسبة وحدس التلميذ.

- المراجعة والتذكير عند الانتقال من معارف مكتسبة إلى معارف جديدة.

- ضرورة إلمام التلميذ في آخر المرحلة الابتدائية بالخوارزميات العامة التي تبنى عليها العمليات الأربع.

- تعليم العد والعمليات الأربع في آن واحد.

3. الحساب الذهني والحساب الكتابي

ينبغي أن يبدأ العمل بهذين النمطين من الحساب مبكرا باستخدام الأعداد الصغيرة. ومن المهم أن يكون التلميذ قادرا على استظهار جداول الجمع والضرب عن ظهر قلب منذ السنوات الأولى حتى يتبيّن له بأن هذه الجداول يمكن استخدامها كجداول طرح وقسمة. وهناك تمارين عديدة تدعم هذه المكتسبات وترسخ هذه الآليات. وعندما يستوعب التلميذ الخوارزمية العامة للقسمة، نزوده أسبوعيا بتمارين تتناول هذه العملية كيلا تضيع منه آليات الحساب. كما يستحسن تدريب التلميذ على التأكد من نتيجته بوسائل حسابية مختلفة.

4. الحساب والقياس والهندسة

ينبغي تدريس قياس الأطوال والكتل في نفس الوقت الذي ندخل فيه الوحدات الفيزيائية ومضاعفاتها وأجزائها. ولا شك أن ذلك سيدعم الإلمام بالكتابة العشرية واستعمال الفاصلة وإدراك مفهوم القيمة التقريبية. وعلينا هنا التمييز بين الوحدات التي يمكن جمعها وتلك التي لا يجوز فيها ذلك. وهذا ينطبق أيضا على العمليات الأخرى.

وفي الهندسة ينبغي أن يدرك التلميذ أن المساحات يمكن جمعها، ثم نحسب مساحة شكل بعد تقسيمه إلى مربعات طول ضلعها الوحدة المعتبرة، ثم جمع هذه المساحات. وإذا استوعب التلميذ هذه الفكرة فسوف يمكنه محاولة تطبيقها على أي شكل من الأشكال الهندسية واستنتاج معلومات

حول مساحته. ومن المهم أن يتعلم التلميذ حساب مساحة الدائرة ومحيطها وزواياها. ويمكن في هذا السياق إدخال مربعات الأعداد.

وفي ما يخص الحجوم فلا بد من جعل التلميذ يدرك، كما في موضوع المساحات، أن حجم شكل في الفضاء هو مجموع حجوم مكعبات ضلعها يساوي وحدة القياس. كما ينبغي تعليم حجوم أهم الأشكال (من متوازي المستطيلات إلى الكرة). ومن المفيد التأكيد على أن حساب المساحة يدخل فيه على الدوام جداء طولين، وأن حساب الحجم يدخل فيه جداء ثلاثة أطوال أو جداء طول في مساحة. وتعتبر دراسة الحجوم مناسبة سانحة لتقديم مكعبات الأعداد. ومن جهة أخرى، نعرّف اللتر على أنه حجم مكعب ضلعه ديسمتر واحد. ومن ثمّ نربط بين الحجم والسعة. وبعد ذلك نعلم التلميذ بأن الكيلوغرام هو كتلة لتر من الماء. وهنا وجب إلزام التلميذ بذكر وحدة القياس كلما تعلق الأمر بمقادير فيزيائية.

5. الأدوات التي نستعملها في المدرسة

يقضي التلاميذ اليوم ساعات طوال أمام شاشات مختلفة تستوجب استعمال حاستي الرؤية والسمع بشكل مكثف. ويظل التلاميذ خلال تلك الفترة "مكتوفي الأيدي" إذا استثنينا ضغط أزرار الملمس أو نحوه. والملاحظ أن هذا الوضع يؤدي بالأطفال إلى عجز في ملامسة الواقع فينغلقون في عالم الخيال المبسط للأشياء إلى أقصى الحدود. وعليه ينبغي على المدرسة تصويب هذا الاتجاه وهذه التأثيرات. ومن ثم فلا مكان لجهاز حاسوبي ولا لشاشات أخرى في المدرسة الابتدائية ما دام التلاميذ غير قادرين على البرمجة الحاسوبية.

ومن هذا المنظور يجب إقصاء الآلات الحاسبة كأداة لتعلم الحساب. وقد أثبتت التجربة أنه كلما سمح للتلاميذ بإحضار الآلة إلى قاعة الدرس فأكثرهم يفرطون في استعمالها لسهولة استخدامها وسحرها التكنولوجي ... وهذا ما يخل بعملية تعلم الحساب والإلمام بجداول الجمع والضرب.

وفيما يخص تعلم العد والعمليات على الأعداد الصغيرة يعتبر المعداد الصيني أداة تربوية فعالة يمكن استعمالها حتى لدى تناول الأعداد الكبيرة، ولذا يستحسن تدريب التلميذ على استعمال هذه الآلة. كما يتعين على التلميذ إتقان استعمال المسطرة المدرجة والبركار والكوس والمنقلة وميزان الكفتين ومقياس درجة الحرارة، إضافة إلى استخدام المقص للرسم وإنشاء بعض الأشكال المستوية والمجسمات.

6. الأعداد والنسبة والتناسب

هناك استخدام آخر للأعداد والحساب تتزايد أهميته مع سن التلميذ، ويتمثل ذلك في حساب الأسعار والنقود المرتبطة بالمشتريات والمستلزمات المترلية. وما من شك أن التمارين من هذا النوع لها أكثر من فائدة. فحساب سعر البيع والتكلفة والضريبة والنسبة المئوية تتيح فرص استعمال العمليات الحسابية في مسائل عملية يهتم بها التلميذ.

من اللازم أن تحفظ القاعدة الثلاثية عن ظهر قلب، وينبغي ألا يتمثل استعمالها في آلية مجردة من الفهم، بل يعتمد على استدلال يفترض التمعن في مغزى النسبة والتناسب. وفي هذا السياق يجب استخدام هذه القاعدة في وضعيات مختلفة مثل الوضعيات المستنبطة من الواقع (مكونات

بعض المأكولات، تحويل القياسات الناجمة من تحويل الوحدات، تغيير السلم في تمثيل المسافات على خرائط الجغرافية والطرقات، نسبة الكتلة على الحجم، الكثافة بصفة عامة، نسبة المسافة على الزمن، نسبة تدفق الماء في نهر أو حنفية، التجزئة ...).

7. تحرير حلول المسائل والتمارين

يتعيّن أن نطلب من التلميذ منذ بداية تعلم الحساب إتقان خطه وعرضه على الورقة، سيما في كتابة العمليات. ولا بد من تدريب التلميذ مبكرا على تقديم إجاباته واضحة ودقيقة في جمل سليمة اللغة. كما ينبغي التدرج في تعقيد الأسئلة حتى يبلغ التلميذ مستوى "الاستدلال المنطقي" الذي ينبغي تقديمه في عدة جمل متسلسلة.

وعلى كل حال فهدف تعليم الحساب في المرحلة الابتدائية هو تعلم كيفية حل مسائل بسيطة مستنبطة من الحياة اليومية والعلوم الطبيعية. وعند الانتقال إلى المرحلة المتوسطة ينبغي على التلميذ أن يكون قادرا على الاهتداء بمفرده إلى مراحل حل المسألة المطروحة، وعرضها بشكل سليم من الناحيتين المنطقية واللغوية.

❖ رأي المجلس الأعلى للتربية الفرنسي

أوضحنا أعلاه دور المجلس الأعلى للتربية في فرنسا وتركيبته. دعنا نستعرض بإيجاز رأيه المقدم في شكل تقرير يقع في 39 صفحة موجه لوزارة التربية بتاريخ 27 أغسطس2007 لخص فيه ملاحظاته ومقترحاته حول وضع المدرسة الابتدائية الفرنسية في نهاية السنة الدراسية 2007/2006. وهذه أبرز النقاط المشار إليها في التقرير :

1. يبدو أن المستقبل المدرسي للتلميذ يحدد مبكرا

يحصل التلاميذ على نتائج متضاربة في نهاية المرحلة الابتدائية : نتائج 60% منهم مقبولة، و25% منهم حاصلون على مكتسباتهم هشة، و15% يعانون من صعوبات خطيرة. والملاحظ أن العوائق المكتشفة في بداية العهد الدراسي لا تتلاشى، بل تتفاقم مع الزمن. وهذا يعني أن التلميذ الضعيف في بداية المرحلة الابتدائية يظل مستواه ضعيفا حتى نهايتها.

2. الوسائل والأدوات التربوية لا تتكيف مع المستلزمات ولا تستعمل بشكل جيد

مثال ذلك : إعادة السنة في سن مبكر ليس أداة فعالة وتتعارض مع مبدأ تكافؤ الفرص. كما أن وسائل التقييم لا تستخدم بكيفية جيدة.

3. رياض الأطفال لا تضع كل التلاميذ في ظروف تسهل لهم النجاح في المدرسة الابتدائية

التعلمات في رياض الأطفال تؤدي دورا حاسما لدى التلميذ، غير أن هناك فروقا كبيرة بين ما تعبّر عنه النصوص الرسمية وبين الممارسات الميدانية.

4. تفتقد التعليمات على المستوى الوطني إلى التأثير في مجريات الأمور على المستوى الميداني

هناك تباطؤ في تطبيق القرارات، وهناك توزيع غير سليم للموارد البشرية. أما تكوين المعلمين بكل أشكاله فهو لا يراعي الحاجيات الميدانية.

5. تفتقد التعليمات على المستوى الإقليمي إلى الفعالية

التنظيم الحالي للمدرسة الابتدائية يعيق فعاليتها : هناك مدارس مبعثرة جغرافيا، وإدارة المدرسة لا يحكمها قانون واضح. كما أنه ينبغي إعادة النظر في دور المفتشين.

❖ خاتــمة

عندما نتأمل في مختلف الآراء الواردة سابقا أو تلك التي لم نتناولها فإننا لا شك نحتار في الطريق السالك الذي يمكّننا من معالجة قضية تحسين تعليم الحساب. وصعوبة حل المسألة يدل بوجه خاص في واقع الأمر على وجود عوائق لدى التلميذ لم تكتشفها الأبحاث بعد. فبالإضافة إلى العوائق المرتبطة بالمحيط الذي يعيشه تلميذ القرن الحادي والعشرين (تأثير الصورة والشاشة وتكاثر الوسائل الحديثة التي تلهي التلميذ عن واجباته التعليمية وعن بذل الجهد الدراسي) هناك عوائق خفية تكشفها الأبحاث الميدانية. هل ندري مثلا أن التلاميذ لا يدركون بسهولة لماذا نكتب 1582 مثلا بهذا الترتيب "العشوائي" للأرقام (1 قبل 5 و 8 ... علما أن 5 و 8 أكبر من 1)، ولا نكتب نفس العدد على الشكل 8521 أو 1258؟ هذا يعني أن التلميذ لا زال يخلط بين العدد والرقم. وهل ندري أنه من الصعوبة أن يستوعب بعضهم لماذا وضْع الصفر بجانب 8 لا يغير شيئا إذا ما كتبنا 08، وهو يغيّر الكثير (إذ يضرب 8 في 10) عند كتابة 80؟

والمدرسة الفرنسية التي استعرضنا بعض الآراء فيها ليست الوحيدة التي تعاني من ظاهرة صعوبة تعليم الحساب، سيما في المرحلة الابتدائية ... بل إنها تقدم صورة لما يجري في معظم بلدان العالم ومنها الجزائر. وتوضح تلك الآراء المتضاربة في بعض جوانبها (على الرغم من أنها صادرة من خبراء وعلماء وهيئات عليا متخصصة) أنه لا وجود لحل جاهز في العالم يمكننا من تجاوز هذه العقبة. ولذلك فالوضع في مدارسنا العربية يدعونا إلى التمعن في خصوصياته وزيادة الاهتمام بموضوع تدريس الحساب مع الاستعانة

بتجارب الغير. ولعل أبرز القضايا التي ينبغي البت فيها ومعالجتها في هذا السياق هي :

1. تحديد دور الآلة الحاسبة في المرحلة الابتدائية أثناء درس الحساب وخارجه : هدف الدرس ليس كيفية استعمال الآلة.
2. إلى أي مدى نستغل الوسائل الترفيهية والألعاب في مادة الحساب لشد انتباه التلميذ ومساعدته على استيعابها : الترفيه واللعب ليسا هدف درس الحساب بل وسيلة من وسائله المتعددة، والرياضيات ليست مادة ترفيهية.
3. تحديد المعلومات ذات الصلة بالرياضيات التي تتطلب الحفظ في ذاكرة التلميذ في كل طور دراسي : حشو الذاكرة ليس غاية، كما أن إخلاء الذاكرة من أساسيات الحساب الذهني والكتابي لا يخدم عملية التعلم.
4. إعادة النظر في ربط مكوّنات منهاج الحساب فيما بينها لتسهيل عملية التعلم : تعدد فروع المعرفة وتواجد الرياضيات فيها ينبغي أن يستغل في درس الحساب.
5. القيام بدراسات ميدانية دائمة ومتعددة الجوانب من أجل استخلاص العوائق التي تواجه التلميذ في درس الحساب : التجارب الميدانية هي أساس المعرفة، وهي حرية بتوجيهنا لوضع يدنا على مشاكل التعلم لدى التلميذ.

6. تكوين المعلم تكوينا مناسبا ومستمرا ليتمكن من أداء مهمته واكتشاف مواطن الضعف لدى التلميذ في مادة الحساب: لا أمل في تحسين تدريس الحساب حتى لو عرفنا مواطن الداء ما لم نهيئ المعلم لهذه المهمة.

7. العمل على إيجاد المحفزات التي تزيد في اهتمام التلميذ بالرياضيات واستيعابه لها : البحث عن هذه المحفزات في التاريخ وفي كل مكان، بما في ذلك البيت ووسائل الإعلام والشارع، ....

لا شك أن معالجة قضية تعليم الحساب ليست هينة، ومحاولاتنا – كما تبيّن تجاربنا وتجارب الغير – لا بد أن تعرف العديد من الآراء المتناقضة لأن طرق التدريس ليست علما دقيقا، فهو مبني على تجارب في عالم متحوّل بسرعة تفوق في الكثير من الأحيان سرعة تجاربنا. ورغم ذلك فهذا لا ينبغي أن يثني عزيمتنا لأن قوة الإرادة تؤدي في آخر المطاف إلى النجاح.

2

الهندسة

تقديم

كُتِب هذا الدرس في الهندسة وفق البرنامج المسطر من طرف المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم (الحراش) الهادف إلى تكوين مفتشي التعليم الابتدائي في مادة الرياضيات. وقد ارتأينا تقسيم هذا البرنامج إلى خمسة فصول هي :

1) تطور الهندسة ، 2) الهندسة الأقليدية والإنشاء الهندسي، 3) الزوايا والمثلثات4) التناظر ، 5) المضلعات والمجسمات.

وقد استعرضنا في الفصل الأول الجانب التاريخي لبعض المراحل التي مرت بها الهندسة، ثم وقفنا عند مختلف تشعبات الهندسة التي صارت اليوم تضم عديد الاختصاصات الفرعية. أما الفصل الثاني فيقدم مسلمات الهندسة الأقليدية وموضوع الإنشاء الهندسي مفصلا العديد من الحالات الإنشائية. وخصص الفصل الثالث لتقديم الزوايا وأنواعها والمثلثات وخواصها الأولية. وينتهي هذا الدرس بفصل يتناول المضلعات بمختلف أشكالها وكذا المجسمات مكتفين بالإشارة إلى الخواص الأولية والتعاريف الأساسية.

ولم نهتم بالجانب التدريبي (التمارين) إلا في مواقع قليلة، وأغفلنا هذا الموضوع مركزين في معظم الأحيان على المفاهيم وأهم الخواص. كما أغفلنا البراهين لأن المكان لا يسمح بتقديم كل التفاصيل، ولأن البرنامج يعفينا من ذلك إلا في بعض الحالات.

والواقع أن العائق الذي أتعبنا في كتابة هذا الدرس هو أن الجمهور الموجه إليه يحمل كله شهادة الليسانس لكنها متنوعة الاختصاص. فمن الجمهور من هو متخصص في الأدب العربي ومنهم من هو في التاريخ أو الفلسفة وربما من تخصص في الفيزياء أو الرياضيات، الخ. فكيف بنا والحال هذه أن نقدم درسا في الرياضيات يستفيد منه كل هؤلاء، وقد تباعدت مشاربهم ومعارفهم؟ لذلك حرصنا على ألا نستعمل الرموز والعلاقات الرياضية والمعادلات إلا نادرا وأن نكثف من استخدام الرسومات والأشكال الهندسية حتى نقرّب المفهوم الرياضي ما أمكن لغير المختصين، سيما والأمر هنا يتعلق بدرس في الهندسة.

نتمنى أن يكون هذا الدرس مفيدا للطالب المفتش مهما كان اختصاصه.

أبو بكر خالد سعد الله
قسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر

I

تطور الهندسة

تطور الهندســـــــة

نقدم في هذا الفصل لمحة تاريخية عن الهندسة وظهورهـــا ومختلـــف مراحل تطورها. كما نستعرض مسائل تاريخية ثلاث اشتهرت مـــن عهـــد الإغريق، وكذا عدة أنواع من الهندسات التي عرفت بعدئذ، آخرها هندسة ظهرت في السبعينيات من القرن العشرين، وهي الهندسة الكسورية. والهدف من ذلك تمكين القارئ من نظرة شاملة على موضوع الهندســـة وتفرعاتـــه الحالية.

❖ مقدمة

تعتبر الهندسة – التي تعني باليونانية "قياس الأرض"- فرعا قديما من فروع الرياضيات، وهي تبحث في خواص الأشكال سواء كانت في الفضاء أو المستوي. كما تهتم بالعلاقات بين كائناتها مثل النقاط والمستقيمات والمنحنيات والسطوح والأحجام. وتحدّد الهندسة أيضا قياسات الأطوال والمساحات والحجوم.

والهندسة حسب تعريفها المتداول هي علم الأشكال. لكن مثل هذا التعريف يمكن أن يؤدي بعيدا ويجعل هذا العلم يضم مسائل ومفاهيم لا تعنيه مباشرة. ولذا دعنا نقول إن للهندسة هدفا أساسيا يتمثل في دراسة الأشكال بالمفهوم الواسع حتى لو اختلفت الطرق وأوجه النظر المؤدية إلى ذلك.

ولعله من المفيد الإشارة إلى أن الرياضيين كانوا يسمَّوْن في أغلب الأحيان "مهندسين" حتى القرن التاسع عشر. و لم يتوقف علماء الهندسة عند موضوع الأشكال بل راحوا يبحثون في مسائل معقدة غالبا ما تكون وثيقة الصلة بفروع معرفية أخرى، كعلم الفلك والفيزياء والكيمياء والعمران، والطوبوغرافيا، وعلم الخرائط، الخ.

وقد تولّد عن ذلك ظهور هندسات جديدة، منها الهندسة الإسقاطية والهندسة الوصفية والهندسة الجبرية والهندسة التحليلية والهندسة اللاإقليدية (مثل هندسة ريمان Riemann وهندسة لوبتشفسكي Lobatchevski). وفي هذا السياق ظهرت منذ نحو ثلاثين سنة هندسة سميت الهندسة الكسورية (أو الفكرتالية). إليك إضاءات لبعض جوانب الهندسة، قديمها وحديثها، علما أننا سنمر مرّ الكرام على بعض المفاهيم دون

توضيحها توضيحا كاملا كيلا نزعج القارئ غير المختص في الرياضيات لأن هذا الفصل يسعى إلى تقديم أفكار عامة دون الخوض في تفاصيلها.

❖ متى ظهرت الهندسة ؟

يرجع تاريخ الهندسة إلى آلاف السنين، إلى عهد البابليين وقـدماء المصريين. فقد ظهرت الهندسة بوضوح حسب بعـض المـؤرخين لـدي المصريين والبابليين قبل 4000 سنة. كان المصريون يحتاجون إلى الهندسـة لمعرفة قضايا عملية وثيقة الارتباط بحياتهم اليومية، مثـل تحديـد أبعـاد ومساحات الحقول وإقامة البنايات التي تتطلب تـدقيق قياسـات الزوايـا القائمة، الخ.

ومما زاد في تطوّر وتطبيق المفاهيم الهندسية أن الفيضانات التي كان يتسبب فيها نهر النيل تؤدي بالمصريين إلى إعادة رسم مساحات الأراضـي وتحديد الأملاك كل سنة. وكانوا يستخدمون قواعـد بدائيـة وتقريبيـة، كقولهـم إن مساحة شكـل رباعي أطـوال أضـلاعه a، b، c، d هي $\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}$، مع الملاحظة أن هذه القاعدة صحيحة عندما يكون الشكل الرباعي مستطيلا. وقد اكتشف علماء الآثار مثل هذه القواعـد في الورق المعروف لدى قدماء المصريين.

ولاحظ المؤرخون أن المصريين كانوا يعرفون حجم جـذع الهـرم ومساحة الكرة. كما تم العثور على ألواح تحمل جداول كـان يـستعملها البابليون قبل 2000 سنة. وكانت هذه الجداول تتضمن سلسلة من المسائل يمكن ردها إلى معادلات من الدرجة الثانية.

وبعدها انتقلت هذه المعارف إلى اليونـــان. ويعتقـــد المؤرخـــون أن الفضل في إدخال الهندسة المصرية إلى اليونان يعـــود إلى طـــالس Thalès (600 سنة قبل الميلاد). ويعتبر طالس رائدا في المسائل الهندسية العملية مثل حساب ارتفاعات المباني بواسطة العصا والنسب بالاستفادة من الظلال التي يحدثها ضوء الشمس.

ثم عرفت الهندسة اليونانية ازدهارا كبيرا وتفرعت إلى مدرستين هما مدرسة فيثاغورس Pythagore (580- 500 قبل الميلاد) الـــذي زار مصر ومدرسة أقليدس (حوالي 300 قبل الميلاد).

1. هندسة فيثاغورس

اهتمت الهندسة بمفاهيم النقطة والمستقيم (أو الخـــط) والمـــساحة (السطح)، فالنقطة كانت آنذاك تعتبر حصاة (حبة من تراب) وليس كائنـــا بدون بعد. أما المستقيم فكان يعتبر سلسلة من الحصى عددها يمثـــل طـــول الخط. ومن ثمّ فكل القطع المستقيمة قابلة للقياس والإنشاء. ثم جاءت نظرية فيثاغورس الخاصة بالمثلث القائم لتدحض هذه المفاهيم.

إليك السؤال التالي : إذا اعتبرنا مثلثا قائما ومتساوي الساقين. فهل يمكن أن يكون وتره يساوي عددا أوليا m وكذلك ضلعه n؟ نفرض جدلا أننا أنشأنا مثل هذا المثلث. نستنتج من نظرية فيثاغـــــورس أن $m^2 = 2n^2$. ومنه يأتي أن m^2 زوجي، وبالتالي m زوجي. وهكذا يأتي أيـــضا أن n^2 زوجي، وعليه فإن n زوجي أيضا. فكيف يكـــون m و n أولـــيين؟ وبالتالي فإننا لا نستطيع أن ننشئ بهذه الطريقة كل الأطوال. هذا الوضـــع الجديد أحدث هزة في المفاهيم الهندسية في ذلك الوقت.

2. الهندسة الأقليدية

تأسست الأسكندرية عام 331 قبل الميلاد وصارت خلال وقت قصير مركز إشعاعي فكري في مختلف العلوم بما فيها الرياضيات. وقد عرفت المدرسة الرياضية في هذه المدينة 3 علماء من الطراز الأول هم أقليدس وأرخميدس (287-212 قبل الميلاد) وأبولنيوس Appolonius (200 قبل الميلاد).

وكانت أعمال هذه المدرسة قد توجت بدراسة هندسية بالغة الأهمية هي المعروفة بأصول أقليدس les Eléments التي ظلت خلال 20 قرنا منطلق كل عمل هندسي. وهكذا ظهرت مسلمات وضعها أقليدس في كتابه الشهير "كتاب الأصول" أسست الهندسة الأقليدية، وهي الهندسة التي تدرّس اليوم في كل مدارس العالم. وظل الاهتمام بهندسة أقليدس على أشده خلال قرون عديدة إلى أن ظهرت الهندسات غير الأقليدية.

وتضم أصول أقليدس 15 كتابا منها 13 كتابا من تأليف أقليدس. وتتناول هذه الكتب الـ 13 الأشكال الهندسية والمضلعات المحيطة بالدائرة والمحاطة بالدائرة والنسب والتشابه والهندسة الفضائية ونظرية الأعداد القابلة للقياس.

أكمل أرخميدس الأصول بدراسة معمقة حول الدوائر والكرات والاسطوانات. وقدم تقديرا للعدد π . أما أبولنيوس فقام بدراسة المخروطات.

❖ الإنشاء الهندسي

كان الإغريق يهتمون اهتماما بالغا برسم الأشكال الهندسية باستخدام المدور (البركار) كأداة لرسم الدوائر (وليس لقياس الزوايا أو الأطوال) والمسطرة غير المدرّجة، أي المسطرة التي لا تصلح سوى لرسم الخطوط المستقيمة ولا تفيد في أخذ القياسات. ونتج عن ذلك بروز العديد من المسائل الهندسية التي ظلت مطروحة خلال قرون عديدة. وقد سمح البحث عن حلولها بتطوير وتعميق المفاهيم الهندسية. ومن تلك المسائل الشهيرة التي أرّقت كبار الرياضيين نذكر 3 مسائل :

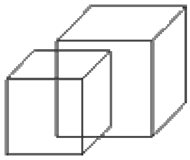
1. مسألة تضعيف المكعب

مسألة تضعيف المكعب تعني إنشاء مكعب حجمه ضعف حجم مكعب معطى، وهي تعني بإنشاء حرف مكعب بالمسطرة والمدور بحيث يكون حجمه ضعف حجم مكعب مفروض. يعني ذلك ضرب طول حرف المكعب المعطى في $\sqrt[3]{2}$. وقد اهتم عدد كبير من الرياضيين بهذه المسألة نظرا للأسطورة التي بنيت وراءها. وتبين في منتصف القرن التاسع عشر أن ذلك مستحيل. وباختصار فقد تم التوصل إلى هذه النتيجة عندما بحث بيير لورنت فنتسال Wantzel (1814-1848) في عدة مواضيع رياضية، منها ما يسمى بالأعداد الجبرية (ونقيضها، وهي الأعداد المتسامية) والأعداد القابلة لإنشاء وتوصل إلى نتيجة هامة تقول :

كل عدد قابل للإنشاء هو بالضرورة عدد جبري.

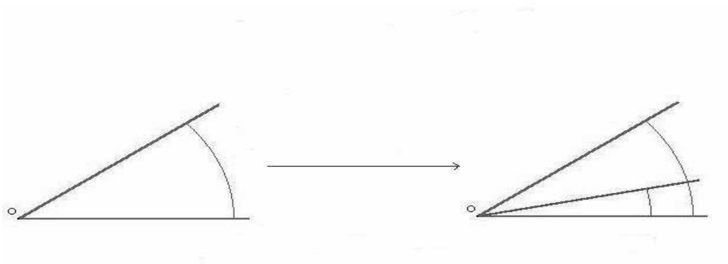
ثم توصل أيضا إلى نتيجة أكثر دقة عام 1837 معتمدا على أعمال النرويجي نيلز هنريك آبل Abel (1802-1829) تقول :

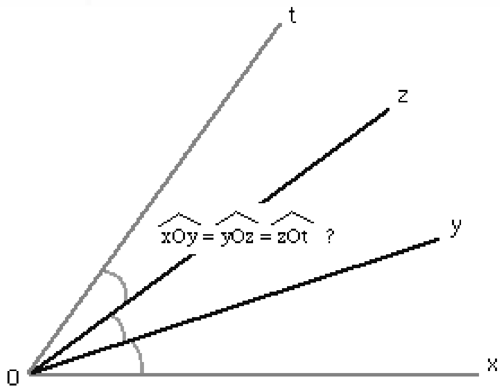
كل عدد قابل للإنشاء يمثل جذرا لكثير حدود معاملاته أعداد صحيحة. وأصغر كثير حدود يقبل هذا الجذر له درجة تساوي قوى للعدد 2.



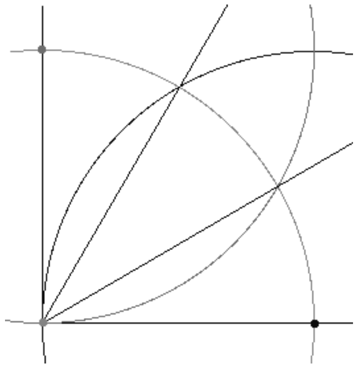
2. مسألة تثليث الزاوية

مسألة تثليث الزاوية تعني إنشاء أنصاف مستقيمات تجزيء زاوية مفروضة إلى ثلاث زوايا متساوية بواسطة المسطرة و المدور.

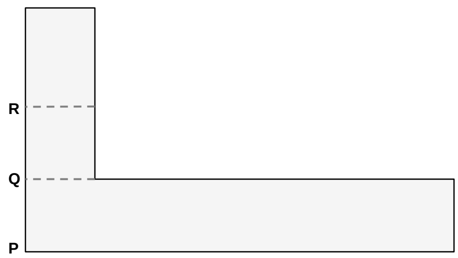




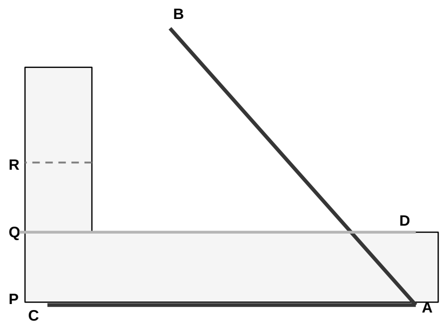
وقد تبيّن (مثلا من خلال نظرية فنتسال) كما هو الحال في المسألة السابقة بأن تثليث الزاوية قضية مستحيلة إذا استثنينا حالات خاصة مثل الزاوية القائمة كما يوضح الشكل التـــالي :



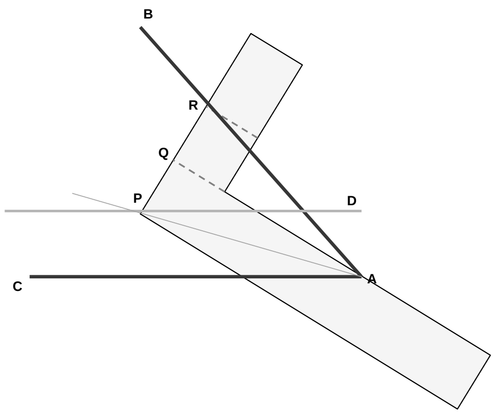
والواقع أنه بالإمكان تثليث أية زاوية إذا ما تخلصنا من شرط استخدام المسطرة والمدور دون سواهما. فعلى سبيل المثل يمكن تثليث الزاوية باستخدام المسطرة والكوس. لنشرح ذلك :



أولا : نعلّم النقاط P و Q و R على الكوس كما هو مبين في الشكل أعلاه : $PQ = QR$.



ثانيا : الزاوية التي نريد تثليثها هي الزاوية $\widehat{BAC}$ المبينة في الشكل. وقد رسمنا المستقيم (QD)



ثالثا : ندير الكوس بحيث تكون

النقطة A على حافة الكوس (انظر الشكل أعلاه)

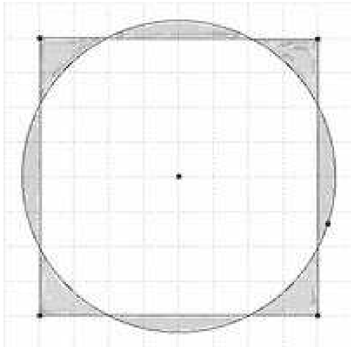
النقطة P على المستقيم (QD) الوارد في الشكل السابق.

النقطة R على المستقيم (AB) .

عندئذ يكون : $\widehat{PAC} = \widehat{PAQ} = \widehat{QAR} = \frac{1}{3}\widehat{BAC}$. ةهذا يعني تثليث الزاوية المعطاة.

3. مسألة تربيع الدائرة :

مسألة تربيع الدائرة تعني إنشاء مربع بواسطة المسطرة والمدور مساحته تساوي مساحة دائرة معطاة.

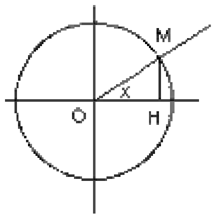


تعتبر هذه المسألة من أشهر المسائل في عصر الإغريق وبعده. فقد حاول الرياضيون آنذاك حساب مساحة الدائرة، ونظرا لعدم إلمامهم بحقيقة العدد السامي π لجأوا إلى محاولة إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة الدائرة.

وقد تبين في نهاية القرن التاسع عشر أنه لا يمكن إنشاء هذا المربع لأن العدد □ عدد متسام (أي عدد غير جبري). وكان ذلك عام 1882 على يدي الألماني فرديناد لينـدمان Lindemann (1852-1939). حدث ذلك بعد قرون وقرون مضت في البحث عن حل لهذه المسألة بناء على نظرية كانت معروفة منذ عهد بيير لورنت فنتسال Wantzel (1814-1848) تربط بين الأعداد الجبرية والأعداد القابلة للإنشاء. نقول بإيجاز أن العدد القابل للإنشاء هو العدد الذي يمكن الحصول عليه بواسطة العمليات الأربعة المألوفة مع إمكانية استخدام الجذر التربيعي أيضا.

توضيح (يمكن إغفاله لمن يجد فيه صعوبة)

يتبيّن من نظرية فنتسال أنه لا يمكن حل مسألة تضعيف المكعب لأن ذلك يتطلب إنشاء ضلع طوله يساوي جذرا تكعيبيا (مثل الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{2}$).
ويتبيّن أيضا من هذه النظرية أنه لا يمكن تثليث الزاوية (باستثناء حالات خاصة). ذلك أن إنشاء زاوية قياسها x يعني (أنظر الرسم الموالي) إنشاء القطعة OH "مسقط" OM على المستقيم الأفقي في دائرة الوحدة (أي الدائرة التي نصف قطرها يساوي الوحدة).



وماذا يمثل OH ؟ إنه يمثل cos x (جيب تمام x) .
نلاحظ الآن قيام العلاقة المثلثية التالية :

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

وبالتالي فإن مسألة تثليث الزاوية تكمن في إنشاء cos x عندما يكـــون cos3x معلوما. وهذا يعني (حسب العلاقة السابقة) حل المعادلة التكعيبية التالية:

$$4t^3 - 3t = a .$$

وحسب نص نظرية فنتسال، فحتى يكون t قابلا للإنشاء يجب أن ترد المعادلة السابقة إلى معادلة من الدرجة الثانية. وهذا مستحيل. ومن ثم لا يمكن تثليث الزاوية في الحالة العامة رغم أننا نستطيع ذلك في حالات خاصة، مثـــل الزاوية القائمة كما أسلفنا ... وتؤكد ذلك المعادلة $4t^3 - 3t = a$ علمـــا أن لدينا في هذه الحالة $a = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ و $t = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. وبما أننا نستطيع إنشاء الأعداد المساوية للجذور التربيعية فإنه يمكن إنشاء العدد t.

صفحة من عمل أرخميدس "قياس الدائرة" الذي تطرق فيه لموضوع تربيع الدائرة

❖ الهندسة الإسقاطية

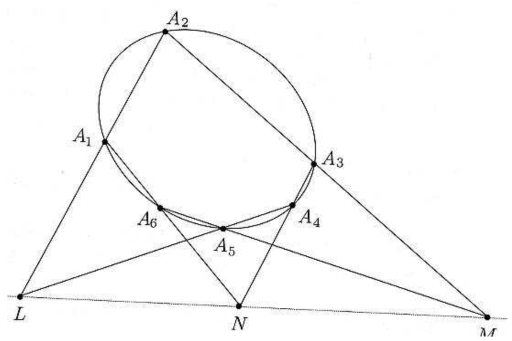
وقد حافظت الحضارة العربية الإسلامية علـــى التـــراث الرياضـــي اليوناني، سيما الهندسة، وأسهمت فيه قبل أن ينتقل مركز الإشعاع إلى أوربا بعد القرن 13 ميلادي. والملاحظ أن المهتمين كانوا يرون الهندسة – حـــتى القرن 17 م – بأنها تعنى بالأشكال وأن الجبر يتناول العدد. وجاء ديكارت عام 1637 ليجمع بين هذين المفهومين في ما يعرف بالهندسة التحليلية.

وظهرت خلال القرن التاسع عشر الهندسة الإسقاطية التي تؤدي دورا أساسيا في العديد من الاختصاصات مثل الهندسة المعمارية وعلم الفلك، الخ.

نجد في الهندسة الإسقاطية مفاهيم جديدة مثل النسبة المزدوجة (أو النسبتاني) birapport والإسقاط المركزي.

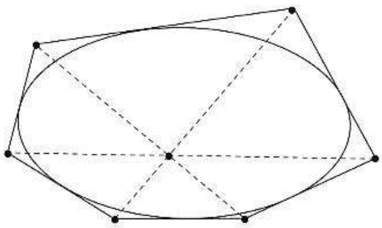
ومن نظريات الهندسة الإسقاطية نشير إلى نتيجتين :

تقول الأولى : الأضلاع المتقابلة في مضلع سداسي يحيط به قطع ناقصي تتقاطع في 3 نقاط على استقامة واحدة.



وقد برهن على هذه النظرية باسكال Pascal باعتبار دائرة بـــدل قطع ناقص، ثم عمم النتيجة إلى القطوع الناقصية بعملية الإسقاط. وباسكال ليس الأول الذي بحث في هذا الموضوع.

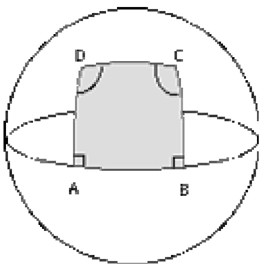
أما الثانية فتدعى نظرية بريانشون Brianchon (1783-1864)، وهي تقول : الأقطار الثلاثة التي تصل الرؤوس المتقابلة في مضلع سداسي تتقاطع في نفس النقطة إذا وفقط إذا كان المضلع يحيط بقطع ناقصي.

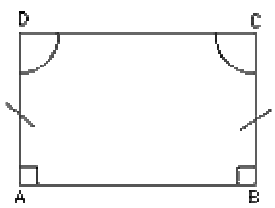


❖ الهندسة غير الأقليدية

وفي نفس الفترة بدأت بوادر الهندسات غير الأقليدية تلوح في الأفق حيث فكّر الرياضيون في تغيير مضمون مسلمة من المسلمات التي تقوم عليها هندسة أقليدس (وهي المسلمة الخامسة) فزاد ذلك في تشعب الهندسة.

نعتبر قطعة مستقيمة [AB] وننشئ قطعتين عموديتين ومتساويتين عند B و C ونسميهما [AD] و [AB] . ثم نصل النقطتين C و D. فنحصل بذلك على شكل رباعي، هو بالتأكيد مستطيل لأن المستقيم (DC) مواز للمستقيم (AB). لكن كيف نثبت ذلك؟ إننا نثبته باستخدام مسلمة أقليدس الخامسة (مسلمة المتوازيات) القائلة بأننا نستطيع إنشاء مستقيم مواز واحد لمستقيم معلوم من نقطة معلومة معطاة خارج المستقيم المعلوم.



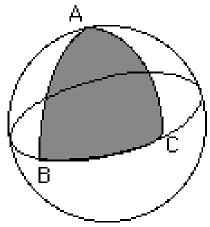


كما أن المسلمات الأربع الأولى لأقليدس تسمح بإثبات المساواة بين الزاويتين C و D وتثبت المسلمة الخامسة أن هاتين الزاويتين قائمتان. وبالعكس إن سلمنا بأن هاتين الزاويتين قائمتان فهما متساويتان حسب المسلمة الرابعة (انظر مسلمات أقليدس في الفصل الموالي).

وهكذا توجد 3 فرضيات :

1. فرضية الزاوية القائمة : الزاويتان C و D قائمتان ونكون نعمل عندئذ في إطار الهندسة الأقليدية (المستوية والفضائية).

2. فرضية الزاوية المنفرجة : الزاويتان C و D منفرجتان ونحصل بذلك على الهندسة الريمانية (نسبة إلى الألماني برنهارد ريمان Riemann (1826-1866)) المسماة أيضا هندسة الكرة التي تكون فيها المستقيمات عبارة عن الدوائر الكبرى على الكرة (أي الدوائر التي لها قطر الكرة) والمثلثات هي المثلثات الكروية أنظر الشكل الموالي :



فحتى نمر من نقطة إلى أخرى من الكرة عابرين أقصر طريق ينبغي المرور على الدائرة الكبرى التي تمر بالنقطيتين المعتبرتين. ذلك هو المبدأ المتبع في الملاحة البحرية والجوية. وبالتالي فكل مستقيمان يلتقيان بالضرورة في نقطيتين. والملاحظ في هذه الهندسة أن مجموع زوايا كل مثلث أكبر من $180°$.

نلاحظ مثلا في المثلث السابق أن فيه زاويتين قائمتين.

3. فرضية الزاوية الحادة : الزاويتان C و D حادتان. نحصل عندئذ على هندسة الروسي نيكولا لوبتشفسكي Lobatchevski المسماة أيضا هندسة المجري جانوس بولاي Bolyai (1802-1860) التي لمّح إليها أيضا الألماني كارل فردريكس غوس Gauss (1777-1855)

وقد تبيّن أن بناء هذه الهندسات على مسلمات دقيقة يجعلها هندسات قائمة بدون تناقضات من الناحية المنطقية. وأوضح ذلك استقلالية المسلمة الخامسة لأقليدس عن المسلمات الأربع الأخرى (انظر المسلمات في الفصل الموالي).

والرياضي الألماني فلكس كلين Klein (1849-1925) هو الذي صنف هذه الهندسات عام 1872 وأثبت أن الهندسات غير الإقليدية يمكن النظر إليها كهندسات اسقاطية على سطح مخروطي. ومن ثم جاء المصطلح الذي أدخله وهو "الزائدية" لهندسة لوبتشفسكي و"الناقصية" لهندسة ريمان.

وقد تبين أن هاتين الهندستين أكثر تماشيا من غيرهما عندما يتعلق الأمر بدراسة الكون لارتباطهما بمفهوم الانحناء courbure . ذلك أن المختصين لاحظوا بأن المادة تحدث انحناء في الفضاء الذي تتواجد فيه (الثقوب السوداء، الأشعة الضوئية بجوار الشمس ...) مؤكدة بذلك ما ذهبت إليه النظرية النسبية لأينشتاين (1879-1955) عام 1916 ... التي تخضع لهندسة غير أقليدية.

وبإيجاز نقول إنه لو تم التسليم بتجانس الكون (أي تطابق خــواص عند كل نقطة في كل لحظة) وتساوي الاتجاه Isotropie (أي اســتقلال الخواص عن الاتجاه – أو المنحى –) وهو ما نراه بالعين، فهــذا التــسليم يكافئ ثبات "الانحناء". والواقع أننا لا نعرف اليوم ما إذا كان الانحناء موجبا أو سالبا. فإن كان الانحناء موجبا فالكون الذي نعيش فيه يخضع للهندســة الناقصية، وهو فضاء منته. أما إذا كان الانحناء سالبا فهو خاضع إلى الهندسة الزائدية، وهو في هذه الحالة غير منته.

وهناك فكرة تداولتها الأبحاث المعاصرة تشير إلى احتمال تمــدد الكــون. وهذه الفكرة بدأت في الظهور عام 1927 لدى الفلكي الأمريكي إدوين هوبــل Hubble (1889-1952) والفيزيائي الفلكي البلجيكي جــورج Lemaître (1894-1966) صاحب فرضية الانفجار الكبير Big Bang الــتي تطــورت خلال الستينات من القرن العشرين. فإن كان التمدد فعليــا فهــذا لا يعــني أن الانحناء سالب إذ يمكن أن يكون الكون محدودا وبالتالي ناقصي.

الملاحظ أن آينشتاين قد أحاط نفسه بعدد من كبار الرياضيين مثل مينكوفسكي Minkowski (1864-1909) واستغل كثيرا من الأدوات الرياضية المرتبطة بالهندسة التفاضلية الريمانية وبالحساب الشعاعي الذي كان من رواده الإيطاليان ريكسي كورباســترو Ricci-Curbastro (1853-1925) وليفي تشيفيتا Levi-Civita (1873-1941).

❖ الهندسة الكسورية :

ظهر مفهوم جديد في القرن التاسع عشر يتمثل في الأشكال الكـــسورية. وفي بداية الأمر كان المهتمون يدرجونها ضمن الرياضيات المسلية، وظلت كـــذلك حتى منتصف القرن العشرين. و لم تكتسب هذه الأشكال مكانتها إلاّ عـــام 1975 عندما جعل منها الرياضي الفرنسي مندلبورت Benoît Mandelbrot اختصاصا رياضيا مستقلا وقائما بذاته، سمّاه الهندسة الكسورية géométrie fractale.

ومن المعلوم أن كلمة ''فركتال'' fractal من أصل لاتيني هو fractus، وتعني هذه الكلمة "مكسور". تعتمد هذه الهندسة على فكرة "كسر" الأشكال. وقد سمحت بتمثيل كائنات غير سويّة كالجبال ومكوّنات المجرّات في السماء وسواحل البحار والمحيطات. والواقع أن اختيار المصطلح "كسوري" جاء ليميّز بين هذه الأشكال والأشكال الهندسية الأقليدية المألوفة (كالمستقيم والدائرة والقطوع المخروطية).

والملاحظ أن الهندسة الكسورية هي أول هندسة تتحدث عن بعد هندسي لا يساوي عددا طبيعيا. فلو شاهد أقليدس الأشكال الكسورية لذعر منها كما ذعر الذين أتوا من بعده ولاعتبرها أشباحا رياضية. ورغم هذا الانطباع الذي نجده عند بعض المختصين فنحن نحصل على شكل من هذا النوع بإجراء تحويلات رياضية محضة تتمثل عموما في إضافة عنصر بسيط، مكررين هذه الإضافة عددا غير منته من المرات فيتولد الشكل الكسوري شيئا فشيئا.

علينا أن نلاحظ بأن هناك تحويلات لا تولد أشكالا كسورية. يحدث ذلك مثلا عندما نأخذ قطعة مستقيمة ونقسمها إلى قسمين متساوين ونزيل أحدهما، ونواصل القيام بنفس العملية على النصف المتبقى في كل مرة. إن قمنا بهذه العملية عددا غير منته من المرات فسنحصل في النهاية على نقطة واحدة. أين هو وجه الغرابة في ذلك؟ لا شيء يثير الانتباه.

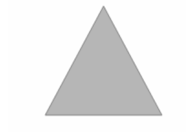
الخاصية المميزة الأولى

إذا قسمنا قطعة مستقيمة إلى 3 أقسام متساوية وأزلنا جزءها الأوسط. ثم أجرينا نفس العملية على القطعتين المتبقيتين (أنظر الشكل). ثم قمنا بنفس العملية مع القطع الأربع الناتجة من ذلك التحويل ... وواصلنا بنفس الطريقة لانهائيا فسنحصل على شكل هندسي يسمى غبار كنتور Cantor. ها هو الشكل المحصل عليه بعد أربع عمليات متوالية :

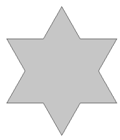
انظر إلى السطر الأخير في الشكل السابق وتصور أنك كررت العملية الموضحة أعلاه عددا كبيرا جدا من المرات. ثم انظر إلى ما تحصلت عليه بمجهر يمكن التحكم في درجة تكبيره. ستلاحظ عندئذ أنه مهما كانت درجة التكبير فستشاهد نفس المشهد. تلك هي الخاصية المميزة الأولى للأشكال الكسورية التي تعطي نفس المشهد مهما كان السلم المستخدم في التكبير.

الخاصية المميزة الثانية

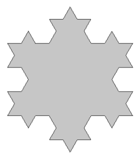
لننطلق من مثلث متساوي الأضلاع



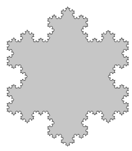
ونقسم كل ضلع إلى 3 أقسام متساوية، ونعوض الجزء الأوسط من كل ضلع بضلعين لهما نفس طول الجزء المحذوف (أي ثلث ضلع المثلث). نحصل عندئذ على الشكل التالي :



نقوم بنفس العملية ثانية فيتعقد الشكل ويصبح كالتالي :

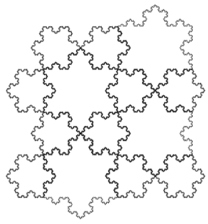


ونعقده أكثر بمواصلة العملية مرات أخرى :



يسمى المنحنى المحصل عليه في النهاية منحنى كوخ Koch. من خواص هذا المنحنى أنه محتو في مساحة محدودة وطوله غير منته. تلك هي خاصية مميزة ثانية للمنحنيات الكسورية : إنها ذوات أطوال غير منتهية رغم أنها تقع في مساحات محدودة .

ولعله من المفيد أن نلفت النظر إلى أننا نستطيع تغطية المستوي باستخدام هذه الأشكال دون ترك أي فراغ بينها كما يبّين الشكل الموالي. نلاحظ في هذا السياق أن من المسائل العويصة التي طرحت على الرياضيين، قديمهم وحديثهم هو اختيار شكل البلاط (مربعات، مستطيلات، مضلعات، دوائر، ...) المستخدم لتبليط قاعة أو سطح دون ترك فراغات بين البلاطات. ولازال البحث في بعض جوانب هذا الموضوع جاريا إلى حد الساعة.



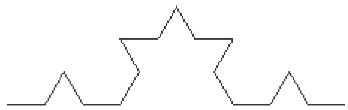
هناك خاصية ثالثة لمعظم الأشكال الكسورية، وهي "كسرية" البعد، أي أن أبعاد هذه الأشكال لا تساوي أعداد طبيعية كما أسلفنا.

منحنيات كوخ

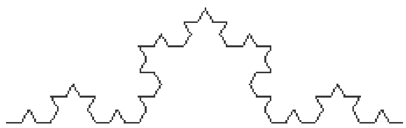
تتميز الأشكال الكسورية عموما بكون تكرار رسم جزء منها يعطي الشكل بأكمله. يقول الرياضيون – تعبيرا عن هذه الوضعية – إن هناك "استقرارا بالتمديد" أو أن "التمديد يحافظ على الشكل". هناك نوع من الأشكال الكسورية تتولد بخوارزمية عددية بسيطة مثل منحنى كوخ الوارد ذكره آنفا والمسمى أيضا "قطعة (أو كبة) ثلج"، وهو منحنى تصدق عليه الخاصية المميزة الأولى (المشار إليها أعلاه)، إذ عندما نتأمل في كبة ثلج غير متراصة نلاحظ أن تغيير السلم يجعلك تشاهد تقريبا نفس الشكل.

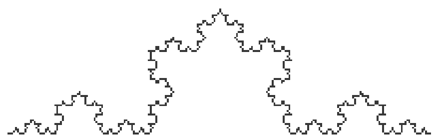
يمكن إنشاء منحيات أخرى من نمط منحنى كوخ : ننطلق من قطعة مستقيمة وتقسمها إلى 3 أقسام متساوية ونحذف الجزء الأوسط ونعوضه بضلعين مساويين له كما يبيّن الشكل التالي :

نكرّر نفس العملية على كل ضلع فنحصل على الشكل :



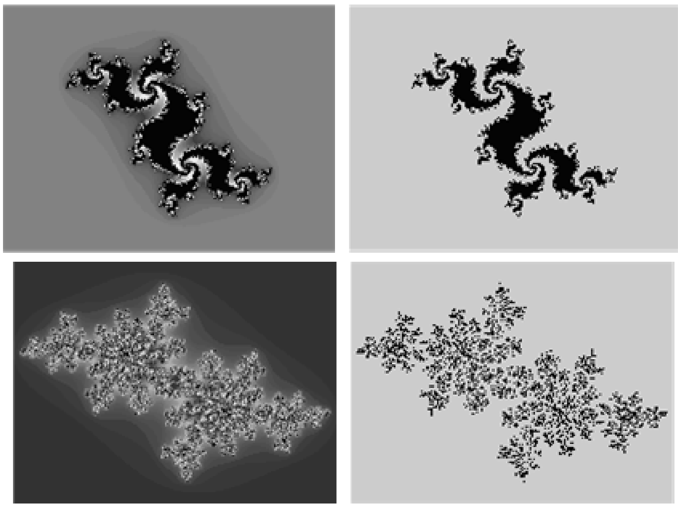
و نواصل إجراء نفس العملية فيتكوّن لدينا الشكلان المواليان :



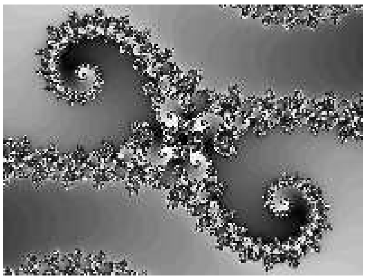


وبمواصلة العملية المذكورة عددا غير منته من المرات نحصل في الأخير على منحنى كوخ جديد. كما يمكن تعميم مفهوم منحنى كوخ .

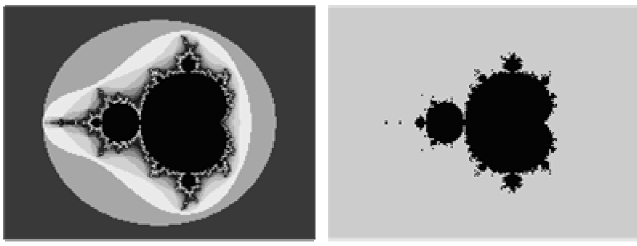
نستطيع كذلك إنشاء الأشكال الكسورية انطلاقا من الأعداد المركبة (العقدية) لكن المجال لا يسع هنا لتوضيحها، وهي تسمح بالحصول – بفضل برامج معلوماتية معدة مسبقا – على أشكال كسورية جميلة جدا ومتنوعة بشكل مثير للانتباه مثل ما يدعى بمجموعات جوليا Julia التالية :



ويمكن أيضا الحصول على شكل من هذا الطراز :

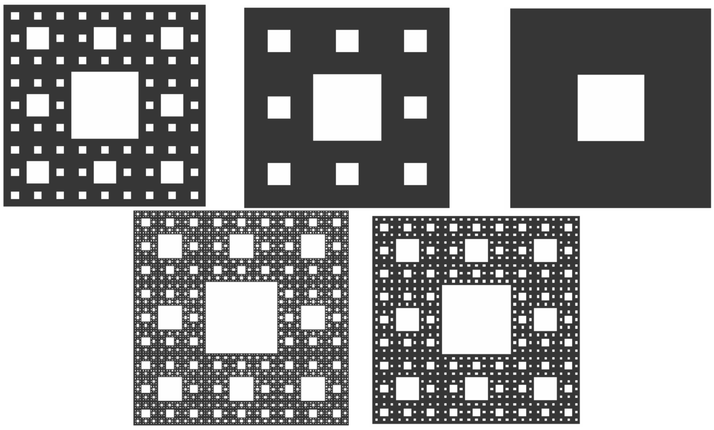


أو على أشكال كسورية من نوع مجموعات مندلبروت، وهي :



أشكال سيربنسكي Sierpinski (1882–1969) **الكسورية**

إن المبدأ العام لإنشاء شكل من أشكال سيربنسكي الكسورية هو الانطلاق من شكل يحتوي على عدد معين من الأجزاء المتشابهة والمحاكية للشكل الأصلي نفسه والتي لا تتقاطع بل تتماس على حافاتها. نفرغ الشكل من بقية الأجزاء التي لا تحاكيه ونواصل العملية لانهائيا في كل جزء من الأجزاء المتحاكية. ولتوضيح هذه الفكرة نقدم النموذج التالي، وهو شكل كسوري ينطلق من مربع:



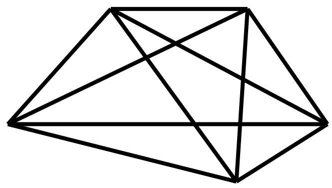
هناك نماذج أخرى منها ما ينطلق من مضلع الخماسي ومنها ما ينطلق من مضلع ثماني وغيره.

وينبغي على القارئ ألا يتصور بأن قائمة الهندسات قد أغلقت فهناك هندسات أخرى اندمجت في فروع الرياضيات نذكر من بينها :

- الهندسة الجبرية،
- الهندسة المتقطعة (أو غير المتصلة) discrète،
- الهندسة التوفيقية،
- الهندسة التفاضلية،
- الهندسة اللوغريتمية،
- هندسة الدائرة، هندسة المثلث،

– الهندسة البنيوية géométrie structurale : تستخدم هذه الهندسة الطرق التحليلية لدراسة الأشكال الهندسية في فضاء رباعي الأبعاد: فإذا كانت النقطة هي أبسط شكل في فضاء بعده0، والقطعة المستقيمة هي أبسط شكل في المستقيم (ذي البعد1)، والمثلث هو أبسط شكل في المستوي (ذي البعد2)، ورباعي الوجوه هو أبسط شكل يمكن رسمه في الفضاء (ذي البعد3). وفي هذا السياق يمكن التساؤل عن أبسط شكل يمكن رسمه في فضاء رباعي الأبعاد؟

تبين الهندسة البنيوية أنه الشكل التالي المكـــوّن مـــن 5 رؤوس و 10 أحرف و 10 وجوه مثلثية و 5 رباعيات وجوه :



❖ هل للهندسة تطبيقات ؟

لا شك أن للهندسة تطبيقات في الرياضيات ذاتها — على الأقل – إذ تفيد في الوصول إلى نتائج هامة مستعصية البرهان. خذ مثلا مـــا يـــسمى بالمنحنيات الناقصية. إنه موضوع لازال يشد انتباه الرياضيين بشكل كـــبير إلى اليوم. ذلك أن هذه المنحنيات هي التي سمحت بالبرهان على نظرية فيرما Fermat (1601-1665) من قبل أندريو وايلز Andrew Wiles عـــام 1994... وهي النظرية التي انتظرها الرياضيون قرونا عديدة.

ومن جهة أخرى تعتبر المنحنيات الناقصية مصدرا لخوارزميات جديدة في علم التعمية (التشفير) التي تستخدم في تعمية (إخفاء) المعلومات وضمان الأرقام السرية في البنوك وبطاقات التأمين ونحوها. وفي هذا الإطار

يعمل الباحثون على استخدامها في تفكيك الأعداد الطبيعية الكبرى إلى عوامل أولية، وهي الفكرة الأساسية التي تقوم عليها أنظمة الأرقام السرية.

أما إذا عرجنا على الهندسة الكسورية وركزنا على المظهر الساحر لأشكالها فإنه ينسينا جوانب هامة لهذه الهندسة. ففي الطبيعة تظهر هذه الهندسة في أمرين : أولهما هو دور هندسة حساب الاحتمالات إذ يبدو أن الهندسة الكسورية هي الهندسة الطبيعية للعديد من الظواهر العشوائية. أما ثانيهما فيظهر كلما احتجنا إلى رسم خطوط ذات أطوال غير منتهية محصورة ضمن سطح محدود أو رسم مساحات غير محدودة محتواة ضمن حجوم محدودة.

إن الهندسة الكسورية ليست نظرية مجردة. ذلك أنه تبيّن بأن الأشكال الكسورية أفضل من غيرها في تمثيل الجبال والسحب والكتل المجرية، وحتى الرئتين في جسم الإنسان، الخ. كما نجد آثارها في نظريات فيزيائية معقدة لها تطبيقات في الكيمياء وميكانيك السوائل والبيولوجيا. وهناك أيضا إمكانية تمثيل تطور ظواهر ديناميكية بواسطة الأشكال الكسورية.

وعلينا ألا ننسى الجانب الجمالي المنقطع النظير الـذي تمثلـه هـذه الأشكال، وهو ما جعلها تؤدي دورا مهما في علم المعلومات البيانية. كمـا تستخدم الأشكال الكسورية في تحميل صور ثابتة أو متحركة في الحاسوب. فقد أثبت الرياضي بارنسلي Barnsley عام 1987 أننا نستطيع الحصول على تقريب لصور رقمية بواسطة الأشكال الكسورية. ومن ثم تخزين صور باستخدام القليل من المعطيات. وهذا المبدأ في الضغط الكسوري للمعطيات مستخدم كثيرا في مجال الوسائط المتعددة (الملتوميديا).

تلك هي بعض التطبيقات التي تعرفها الهندسة الحديثة المليئة بالعجائب والغرائب.

II

الهندسة الإقليدية
و
الإنشاء الهندسي

الهندســـــــة الإقليدية و الإنشاء الهندسي

يستعرض هذا الفصل مسلمات الهندسة الإقليدية موضـــحا بعـــض خصوصياتها ثم ينتقل إلى موضوع الإنشاء الهندسي الذي يعتبر جانبا مهما في الرياضيات منذ القدم. وقد قدمت العديد من الإنشاءات مفصلة و مدعمـــة بالأشكال الهندسية. وينتهي الفصل بإضافات حـــول الإنـــشاء الهندســـي المتشعب وكذا بعض التمارين المحلولة.

❖ مسلمات الهندسة الأقليدية

لا نعرف الكثير حول حياة أقليدس الأسكندراني، مع الملاحظة أن هناك أقليدس آخر عاش في جنوب إيطاليا لا علاقة له بأقليدس الأسكندراني الذي تعنينا مسلماته هنا. بل إن المؤرخين لم يتمكنوا حتى من تحديد الفترة الدقيقة التي عاش خلالها، إلا أنه يبدو بأنه درس في أثينا على أيدي خلف افلاطون، ثم استقر في الإسكندرية تلبية لدعوة ملك مصر.

ومن حسن الحظ أن عمله المسمى "أصول اقليدس" قد وصلنا. وهو الذي يحتوي بوجه خاص على مبادئ هندسة أقليدس (الهندسة الإقليدية). والواقع أن المؤرخين يرون أن أقليدس قدم عصارة الرياضيات التي كانت معروفة في وقته، وأضاف إليها متممات في الحساب والهندسة. ولاحظ بعض المؤرخين اختلافا في أسلوب كتابة مختلف أجزاء كتاب الأصول، ومن ثم استنتجوا أن أقليدس لم يحررها منفردا.

إن ما جعل الهندسة الأقليدية تقاوم وتحافظ على مكانتها المرموقة رغم تطور الهندسة خلال قرون عديدة هو قيامها على أسس متينة لم يستطع كبار الرياضيين دحضها وإيجاد بدائل عنها إلا بعد محاولات دامت قرابة 20 قرنا. وهذه الأسس المتينة هي التي تسمى مسلمات أقليدس.

فكل نظرية في الرياضيات (أو غيرها) تستند إلى مسلمات، ولا يمكن الإتيان ببراهين متينة وسليمة من الناحية المنطقية إلا إذا كانت تلك المسلمات دقيقة وغير متناقضة في ما بينها. كما يستحسن ألا تستنبط إحداها من المسلمات المتبقية، وإن حدث ذلك فإننا نلغي المسلمة المستنبطة. ما هي المسلمات التي بنى عليها أقليدس هندسته ... الهندسة الأقليدية؟

لقد عرّف أقليدس بطريقته النقطة (ما انعدم جزؤه)، والخط المنتهي (طول بدون عرض طرفاه نقطتان) والمستقيم والسطح (ما له عرض وطول فقط) والمستوي (سطح موضوع بين مستقيماته) والزاوية (باستخدام ميل المستقيمين المشكلين للزاوية) والدائرة والمستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والمثلث. وبعدئـــذ وضع مسلماته الخمس وهي :

مسلمات أقليدس في الهندسة المستوية

1. لتكن A و B نقطتين. يوجد مستقيم يمر عبر كل نقطتين A و B.
2. يمكن تمديد كل قطعة مستقيمة [AB] إلى مستقيم يمر بالنقطتين A و B.
3. من أجل كل نقطة A و نقطة B مختلفة عن A ، يمكن وصف دائرة مركزها A و وتمر بالنقطةB
4. كل الزوايا القائمة متساوية فيما بينها
5. من نقطة خارج مستقيم معلوم يمكن تمرير مستقيم واحد يوازي المستقيم المعلوم

1. من الناحية اللغوية

نلاحظ أن هناك من يميّز بين مصطلحين "موضوعة" postulat – وهي التي سميناها هنا مسلمة – وكلمة axiome التي يمكن أن نـــسميها "بديهة". وكلمة موضوعة تقابلها مصطلح postula الذي اشـــتق مـــن الكلمة اللاتينية postulare ، وهي تعني "مطلـــب" ومنـــها جـــاء فعـــل postuler الذي يستخدم الآن بمعنى "الترشح" و"الطلب". ويقـــصد بهـــا أقليدس ما هو مطلوب قبوله والتسليم بصحته.

أما الكلمة اليونانية "اكسيوما" axioma التي اشتقت منها كلمـــة axiome (بالفرنسية) و axiom (بالإنكليزية) فالمقـــصود بهـــا البداهـــة

والصحة الواضحة. وقد بنى أقليدس هندسته على 5 مسلمات (موضوعات) كما أسلفنا وأضاف إليها 9 مسلمات – بديهيات – ذات صلة بالهندسة والحساب . والواقع أن طبيعة مفهوم "الموضوعة" أقرب إلى الفلسفة من الرياضيات. فهو مبدأ تفكير يعتبر بمثابة فرضية يبنى عليها العمل. أما المسلمة بمعنى – البداهة – فهو "موضوعة" أكثر بداهة يتقبلها القارئ دون تساؤل ولا نقاش كأن تقول مثلا أن $a = b$ يستلزم $a+3 = b+3$.

وقد لجأ الرياضيون إلى وضع مسلمات للرياضيات في العصر الحديث على أيدي ديفد هلبرت (بالنسبة للهندسة والجبر) وكولموغوروف Kolmogorov (1903 - 1987) بالنسبة لعلم الاحتمالات وكنتور Cantor (1918-1945) بالنسبة لنظرية المجموعات.

2. حول المسلمة الخامسة والمسلمة السادسة

هناك في بعض إصدارات أصول أقليدس مسلمة سادسة تقول بأنه لا يمكن لمستقيمين أن يحيطا بالفضاء. لكن بعض المؤرخين يرون في هذه المسلمة إضافة لم يكن اقليدس صاحبها.

لقد ادعى العديد من الرياضيين أنهم برهنوا على المسلمة الخامسة انطلاقا من المسلمات الأربعة الأخرى. والواقع أن المسألة تكمن في وحدانية المستقيم الموازي وليس في وجوده. ومن المعلوم أن إزالة المسلمة الخامسة من هندسة أقليدس يؤدي بنا إلى الهندسات غير الأقليدية، وهو ما يبين أهمية هذه المسلمة.

عندما نحذف المسلمة الخامسة ونعوضها بالقول إن كل مستقيمين مختلفين يتقاطعان في اللانهاية فإننا نحصل على الهندسة الإسقاطية حيث نضيف إلى المستوي نقاطا عند اللانهاية. أما إذا عوضنا هذه المسلمة بالقول باستحالة رسم

مستقيم مواز فإننا نحصل على الهندسة "الناقصية" مثل هندسة الكرة التي أسهم في تطويرها غوس وكلين وريمان.

وأما إذا عوضت المسلمة الخامسة بالقول إننا نستطيع تمرير عدد غير منته من المتوازيات فإننا نحصل على هندسة لوبتشفسكي التي يمكن تمثيلها على شبه غلاف الكرة (وهو سطح ذو انحناء ثابت سالب). وقد طور هذه الهندسة لوبتشفسكي وبوانكري Poincaré وبلترامي Beltrami.

3. حول النقطة والمستقيم والمستوي

من المهم أن ندرك الوضع الذي كان فيه الرياضيون قبل تحديد المفاهيم الأساسية مثل النقطة والمستقيم. هل يمكن أن نعرف النقطة بالدقة المطلوبة في الرياضيات؟

ليس من السهل تعريف العناصر الأولية التي تنطلق منها أية نظرية، سيما في الرياضيات التي تبحث عن أن تكون كل أدواتها معرفة تعريفا دقيقا. وهذا ينطبق على مفهوم النقطة التي هي منطلق الهندسة الأقليدية التي تتداولها جميع الكتب الدراسية من المرحلة الابتدائية حتى المرحلة الجامعة. ففي عهد أقليدس كان يقال –كما أسلفنا – إن النقطة هي الشيء الذي لا يتجزأ. كما قيل إن النقطة هي ليست كائنا وإنما موقعا. ومن ثمّ فالنقطة لا تملك بعدا ولا طولا ولا عرضا ولا سمكا ولا مساحة ولا حجما! وما يميّزها هو موقعها. ويعبر عن ذلك أحيانا بأنها لا متناهية الصغر.

وما يزيد تعريف النقطة أهمية أن كل أشكال الهندسة في المستوي وفي الفضاء تتكون من مجموعات نقاط. وإذا اعتبرنا أن المستقيم أو المستوي أو الفضاء مزود بمعلم ديكارتي فإن النقطة تعبر عن موقع نعرفه (أي نعرّف النقطة) بعدد (على المستقيم) أو بثنائية عددين (في المستوي) أو بثلاثية أعداد

(في الفضاء). وهناك طرق أخرى عديدة يمكن أن نحدد بها مواقع النقاط باعتبار أنظمة احداثيات (قطبية، كروية، اسطوانية، الخ...).

كانت النقطة تمثل "الذرة" التي بنيت عليها الهندسة الأقليدية وتغير الأمر عندما تعددت الهندسات وتشعبت الرياضيات وتزايدت فروعها في جميع الاتجاهات. فتلك "الذرات" هي التي تتشكل منها المستقيمات والمستويات والفضاء والأشكال الهندسية كما أسلفنا. ذلك ما كان عليه عهد الإغريق والقرون الموالية.

أما الآن، وبعد بروز نظرية المجموعات مع جورج كنتور في نهاية القرن التاسع عشر فقد أصبح لمفهوم النقطة مفهوما واسعا وصرنا نطلق مصطلح "النقطة" على أي عنصر ينتمي إلى مجموعة. فنحن نتحدث عن نقطة من مستقيم الأعداد الحقيقية (كمجموعة نقاط) بينما كان الإغريق يميزون بين النقطة والعدد. كما نتحدث عن نقطة من فضاء متري أو فضاء طبولوجي، الخ.

وبعبارة وجيزة صرنا لا نفرق في كثير من المجموعات بين مصطلحي "عنصر" و"نقطة" حتى إن كانت المجموعة لا علاقة لها بالهندسة. أما المستقيم فكان يبدو في الهندسة الإقليدية ككائن جلي لا يستحق أن ندقق الأمر في تعريفه. وكان أقليدس في كتاب الأصول أول من حاول تعريف المستقيم. وتطورت الرياضيات ومفاهيمها وهندساتها فظهرت تعاريف أخرى للمستقيم.

وإذا ما افترضنا أننا نعرف مفهوم النقطة فيمكننا القول أن "الخط المستقيم" هو أقصر طريق يصل نقطتين. وهذا التعريف لا شك أن العديد يراه كافيا فأنت إن أردت بناء جدار مستقيم فما عليك لتحديد موقعه سوى أن تصل نقطة بدايته ونقطة نهايته وأن تصل النقطتين بحبل مبيّض بالجير أو الطبشور فيرسم لك على الأرض خطا مستقيما.

كان أقليدس أول من حاول وضع أسس الهندسة الأقليدية فعرف كائناتها مثل النقطة والمستقيم والزاوية والمستوي مشيرا إلى خواصها ضمن مسلمات تعرف بمسلمات أقليدس. وقد سمحت مثل هذه التعاريف رغم نقص دقتها بإثبات عدة مبرهنات مثل مبرهنة فيثاغورس ومبرهنة طاليس، الخ.

والواقع أن مسلمات أقليدس ظهرت بمرور الزمن ضعيفة ولا تمكّن من حل الكثير من المسائل مثل المسائل الكلاسيكية الخاصة بالإنشاء الهندسي (الإنشاء بالمسطرة والمدور) : إنشاء نصف مستقيم يثلث الزاوية (أي يقسمها إلى 3 زوايا متساوية)، وتضعيف المكعب (أي...)، إنشاء مضلع منتظم. وقد تم التغلب على هذه المسائل باستخدام أدوات جبرية أهمها كثيرات الحدود حين نشر غوس عام 1801 كتابه Disquisitiones arithmeticae.

وتبيّن مرة أخرى ضعف هندسة أقليدس لمعالجة جملة من المسائل الفيزيائية والفلكية فتولد عن ذلك فرع جديد في الرياضيات يسمى الحساب اللامتناهي، ثم سمي الحساب التفاضلي. فنجح الرياضيون بفضل هذا التطور في فهم العديد من القضايا ذات الصلة بوصف الكائنات الفلكية مثل النجوم والكواكب.

4. المنحيات

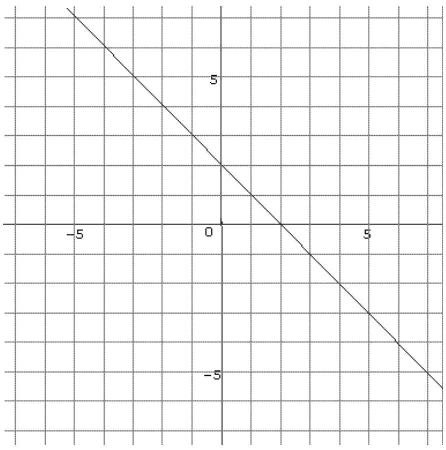
يعرف المنحي تحليليا بواسطة دالة مستمرة f فنقول إن f منحنى إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}^2$ دالة مستمرة حيث I مجال من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

والواقع أن هذا التعريف يعني أنه يطابق بين الدالة f وصورتها

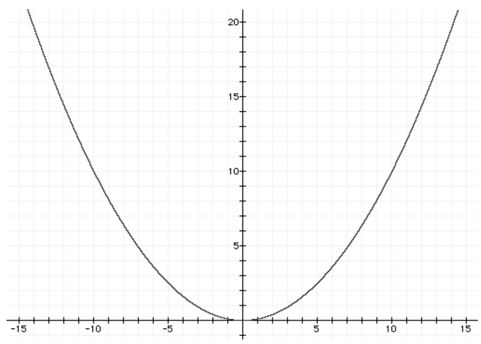
$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

مثال ذلك : إذا أردنا أن يكون المنحني مستقيما فيكفي أن نختار $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ على الشكل $f(x) = ax + b$.

وعلي سبيل المثال فإن اختيار $a=-1$ و $b=2$ يعطي $f(x)=-x+2$، أما المنحني (المستقيم) الذي تمثله هذه الدالة فهو



وإذا أردنا أن يكون المنحني قطعا مكافئا يمر بمركز المعلم فيكفي أن نختار $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{2}$ على الشكل $f(x)=ax^{2}$. وعلي سبيل المثال فإن اختيار $a=\frac{8}{81}$ يعطي $f(x)=\frac{8}{81}x^{2}$. أما المنحني (القطع المكافئ) الذي تمثله هذه الدالة فهو



هناك أنواع كثيرة من المنحيات. وقد قام الرياضيون بتصنيفها تصنيفا لن نقدمه هنا.

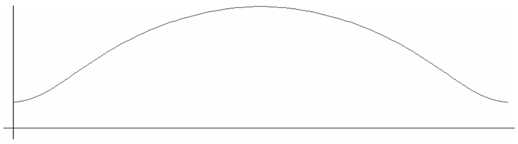
أما نصف المستقيم فهو يعرف على أنه المنحنى المحصل عليه باعتبار إحدى الحالات التالية

$f:]a,+\infty[\to\mathbb{R}^2$ ، $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}^2$ ، $f:]-\infty,b[\to\mathbb{R}^2$ ، $f:]-\infty,b]\to\mathbb{R}^2$

مع $f(x)=\alpha x+\beta$ حيث a ، b ، α ، β أعداد حقيقية مثبتة.

كما نعرّف القطع المستقيمة فتعرف على أنها أي منحنى نحصل عليه باعتبار إحدى الحالات التالية: $f:]a,b[\to\mathbb{R}^2$ ، $f:[a,b[\to\mathbb{R}^2$ ، $f:]a,b]\to\mathbb{R}^2$ ،

مع $f(x)=\alpha x+\beta$ حيث a ، b ، α ، β أعداد حقيقية مثبتة.



❖ الإنشاء الهندسي

من المواضيع التي شدت انتباه الرياضيين منذ القدم موضوع الإنشاء الهندسي لمختلف الأشكال. ولذا يسميه البعض الإنشاء الإقليدي. وقد تفنن هؤلاء في طرق الإنشاء فكان الإنشاء الهندسي هو ذلك الذي يستعمل المسطرة والمدور دون غيرهما. بل إن المسطرة لا ينبغي أن تستعمل في الإنشاء من هذا النوع إلى لرسم الخطوط المستقيم ولا تستعمل للقياس. وذهب البعض الآخر إلى التساؤل في ما إذا كان من الممكن الاستغناء عن المسطرة في هذه الإنشاءات والاكتفاء باستعمال الدور وحده. وطرح أيضا السؤال المعاكس : هل يمكن الاكتفاء باستخدام المسطرة وحدها دون المدور؟

وإذا تمعّنا في الإنشاء الهندسي الإقليدي الذي لا يستعمل سوى المسطرة والمدور اكتشفنا أنه بالإمكان تلخيصه في الخطوات (العمليات) الخمس التالية:

1. إنشاء مستقيم يصل بين نقطتين معلومتين. يتم ذلك بالمسطرة.
2. إنشاء دائرة نصف قطرها معلوم، وكذا مركزها. يتم ذلك بالمدور.
3. تحديد تقاطع دائرتين مركزاهما معلومان، وكذا نصفا قطريهما. يتم ذلك بالمدور.

4. تحديد تقاطع دائرة ومستقيم معطى بنقطتين. يتم ذلك بالمدور والمسطرة.

5. تحديد تقاطع مستقيمين كل واحد منهما معطى بنقطتين. يتم ذلك بالمسطرة.

وكما أسلفنا فالمسطرة لا تستخدم هنا إلا لرسم الخطوط المستقيمة، فهي لا تستخدم في هذا المجال لقياس الأطوال مثلا. أما المدور فهو أداة رسم الدوائر وأقواسها لا غير. ولا يجوز استخدام فتحة المدور مثلا لقياس أو نقل الأطوال. وباختصار يمكن القول إن :

- المدور يفيدنا في تساوي المسافات بين نقاط، إذ أن جميع النقاط الواقعة على دائرة تبعد بنفس المسافة عن مركز الدائرة.

- المسطرة تفيدنا في وصل النقاط بخطوط مستقيمة، أي بتحديد كافة النقاط التي تقع على استقامة واحدة مع نقطتين معلومتين.

ذلك ما يسمى بالإنشاء الهندسي منذ عهد الإغريق. وبطبيعة الحال فإن لكل من الأدوات الهندسية الأخرى (الكوس والمنقلة، المسطرة المدرجة) دورا يؤديه في الرسم الهندسي، لكن استخدام هذه الأدوات في الإنشاء الهندسي غير مسموح به حتى إن سهّل علينا كثيرا إنجاز الرسومات وأراحنا من عناء البحث عن الأطوال وقياسات الزوايا. غير أننا سوف لن نتقيد به كثيرا في بداية الأمر.

1. إنشاء مثلث متساوي الأضلاع

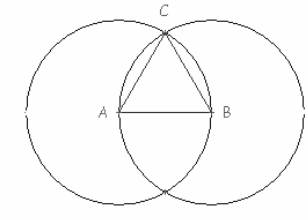
لإنشاء مثلث متساوي الأضلاع علم طول ضلعه :

أولا : نعيّن على مستقيم نقطتين A و B على هذا المستقيم بحيث يكون الطول AB يساوي الطول المعطى.

ثانيا : نرسم الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AB ثم نرسم الدائرة ذات المركز B ونصف القطر AB

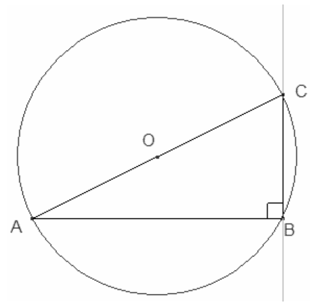
ثالثا : تلتقي الدائرتان في نقطتين نسمي إحداهما C.

نلاحظ أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

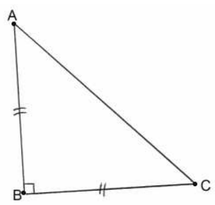


2. إنشاء مثلث قائم

من طرق إنشاء المثلث القائم أن نرسم دائرة كيفية، ثم نرسم أي قطر $[AC]$ فيها. وبعد ذلك نختار أية نقطة B على تلك الدائرة. عندئذ نكون قد أنشأنا مثلثا قائما ABC.

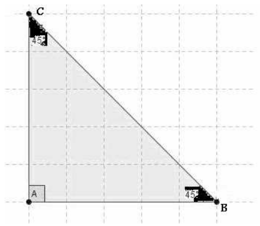


إذا أردنا أن نرسم مثلثا قائما ومتساوي الساقين ABC يمكننا أن نقوم كما فعلنا آنفا برسم دائرة قطرها $[AC]$ ثم نختار النقطة B على الدائرة بحيث يكون $AB = CB$. ونحصل على تلك النقطة B مثلا برسم محور القطعة $[AC]$ الذي يلتقي بالدائرة في نقطتين نسمي إحداهما النقطة B.



ملاحظة

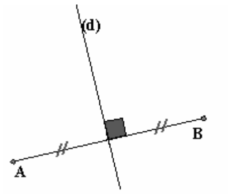
المثلث القائم والمتساوي الساقين لا بد أن تكون زاويتاه الحادتان مساويتان لـــ 45°.



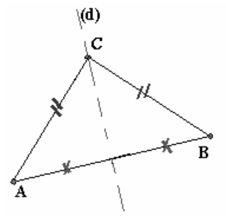
3. إنشاء مثلث متساوي الساقين

المطلوب إنشاء مثلث متساوي الساقين ABC قاعدته $[AB]$ معلومة وطول ضلعيه المتساويين $[AC]$ و $[BC]$ معطى. نرمز لهذا الطول بــ r ونفرض أنه أكبر من نصف طول القاعدة.

أولا : نرسم المحور (d) للقاعدة $[AB]$:



ثانيا : نرسم مثلا الدائرة ذات المركز A ونصف القطر (أو الدائرة التي لها نفس نصف القطر والمركز B). هذه الدائرة تقطع (d) في نقطتين نسمي إحداهما C. فيكون المثلث المطلوب هو المثلث ABC.



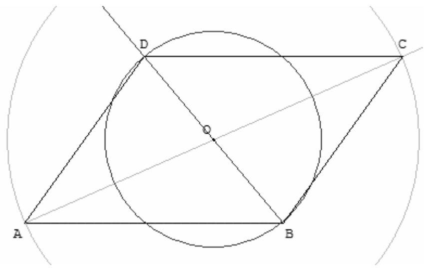
ملاحظة

فرضنا أن الطول r أكبر من نصف طول القاعدة حتى نضمن تقاطع الدائرة مع المحور.

4. إنشاء متوازي أضلاع علم مركزه ورأسان من رؤوسه

إذا علم رأسان A و B متواليان من متوازي أضلاع ومركزه O (وهو نقطة تقاطع القطرين) يمكننا إتباع الخطوات التالية لإنشاء متوازي الأضلاع. وهذا يعني رسم الرأسين المتبقيين C و D.

- ننشئ المستقيمين (AO) و (BO).
- ننشئ الدائرة ذات المركز O ونصف القطر OA. فيقطع المستقيم (AO) هذه الدائرة عند النقطتين A و C.
- ننشئ الدائرة ذات المركز O ونصف القطر OB. فيقطع المستقيم (BO) هذه الدائرة عند النقطتين B و D.
- إن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، وهو الوحيد.



ملاحظة

إذا كان الرأسان المعلومان A و B غير متواليين فإن المركز O سيكون منتصف $[AB]$. وبالتالي فهو محدد تماما ولا حاجة لتقديمه ضمن الفرضيات. وفي هذه الحالة هناك عدد غير منته من المتوازيات الأضلاع التي يكون A و B رأسين لها. يكفي رسم أية دائرة مركزها O واختيار أي قطر لها $[CD]$ فيكون $ABCD$ متوازي أضلاع (بطبيعة الحال نستثني الحالة التي يكون فيها $A = C$ أو $B = D$ حتى نقصي الرباعيات الشاذة).

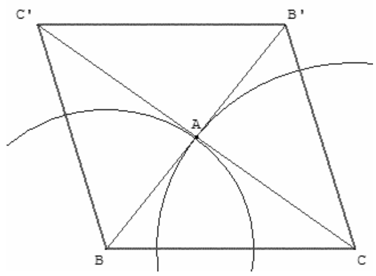
5. إنشاء معين

– نرسم مثلثا قائما ABC بالطريقة المبينة أعلاه مثلا (نأخذ مثلا $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$).

– ننشئ النقطتين B' و C' نظيرتي B و C على التوالي.

– إن المضلع $BCB'C'$ معين. ذلك أن $CB=CB'$ لأن المستقيم (CA) محور $[BB']$. ثم إن $CB=BC'$ لأن المستقيم (BA) محـــور $[CC']$. وبالتالي $CB=CB'=BC'$. وأخـــيرا نلاحـــظ أن $C'B=C'B'$ لأن المستقيم $(C'A)$ محور $[BB']$. إذن $CB=CB'=BC'=C'B'$.

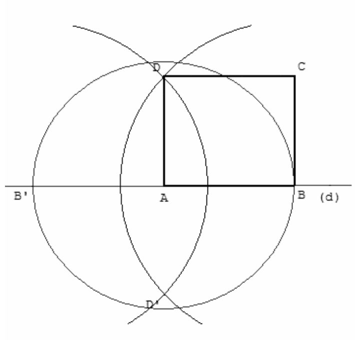
– وعليه فإن $BCB'C'$ معين.



6. إنشاء مستطيل علم طوله وقطره

المطلوب إنشاء مستطيل $ABCD$ حيث $AB=a$ و $AC=c$ علما أن الطولين a و c معطيان بحيث $c>a$.

نلاحظ أن الشرط $c>a$ طبيعي لأن c يمثل قطر المستطيل ... والقطر في المستطيل أكبر دوما من الطول والعرض.

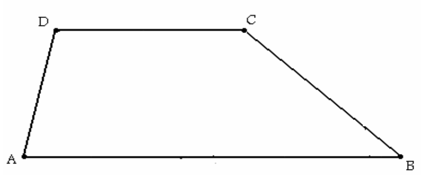


- ننشئ مستقيما (d) ونعتبر نقطة A عليه.
- ننشئ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر a.
- هذه الدائرة تقطع (d) عند النقطتين B و B'.
- ننشئ الدائرة ذات المركز B ونصف القطر c والدائرة ذات المركز B' ونصف القطر c فتتقاطعان عند نقطتين D و D'.
- إن المستقيم (AD) عمودي على (d) و $AB = a$.
- ننشئ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر c والدائرة ذات المركز D ونصف القطر a فتتقاطعان في نقطتين إحداهما هي النقطة C المطلوبة.

وبذلك نكون قد أنشأنا المستطيل $ABCD$.

7. إنشاء شبه منحرف

المطلوب إنشاء شبه منحرف $ABCD$ علمت أطوال أضلاعه.



نفرض أن المعطيات هي: $AB = a$، $DC = b$، $AD = c$، $BC = d$ حيث $a > b$.

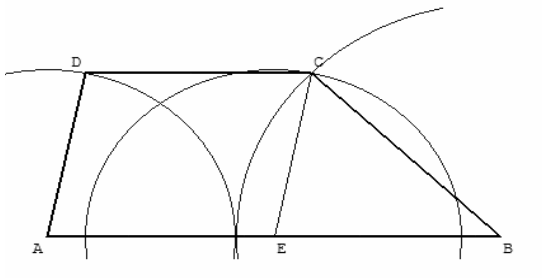
- نرسم مستقيما وننشئ عليه النقطتين A و B بحيث $AB = a$.

– ننشئ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر b فتقطع القطعة المستقيمة $[AB]$ عند النقطة E.

– ننشئ الدائرة ذات المركز B ونصف القطر d، والدائرة ذات المركز E ونصف القطر c فتلتقيان عند نقطتين نسمي إحداهما C.

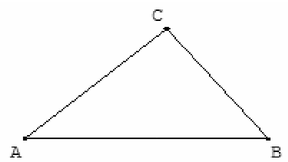
– ننشئ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر d، والدائرة ذات المركز C ونصف القطر b فتلتقيان عند نقطتين نسمي إحداهما D.

– تأكد من أن المضلع $ABCD$ هو شبه المنحرف المطلوب.



8. إنشاء مثلث ABC علمت فيه زاوية وضلع مجاور ومجموع الضلعين الآخرين

المطلوب إنشاء مثلث ABC علمت فيه الزاوية $\hat{A}$ والضلع $[AB]$ والمجموع $CA + CB = d$.



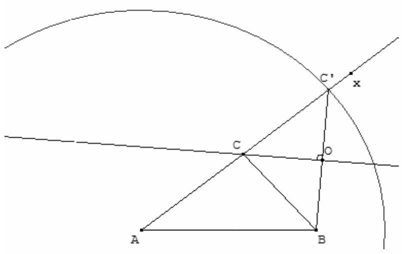
– ننشئ القطعة المستقيمة $[AB]$ ونصف المستقيم $[Ax)$ بحيث تكون للزاوية $\hat{A}$ القياس المعطى.

– ننشئ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر d. هذه الدائرة تلتقي بنصف المستقيم $[Ax)$ عند النقطة C'.

- ننشئ محور $[BC']$ فيقطع $[AC']$ في النقطة C.

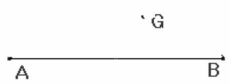
- المثلث ABC المحصل عليه هو المطلوب. لماذا؟ لأن النقطة C تقع على محور $[BC']$.

-وبالتالي $CC'=CB$، علما أن $CA+CC'=d$. ومنه فإن $CA+CB=d$.



9. إنشاء مثلث علم رأسان من رؤوسه الثلاثة ومركز ثقله

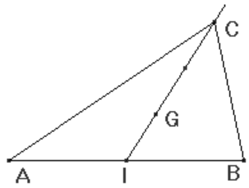
المطلوب إنشاء مثلث ABC علم فيه الرأسان A و B ومركز ثقله G.



- ننشئ I منتصف القطعة $[AB]$.

- نرسم نصف المستقيم $[IG)$

- ننشئ نظيرة I بالنسبة إلى G. ثم نظيرة G بالنسبة إلى تلك النقطة. إن نظيرة G المنشأة بهذه الكيفية هي النقطة C المطلوبة. لماذا؟ لأن من خواص مركز ثقل مثلث أن $IC=3IG$.

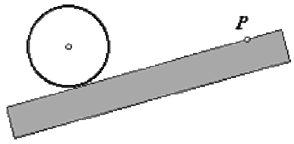


❖ **المزيد من الإنشاءات الهندسية**

سوف نتقيد في ما يلي بكافة قواعد الإنشاء الهندسي الأقليدي المعتمد على المدور والمسطرة.

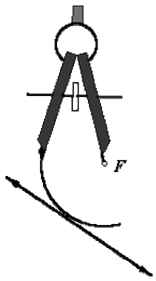
دعنا نشير في البداية إلى بعض الأخطاء الشائعة في الإنشاء الهندسي :

- **خطأ 1** : هب أن عليك أن تنشئ المستقيم المماس لدائرة يمر بالنقطة المعلومة P كما في الشكل



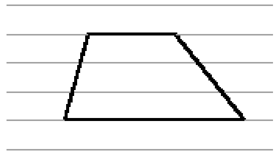
إذا اكتفيت باستخدام المسطرة ووضعتها (كما في الشكل) بحيث تكون "ماسة" للدائرة، وتمر بالنقطة P، ثم رسمت المستقيم المماس للدائرة، فهذا يعتبر رسما هندسيا وليس إنشاء هندسيا كما يعتقد البعض. ذلك أن نقطة التماس لم تحدد بدقة : هذه الطريقة تحدد تلك النقطة بشكل تقريبي. ولذا فحتى يتحوّل هذا الرسم إلى إنشاء ينبغي تحديد نقطة التماس ثم استخدام المسطرة لوصل هذه النقطة والنقطة P.

- **خطأ 2** : هب أن عليك أن تنشئ الدائرة المماسة لمستقيم معلوم ذات المركز المعلوم F، كما في الرسم الموالي.



إن رسم هذه الدائرة دون تحديد نصف قطرها أو نقطة التماس لا يعتبر إنشاء هندسيا لأن ذلك يؤدي بنا إلى تحديد نقطة التماس بصفة تقريبية.

- **خطأ 3** : إذا كنت تعمل على ورق مسطر كما في الشكل



وطلب منك رسم شبه منحرف ... فإن استخدمت السطور الموجودة على ورقتك لتحديد التوازي (مثلا) فإنك تفقد عندئذ خاصية الإنشاء الهندسي. لماذا؟ لأنك استخدمت أداة أخرى (ليست المدور والمسطر) هي السطور المتوازية المرسومة على ورقتك.

ملاحظة

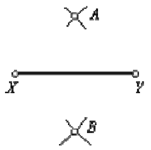
يسمح في بعض الإنشاءات الهندسية بأن يعطى نصف قطر دائرة بالمسافة بين نقطتين معلومتين على أن تتاح إمكانية رسم دائرة لها هذا نصف القطر ومركزها خارج النقطتين المعلومتين. هذا الأمر يعتبر تجاوزا لمفهوم الإنشائي الهندسي كما استخدمه الإغريق. ذلك أنهم كانوا يعتبرون أنه عندما ننقل نصف القطر بفتحة المدور لرسم الدائرة انطلاقا من مركز آخر فإن فتحة المدور قد تتغير دون أن نشعر وبذلك يتغير نصف القطر.

نقدّم في ما يلي أهم الإنشاءات المعروفة لدى التلاميذ والأساتذة.

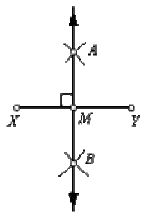
1. إنشاء محور قطعة مستقيمة

لنفصل هذا المثال البسيط : لتكن قطعة مستقيمة $[XY]$

– ننشئ دائرتين (أو قوسي دائرتين) متساويتي نصف قطر مركزاهما في النقطتين X و Y على أن يكون القطر المشترك للدائرتين أكبر من طول القطعة $[XY]$. يضمن هذا الشرط وجود تقاطع في نقطتين للدائرتين.



– تتقاطع الدائرتان (أو القوسان) في النقطتين A و B. نستخدم الآن المسطرة وننشئ المستقيم الذي يصل النقطتين A و B. هذا المستقيم هو محور القطعة $[XY]$.



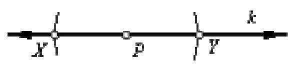
ملاحظة

النقطة M التي تمثل تقاطع المحور مع القطعة المستقيمة $[XY]$ هي منتصف هذه القطعة. ومن ثم فهذا الإنشاء يعين أيضا منتصف قطعة مستقيمة معطاة.

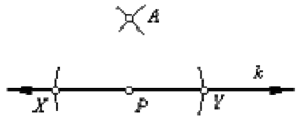
2. إنشاء مستقيم يعامد مستقيما معلوما عند نقطة معلومة

نسمي المستقيم المعطى k و P النقطة الواقعة عليه التي ينبغي أن يمر بها المستقيم المطلوب إنشاؤه.

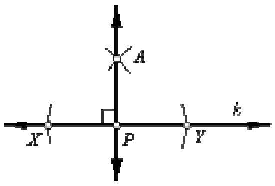
– نرسم دائرة كيفية مركزها النقطة P فتقطع المستقيم k في نقطتين X و Y:



– ننشئ دائرتين مركزاهما X و Y تلتقيان على الأقل في نقطة نسميها A :



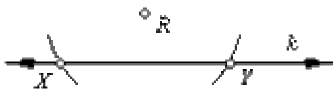
– المستقيم المطلوب هو المستقيم (AP).



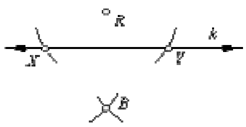
3. إنشاء مستقيم يعامد مستقيما معلوما k عند نقطة R لا تقع على k

لما كان هذا الإنشاء شبيها بالإنشاء السابق، نكتفي بتوضيح الأشكال الثلاثة المتوالية في الإنشاء :

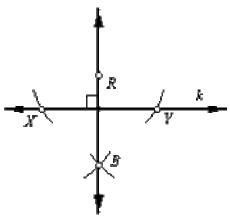
أولا :



ثانيا :



ثالثا:

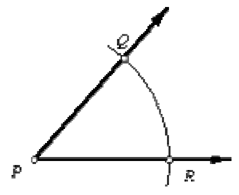


المستقيم المطلوب هو (BR).

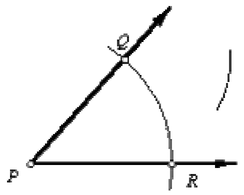
4. إنشاء منصف زاوية

نكتفي بتقديم الإنشاءات المتوالية كما في الإنشاء السابق :

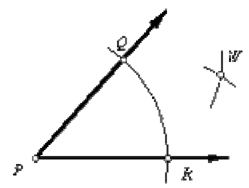
أولا :



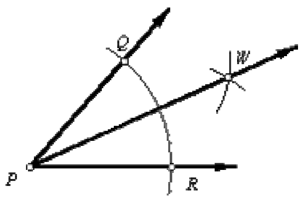
ثانيا :



ثالثا :



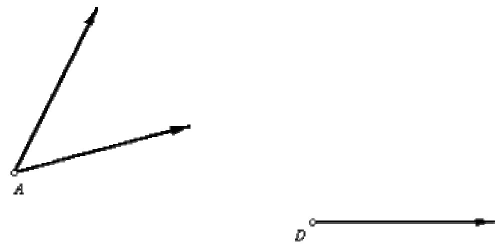
رابعا :



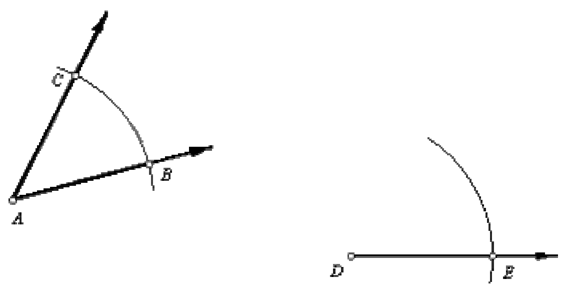
المنصف المطلوب هو نصف المستقيم $[PW)$.

5. إنشاء زاوية مساوية لزاوية معلومة

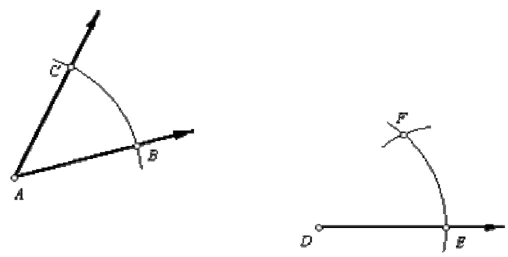
نسمي رأس الزاوية المعطاة A، وليكن نصف مستقيم معطى نسمي طرفه D. المطلوب هو إنشاء نصف مستقيم طرفه في D بحيث تكون الزاوية المحصل عليها مساوية للزاوية المعطاة



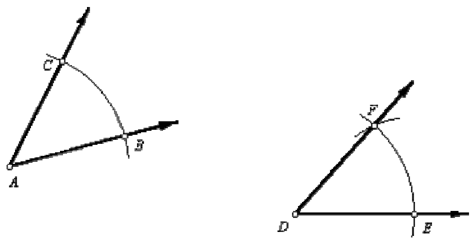
- ننشئ دائرة مركزها D تقطع نصف المستقيم المعطى في نقطة نسميها E، وبنفس فتحة المدور نرسم قوس الدائرة ذات المركز A فيقطع هذا القوس ضلعي الزاوية في نقطتين نسميهما B و C.



- ننشئ النقطة F المحصل عليها بتقاطع الدائرة ذات المركز E ونصف القطر BC مع القوس الذي سبق إنشاؤه (انظر الشكل)

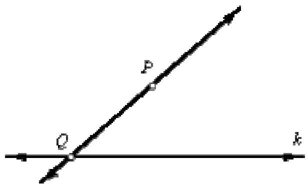


– الزاوية $\widehat{EDF}$ المحصل عليها تساوي الزاوية المعطاة $\widehat{BAC}$.

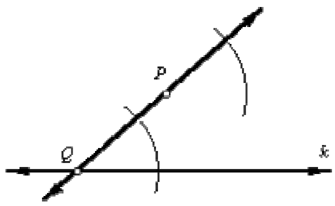


6. إنشاء مستقيم يمر بنقطة معلومة ويوازي مستقيما معطى

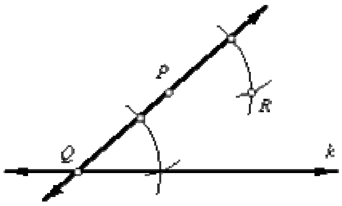
نوضح الإنشاءات المتوالية حيث رمزنا بـــ k للمستقيم المعطى وبـــ P للنقطة المعلومة : نرسم مستقيما كيفيا يمر بالنقطة P فيقطع المستقيم k في نقطة Q .



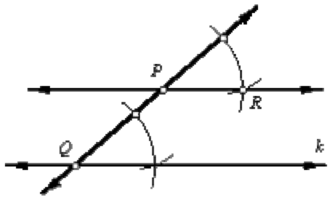
– ننشئ قوسي دائرتين لهما نفس نصف القطر، مركز الأولى في النقطة Q والثانية في النقطة P



– لتكن d المسافة بين نقطتي تقاطع القوس الأول مـــع المـــستقيمين k و (PQ) . نرسم (كما في الشكل) الدائرتين اللـــتين نـــصف قطريهمـــا d ومركزاهما نقطتي تقاطع القوسين المرسومين آنفـــا مـــع المـــستقيم (PQ) فنحصل على النقطة R المبيّنة في الشكل.



– المستقيم (PR) هو المستقيم المطلوب.

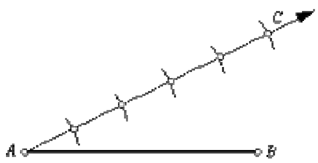


7. قسمة قطعة مستقيمة معطاة إلى عدد معلوم من المرات

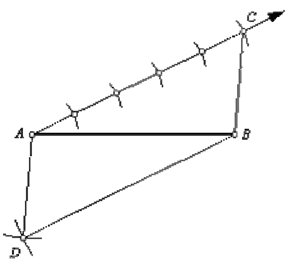
نطلب من القارئ أن يستخلص طريقة الإنشاء من الأشكال المتوالية التالية التي يتم من خلالها إنشاء التقسيم المطلوب :

أولا :

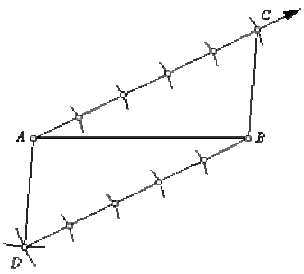
ثانيا :



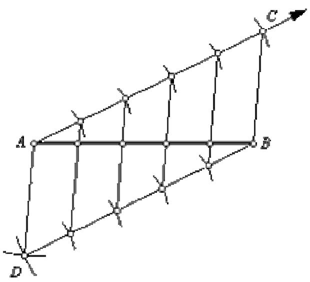
ثالثا :



رابعا :



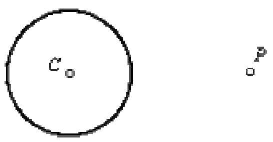
خامسا :



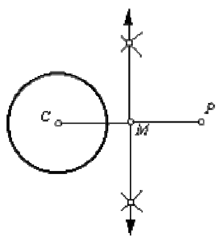
8. إنشاء المماسين لدائرة معطاة (مع مركزها) المارين من نقطة معلومة P خارج الدائرة

استخلص خطوات الإنشاء من الأشكال التالية :

أولا :

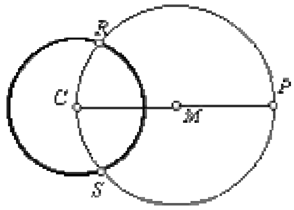


ثانيا :

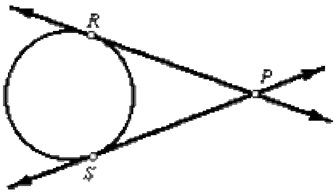


نلاحظ أن M هي منتصف القطعة $[PC]$.

ثالثا :



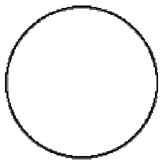
رابعا :



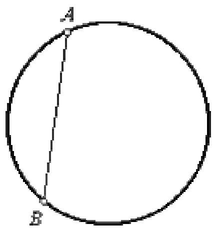
9. إنشاء مركز دائرة

الأشكال المتوالية المطلوبة في الإنشاء هي :

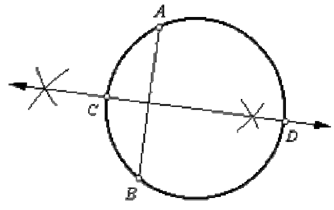
أولا :



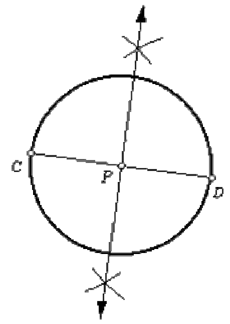
ثانيا :



ثالثا :

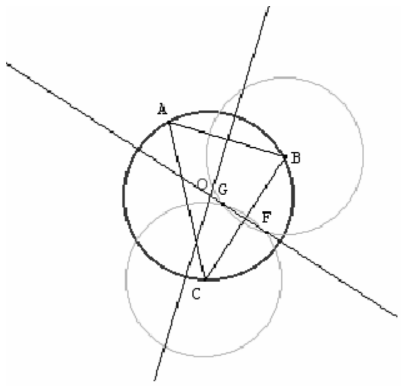


رابعا :



ملاحظة

يمكننا أيضا الاعتماد على النتيجة التالية : تلتقي محاور المثلث في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث. ومن ثم يكفي اختيار 3 نقاط A ، B ، C من الدائرة وإنشاء محورين لضلعين من الأضلاع التي تشكلها تلك النقاط، فيكون المركز المطلوب هو نقطة تقاطع المحورين (المستقيمين الأزرقين في الشكل الموالي).



❖ تمارين

تمرين 1

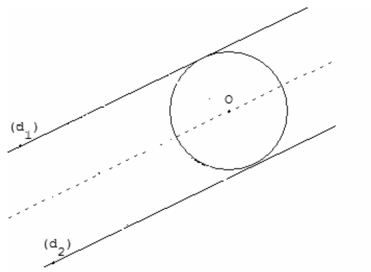
إنشاء دائرة مماسة لثلاثة مستقيمات إثنان منها متوازيان.

المطلوب إنشاء دائرة تمس ثلاثة مستقيمات (d_1)، (d_2) ، (d_3) علما أن المستقيمين (d_1) و (d_2) متوازيان.

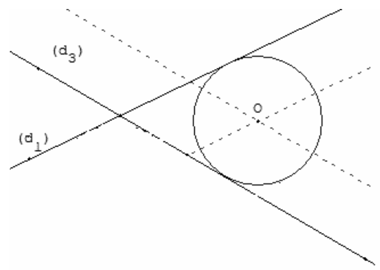
الحل

يقع مركز كل دائرة تمس مستقيمين متوازيين (d_1) و (d_2) على المستقيم الموازي للمستقيمين (d_1) و (d_2) المنصف للشريط المحصور بين (d_1) و (d_2). وبالتالي فنصف قطر هذه الدائرة هو نصف المسافة بين (d_1) و (d_2).

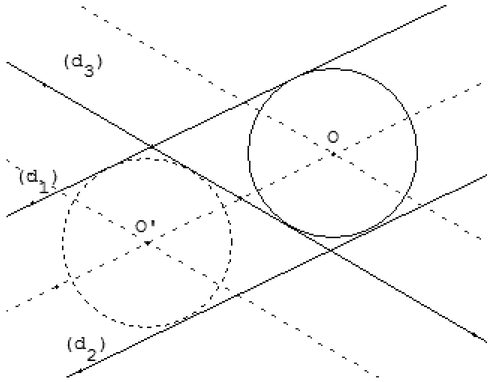
نسمي نصف القطر الذي أصبح معلوما r.



وإذا أردنا أن تكون نفس الدائرة التي نصف قطرها r ماسة لمستقيم (d_3) يقطع (d_1) فلا بد أن يقع مركز الدائر على مستقيم يوازي (d_3) وتفصله عنه مسافة تساوي r... علما أن هناك مستقيمين من هذا القبيل.



بدمج الملاحظتين السابقتين يتضح أن مركز الدائرة يقع في تقاطع مستقيمين كما هو مبين في الشكل الموالي... علما أن هناك حالتين كما أسلفنا.



هناك طريقة أخرى للإجابة عن السؤال المطروحة مبنية على الخاصية القائلة إن مراكز الدوائر التي تمس مستقيمين متقاطعين تقع على منصف زاوية من الزوايا التي يشكلها المستقيمان. بتطبيق هذه القاعدة مرتين نجد أن مركز الدائرة يقع في تقاطع منصفين.

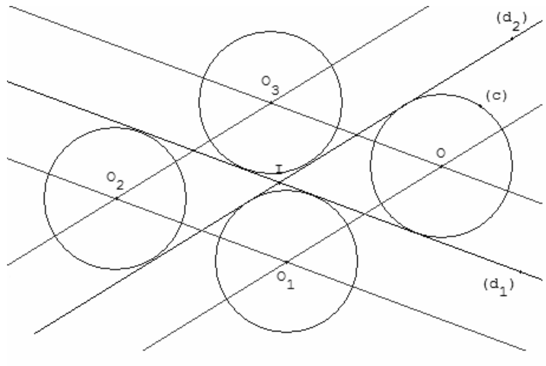
تمرين 2

إنشاء كل الدوائر المماسة لمستقيمين متقاطعين علما أن نصف قطر تلك الدوائر معطى

الحل

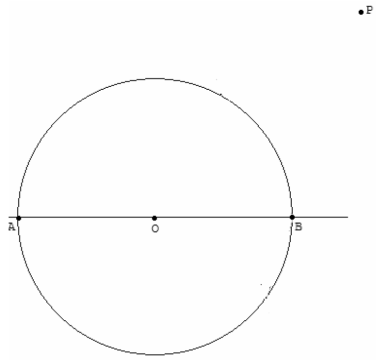
نعتبر مستقيمين متقاطعين (d_1) و (d_2) ونبحث عن الدوائر المماسة لهما علما أن نصف قطر تلك الدوائر هو عدد r معلوم. نعلم أن مركز أية دائرة من هذا القبيل يقع على تقاطع مستقيمين أحدهما يوازي (d_1) ويبعد عنه بمسافة r وثانيهما يوازي (d_2) ويبعد عنه مسافة r.

ومن ثم يكفي إنشاء جميع هذه المستقيمات وتحديد تقاطعاتها المشار إليها.
بذلك نحصل على أربعة مراكز، أي أربع دوائر، وهي المبينة في الشكل أدناه.



تمرين 3

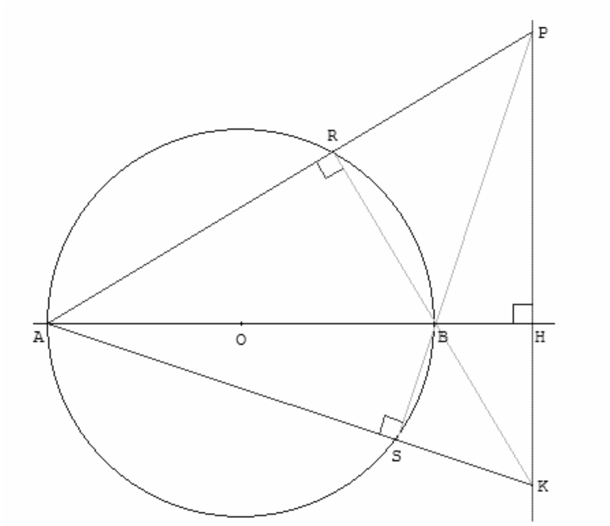
نعتبر دائرة ونرسم فيها قطرا $[AB]$ ونقطة P خارج الدائرة والمستقيم (AB). ارسم بالمسطرة فقط (بدون استعمال المدور) المستقيم العمودي على المستقيم (AB).



الحل

- ارسم المستقيم (PA) فيقطع الدائرة في النقطة R.
- ارسم المستقيم (PB) فيقطع الدائرة في النقطة S.
- ارسم المستقيم (RB) و (AS) فيتقاطعان في النقطة K.
- ارسم المستقيم (PK) فيقطع المستقيم (AB) عند H.
- إن المستقيم (PK) عمودي على المستقيم (AB) عند H.

لماذا؟ لاحظ المثلث APK: إن (KR) و (PS) ارتفاعان له لأن $[AB]$ قطر للدائرة و النقطتين R و S تقعان على هذه الدائرة. وهكذا يتضح أن B نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث APK. إذن فإن المستقيم (AB) هو الارتفاع الثالث. ولذا فهو يعامد الضلع المقابل المحمول على المستقيم (PK).



III

الزوايا والمثلثات

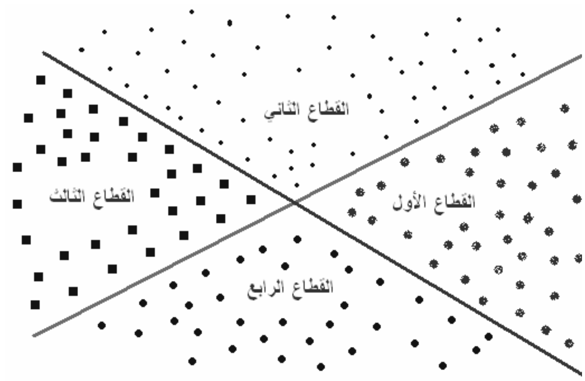
الزوايا و المثلثات

يهتم هذا الفصل بتقديم لمحة عن أبرز المفاهيم و التعاريف المتعلقة بالزوايا والمثلثات. ويتناول موضوع قياس الزوايا وإنشاء أشهر تلك الزوايا. كما يتطرق بإسهاب إلى المستقيمات والدوائر الخاصة في المثلث.

❖ الزوايا

يعتبر الرياضيون القدامى الزاوية شكلا مستويا محصورا بين مستقيمين متقاطعين. ويفضل رياضيو اليوم استخدام مصطلح القطاع الزاوي عندما يتعلق الأمر بالمضلعات. كما يمكن أن تدل الزاوية على جزء من الفضاء محصور بين مستويين. ويذهب المنظرون إلى تعريف الزاوية على أنها صنف تكافؤ بعد إدخال علاقة تكافؤ على مجموعة معينة اعتمادا على التقايس. ويتضمن مفهوم الزاوية بوجه خاص مفهوم التوجيه والزاوية الموجهة.

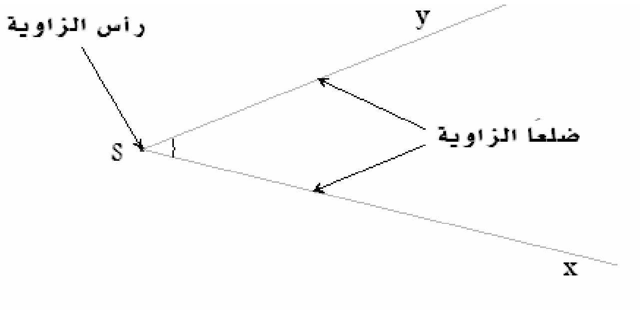
عندما نرسم مستقيمين متقاطعين فإننا نقسم المستوي إلى أربعة قطاعات



يمكن أن ننظر لقطاع زاوي أيضا على أنه تقاطع نصفي مستويين.

أما زاوية قطاع زاوي فهو عدد موجب يحدد حيز المستوي الذي يشغله ذلك القطاع. ونستخدم في تقدير ذلك وحدات مختلفة منها الراديان والدرجة والغراد. ويمكن أيضا أن ننظر للزاوية على أنها فتحة القطاع الزاوي، أي "سرعة " تباعد المستقيمين اللذين يحصران القطاع عن بعضهما عندما نبتعد عن نقطة تقاطعهما.

ويمكن أن نقول باختصار أن ما يعيّن الزاوية هو نصفا مستقيمين يلتقيان في نقطة هي رأس الزاوية

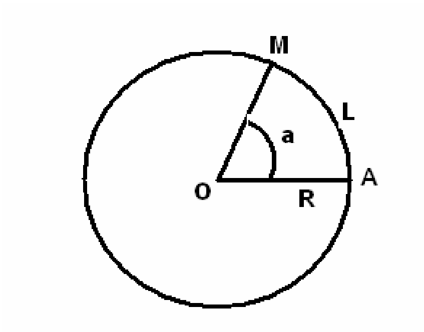


1. تعاريف

لعلك تتساءل كيف نقيس "فتحة" الزاوية. إليك هذا التعريف

تعريف

> إذا كانت A و M نقطتين من دائرة مركزها O ونصف قطرها R ورمزنا بـ L لطول قوس الدائرة $\overset{\frown}{AM}$ فإن قياس الزاوية الهندسية $\widehat{AOM}$ بالراديان هو العدد الحقيقي $a = \dfrac{L}{R}$

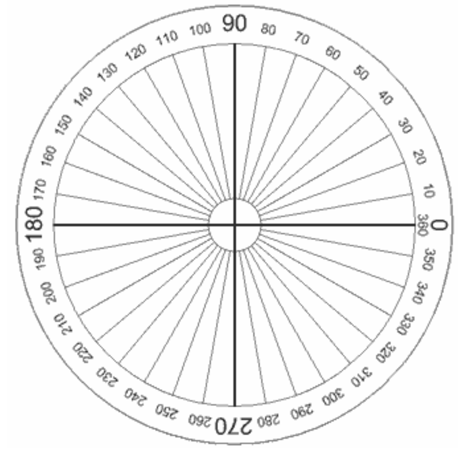


لاحظ أننا نحصل على راديان واحد إذا كان طول القوس يساوي نصف القطر. من المهم أن نعتبر دائرة الوحدة، أي $R=1$، فهذه الحالة تكون فيها قيمة الزاوية بالراديان تساوي طول القوس L لأن $a=\dfrac{L}{R}=\dfrac{L}{1}=L$.

هناك مفهوم نشير إليه بإيجاز وهو توجيه زاوية : نعتبر دائرة الوحدة في المستوي ونلاحظ أنه يمكن توجيه قوس محيطها عكس حركة عقارب الساعة (وهو الذي يسمى الاتجاه المباشر، أو الاتجاه الموجب)، أو في اتجاه حركة عقارب الساعة (وهو الذي يسمى الاتجاه غير المباشر، أو الاتجاه السالب).

عندما يقع اختيارنا على أحد هذين الاتجاهين نقول إننا وجّهنا الدائرة.

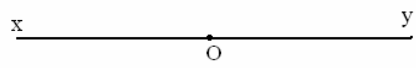
نقيس أيضا "فتحة" زاوية بالدرجات، وهذا هو الأكثر تداولا. وقد اتفِق على أن دورة كاملة تعطي زاوية بـــ **°360** .بمعنى أن نصف دورة تعطي زاوية مستقيمة تساوي **°180**. ومن ثم يمكن استنتاج مقدار درجة، درجتين، 20 درجة، 50 درجة 250 درجة، الخ. (انظر الشكل أدناه التي سجلت فيه الدرجات من 0 إلى 360 درجة)



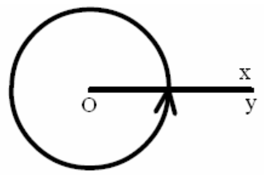
تعريف

1)الزاوية المنعدمة هي زاوية xOy ينطبق فيها نصف الضلع $[Ox)$ على الضلع $[Oy)$ كما في الشكل

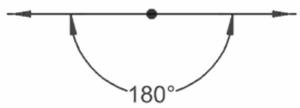
2) الزاوية المستقيمة هي زاوية xOy يكون رأسها على المستقيم (xy) كما في الشكل

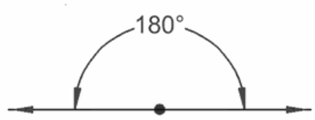


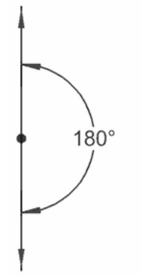
3) الزاوية الكلية هي زاوية xOy ينطبق فيها نصف الضلع $[Ox)$ على الضلع $[Oy)$ بعد أن يدور دورة كاملة حول الرأس O كما هو مبيّن في الشكل

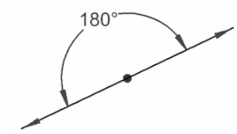


هذه مثلا أربع زوايا مستقيمة

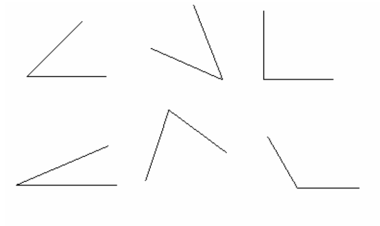






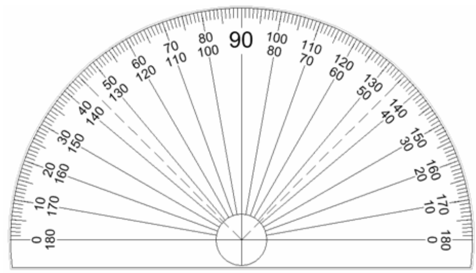


وهذه زوايا مختلفة من حيث أشكالها وفتحاتها



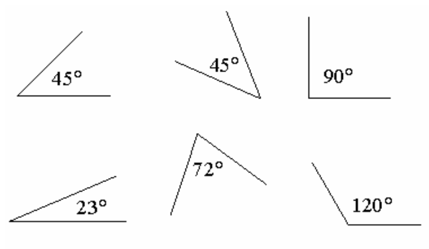
2. المنقلة

نستخدم المنقلة إذا أردنا معرفة قيس زاوية بالدرجات أقل من **180°**، أو رسم زاوية بقيس معطى. لاحظ أنه يمكن استعملها من اليمين إلى اليسار إذا تدرجنا وفق السطر المستدير السفلي، ومن اليسار إلى اليمين إذا تدرجنا وفق السطر المستدير العلوي :



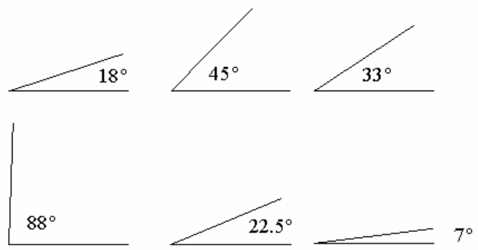
❖ حول قياسات الزوايا ووضعياتها

لاحظ في البداية قياسات هذه الزوايا ومقدار "فتحاتها



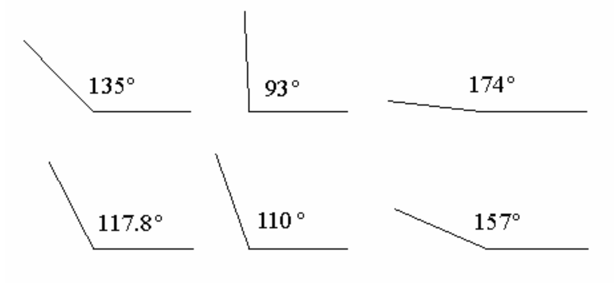
1. الزوايا الحادة

الزوايا التالية زوايا حادة، أي أن قيس كل منها أقل من **°90**



2. الزوايا المنفرجة

الزوايا التالية كلها منفرجة، أي أن قيس كل منها أكبر من **°90**

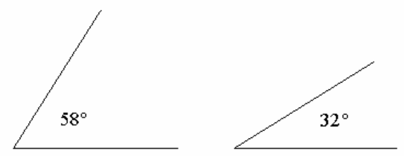


3. الزوايا القائمة

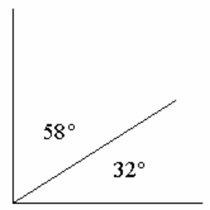
الزاويتان التاليتان قائمتان، أي أن قيس كل منهما يساوي **°90**

4. الزوايا المتتامة

الزاويتان التاليتان متتامتان، أي أن مجموع قيسيهما يساوي **°90**



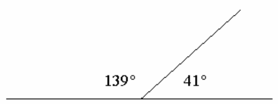
لاحظ الشكل :



5. الزوايا المتكاملة

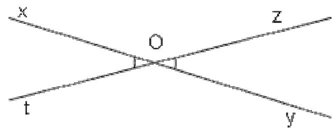
الزاويتان التاليتان متكاملتان، أي أن مجموع قيسيهما يساوي **°180**

لاحظ الشكل :



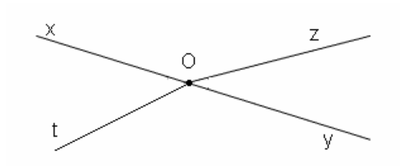
6. الزوايا المتقابلة بالرأس

الزاويتان yOz و xOt متقابلتان بالرأس، وكذلك الأمر فيما يخص الزاويتين xOz و tOy. هذا يعني أن النقطة O تقع في تقاطع المستقيمين (xy) و (tz).



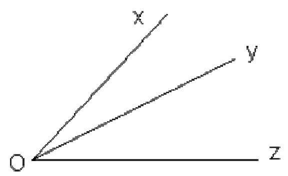
الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان

لاحظ في الشكل الموالي أن الزاويتين yOz و xOt غير متقابلتين بـــالرأس لأن النقطة O لا تقع على المستقيم (tz).

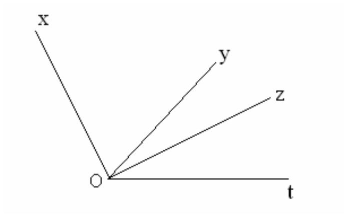


7. الزوايا المتجاورة

الزاويتان xOy و yOz متجاورتان لأن لهما نفس الرأس وضلع مشترك (هو الضلع $[Oy)$):



لاحظ في الشكل الموالي أن الزاويتين ***xOy*** و ***zOt*** غير متجـــاورتين لأن ليس لهما ضلع مشترك.

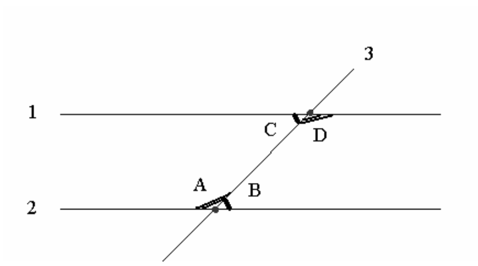


8. الزوايا المتبادلة داخليا

عندما يقطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنه يتكون في الشكل المحصل عليه ثماني زوايا، أربع منها داخلية، أي تقع داخل الشريط الذي يشكله المستقيمان المتوازيان. هذه الزوايا هي في الشكل أدناه الزوايا ***A*** و ***B*** و ***C*** و ***D***.

تعريف ونتيجة

تسمى الزاويتان ***B*** و ***C*** زاويتين متبادلتين داخليا وهما متساويتان. وكذلك الأمر بالنسبة للزاويتين ***A*** و ***D***

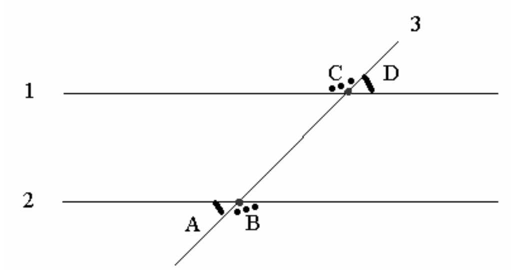


ملاحظة

يمكن الحديث عن الزوايا المتبادلة داخليا حتى إن كان المستقيمان 1 و 2 غير متوازيين لكننا نفقد في هذه الحالة خاصية تساوي تلك الزوايا.

هـ. الزوايا المتبادلة خارجيا

عندما يقطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنه يتكوّن في الشكل المحصل عليه ثماني زوايا، أربع منها خارجية، أي تقع خارج الشريط الذي يشكله المستقيمان المتوازيان. هذه الزوايا هي في الشكل أدناه الزوايا ***A*** و ***B*** و ***C*** و ***D***.



تعريف ونتيجة

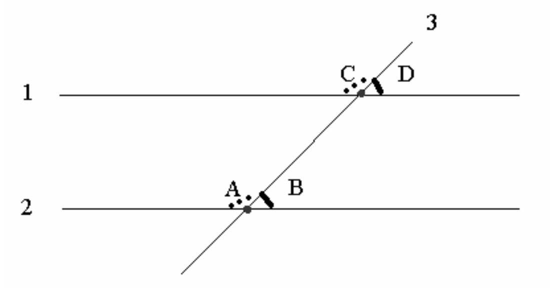
تسمى الزاويتان ***B*** و ***C*** زاويتين متبادلتين خارجيا وهما متساويتان. وكذلك الأمر بالنسبة للزاويتين ***A*** و ***D***.

ملاحظة

يمكن الحديث عن الزوايا المتبادلة خارجيا حتى إن كان المستقيمان 1 و 2 غير متوازيين لكننا نفقد في هذه الحالة خاصية تساوي تلك الزوايا.

10. الزوايا المتناظرة

عندما يقطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنه يتكوّن في الشكل المحصل عليه ثماني زوايا، أربع منها خارجية والأربع الأخرى داخلية. عند مقارنة زاويتين ***A*** و ***B*** من الداخل بزاويتين ***C*** و ***D*** من الخارج نلاحظ ما يلي :



تعريف ونتيجة

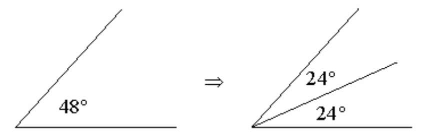
تسمى الزاويتان ***B*** و ***D*** زاويتين متناظرتين وهما متساويتان. وكذلك الأمر بالنسبة للزاويتين ***A*** و ***C***.

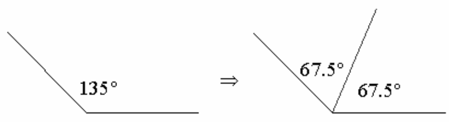
ملاحظة

يمكن الحديث عن الزوايا المتناظرة حتى إن كان المستقيمان 1 و 2 غير متوازيين لكننا نفقد في هذه الحالة خاصية تساوي تلك الزوايا.

11. منصف زاوية

هو نصف المستقيم الذي يقسم الزاوية إلى زاويتين لهما نفس القيس كما هو مبيّن في الشكل



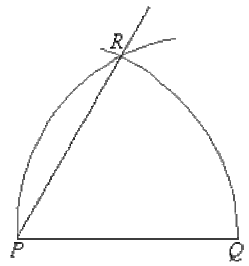


❖ إنشاء زوايا شهيرة

1. إنشاء زاوية قيسها $60°$

- نرسم قطعة مستقيمة PQ .
- نرسم قوسا للدائرة التي مركزها P ونصف قطرها PQ .
- نرسم قوسا للدائرة التي مركزها Q ونصف قطرها PQ
- يلتقي القوسان السابقان في نقطة R
- نصل النقطتين P و R .

إن قيس الزاوية QPR يساوي $60°$ لأن المثلث PQR متساوي الأضلاع.

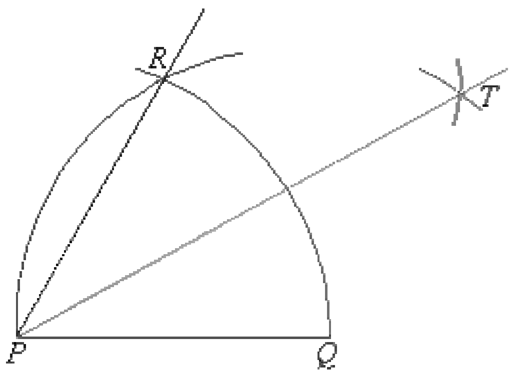


2. إنشاء زاوية قيسها $30°$

مادمنا نعرف كيف ننشئ زاوية قيسها **60°** يكفي أن ننشئ هذه الزاوية ثم ننصفها. يمكن اتباع الطريقة التالية :

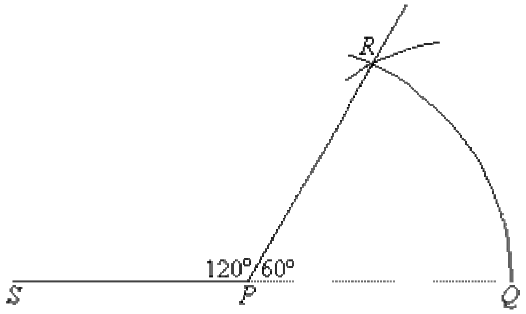
- نرسم قطعة مستقيمة ***PQ*** .
- نرسم قوسا للدائرة التي مركزها ***P*** ونصف قطرها ***PQ*** .
- نرسم قوسا للدائرة التي مركزها ***Q*** ونصف قطرها ***PQ***
- يلتقي القوسان السابقان في نقطة ***R***
- نرسم قوسا لدائرة التي مركزها ***Q***
- نرسم قوسا لدائرة التي مركزها ***R*** ولها نفس نصف قطر الدائرة السابقة
- يلتقي القوسان السابقان في نقطة ***T***
- نصل النقطتين ***P*** و ***T*** .

إن قيس الزاوية ***QPT*** يساوي **30°** لأن نصف المستقيم $[PT)$ ينصف الزاوية ***QPR*** .



3. إنشاء زاوية قيسها $120°$

نعلم أن زاويتين قيساهما $120°$ و $60°$ متكاملتان. وبما أننا نعلم كيف ننشئ زاوية مستقيمة وزاوية قيسها $60°$ فإنه يكفي رسم زاوية QPR بـــ $60°$ ثم نمدد أحد ضلعيه ($[PQ)$ مثلا) فنحصل على الزاوية SPR بـــ $120°$ كما هو مبيّن في الشكل :



4. إنشاء زاوية قيسها $90°$

هناك عدة طرق لإنشاء زاوية قائمة : يمكن تنصيف الزاوية المستقيم فنحصل على زاوية قائمة، ويمكن أيضا – كما أشرنا في موضع سابق – استعمال خواص الدائرة والمثلث. ويمكننا إتباع الخطوات التالية :

- نرسم نصف مستقيم $[PA)$.
- نرسم قوسا للدائرة ذات المركز P ونصف القطر PQ .
- نرسم قوسا للدائرة ذات المركز Q ونصف القطر PQ .
- يتقاطع القوسان السابقان في نقطة جديدة R .
- نرسم قوسا للدائرة ذات المركز R ونصف القطر PQ .

– يتقاطع هذا القوس مع القوس المرسوم في الخطوة الثانية عند نقطة جديدة ***S*** .

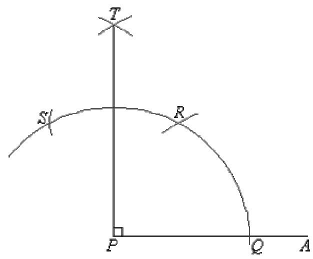
– نرسم قوسا للدائرة ذات المركز ***R*** ونصف القطر ***PQ*** .

– نرسم قوسا للدائرة ذات المركز ***S*** ونصف القطر ***PQ*** .

– يتقاطع القوسان السابقان عند نقطة ***T*** .

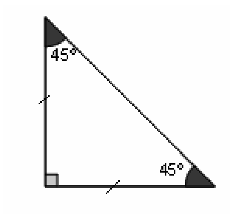
– نرسم نصف المستقيم $[PT)$.

إن الزاوية ***APT*** قائمة (أي أن قيسها يساوي **90°**).



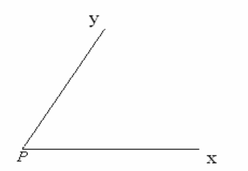
5. إنشاء زاوية قيسها 45°

مادمنا نعلم كيف ننشئ الزاوية القائمة فللحصول على زاوية قيسها **45°** يكفي إنشاء زاوية قائمة (**90°** درجة) وتنصيفها. يمكن أيضا التفكير في رسم مثلث قائم ومتساوي الأضلاع لأن الزاويتين المتساويتين في هذا المثلث سيكون قيسهما **45°**



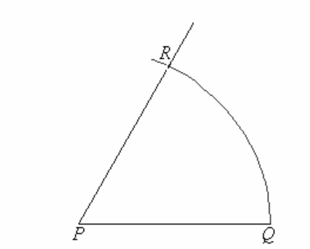
6. إنشاء زاوية تقايس زاوية معلومة

إليك الزاوية xPy .



لإنشاء زاوية تقايسها نقوم بالخطوات التالية :

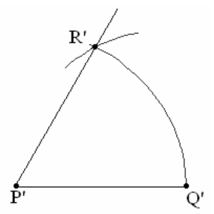
- نرسم قوس دائرة مركزها P فتقطع $[Px)$ في Q و $[Py)$ في R .



- نرسم نصف مستقيم $[P'x')$.

- نرسم قوس دائرة مركزها P' ونصف قطرها PQ . تقطع هذه الدائرة $[P'x')$ في Q'.

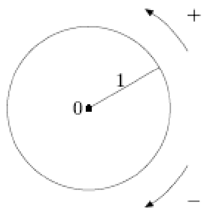
- نرسم الدائرة التي مركزها Q' ونصف قطرها QR. هذه الدائرة تقطع الدائرة السابقة في نقطة R' .



الزاوية $Q'P'R'$ تقايس الزاوية المعطاة.

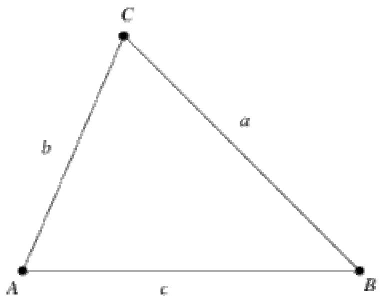
تعريف

الدائرة المثلثية هي دائرة الوحدة الموجهة في الاتجاه المباشر



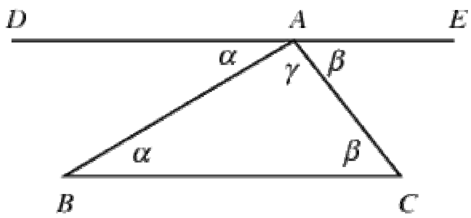
❖ **المثلثات** :

المثلث هو مضلع بثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.



أضلاع المثلث قد تكون ذات أطوال مختلفة مثنى مثنى (كما في الأشكال أعلاه) وقد يكون بعضها متساوٍ (كما سنرى أدناه). وكذلك الأمر فيما يخص الزوايا.

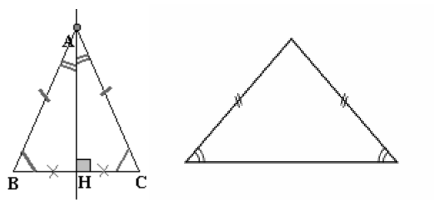
ومن أبرز خواصه أن مجموع أقياس زوايا أي مثلث يساوي قيمة ثابتة هي **°180**، أي زاوية مستقيمة كما هو مبين في الشكل أدناه (حيث المستقيم **(*DE*)** يوازي المستقيم **(*BC*)**).



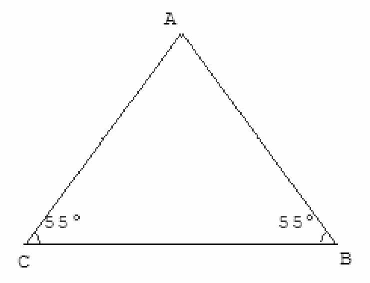
ومن أشهر أنواع المثلثات نذكر ثلاثة :

1. المثلث المتساوي الساقين

هو مثلث يتساوى فيه ضلعان. ويسمى الضلع آخر قاعدة المثلث.

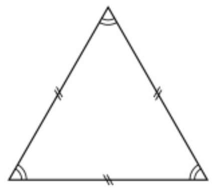


في المثلث المتساوي الساقين تكون زاويتان متساويتان، وهما الزاويتان اللتان تحدهما القاعدة. في المثلث المتساوي الساقين أدناه نلاحظ أن قيس كل زاوية من زاويتي القاعدة تساوي **°55**.

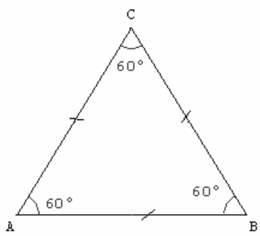


2. المثلث المتساوي الأضلاع

هو مثلث تتساوى فيه الأضلاع الثلاثة.



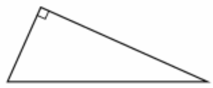
في المثلث المتساوي الأضلاع تكون كل الزوايا متساوية، وقيس كل منها **°60**، وهذا يتماشى مع القاعدة القائلة إن مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي **°180**.



3. المثلث القائم

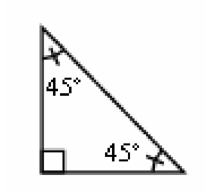
هو مثلث إحدى زواياه قائمة.

في المثلث القائم مجموع قيسي الزاويتين غير القائمتين يساوي دائما **°90** (أي قيس زاوية قائمة). وهذا يتماشى مع القاعدة القائلة إن مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي **°180**.

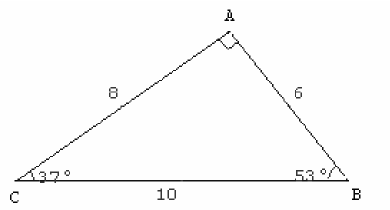


ملاحظة

يمكن أن يكون المثلث قائما ومتساوي الساقين في آن واحد. وفي هذه الحالة يكون قيس كل زاوية من الزاويتين غير القائمتين يساوي دائما **°45**



ويمكن أن يكون المثلث القائم غير متساوي الساقين كما هو مبين في الشكل أدناه

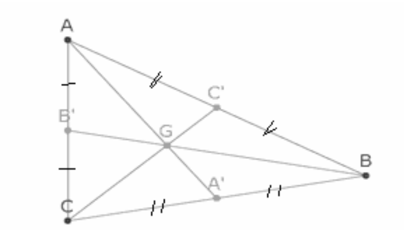


❖ المستقيمات والدوائر الخاصة في المثلث

1. المتوسطات

متوسط مثلث هو مستقيم يصل رأسا من رؤوس المثلث مع منتصف الضلع المقابل له. للمثلث ثلاثة متوسطات تلتقي في نفس النقطة.

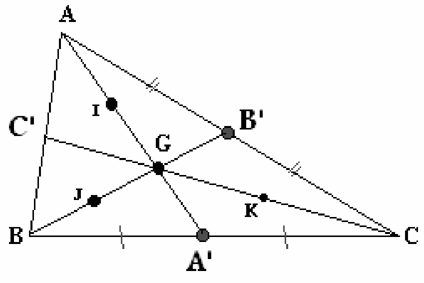
تسمى نقطة التقاء المتوسطات مركز ثقل المثلث.



ملاحظة 1

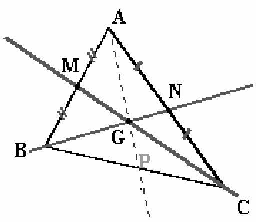
يقع مـــركز ثقل المثلث في نقطة متميزة. انظـــر إلى الشكل الموالي ولاحظ موقع مركز الثقل G.

- الطول GA' يساوي نصف الطول AG، أي أن $AI = IG = GA'$.
- الطول GB' يساوي نصف الطول BG، أي أن $BJ = JG = GB'$.
- الطول GC' يساوي نصف الطول CG، أي أن $CK = KG = GC'$.



ملاحظة 2

بما أن المتوسطات الثلاثة تلتقي في نفس النقطة فلا داعي لرسم المتوسط الثالث لتحديد مركز الثقل G (انظر الشكل أدناه)

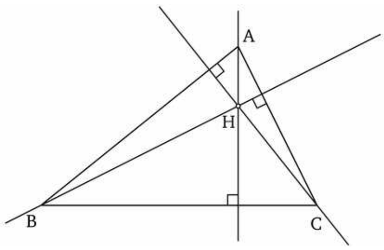


2. الارتفاعات

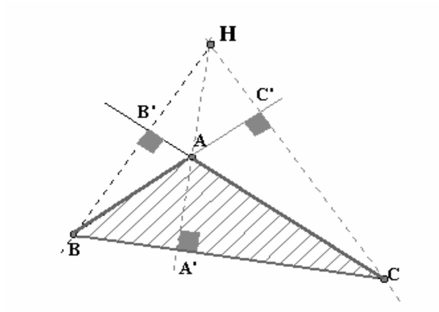
ارتفاع مثلث هو مستقيم يمر برأس من رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل له.

للمثلث ثلاثة ارتفاعات تلتقي في نفس النقطة. نقطة الالتقاء قد تكون داخل المثلث أو خارجه كما هو مبيّن في الشكلين المواليين حيث تلتقي الارتفاعات في كل من المثلثين ABC في النقطة H :

* نقطة التقاء الارتفاعات $\boldsymbol{H}$ تقع داخل المثلث $\boldsymbol{ABC}$ (لاحظ أن كل زواياه حادة) :



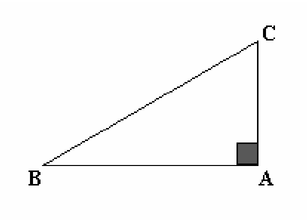
* نقطة التقاء الارتفاعات $\boldsymbol{H}$ تقع خارج المثلث $\boldsymbol{ABC}$ (لاحـــظ أن إحدى زواياه منفرجة) :



ملاحظة

بما أن الارتفاعات الثلاثة تلتقي في نفس النقطة فلا داعي لرسم الارتفاع الثالث لتحديد نقطة التقاء الارتفاعات H (انظر الشكل أعلاه)

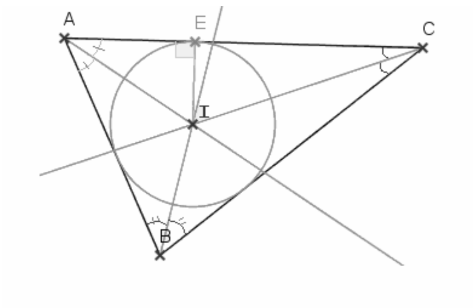
حالة خاصة : حالة مثلث قائم



نقطة التقاء الارتفاعات في المثلث أعلاه هو A أي رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم.

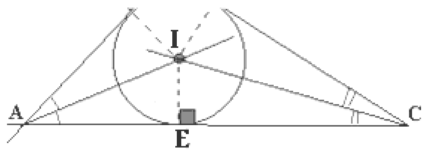
3. المنصفات في المثلث

منصفات زوايا المثلث تلتقي في نفس النقطة I. هذه النقطة هي مركز الدائرة التي يحيط بها المثلث. أما نصف قطر هذه الدائرة فهو IE (في الشكل) حيث (IE) يعامد (AC).



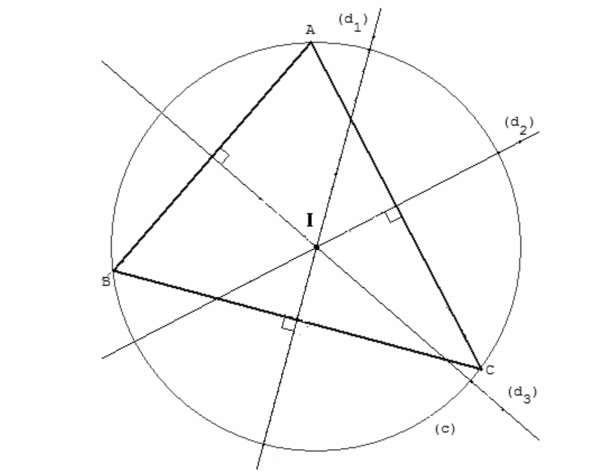
ملاحظة

.بما أن المنصفات الثلاثة تلتقي في نفس النقطة فلا داعي لرسم المنصف الثالث لتحديد نقطة الالتقاء I (انظر الشكل أدناه)



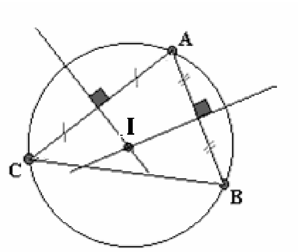
4. المحاور

محاور أضلاع المثلث تلتقي في نفس النقطة I. هذه النقطة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث. أما نصف قطر هذه الدائرة فهو مثلا IA (في الشكل). المحاور في الشكل أدناه هي المستقيمات (d_1) و (d_2) و (d_3) والدائرة المحيطة هي الدائرة (C).



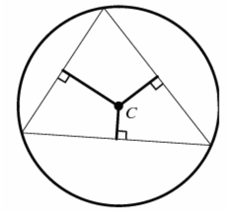
ملاحظة

بما أن المحاور الثلاثة تلتقي في نفس النقطة فلا داعي لرسم المحور الثالث لتحديد نقطة الالتقاء I (انظر الشكل أدناه)

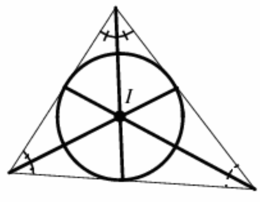


5. الدائرة المحيطة بالمثلث والمثلث المحيط بالدائرة

الدائرة المحيطة بالمثلث هي تلك التي تمر برؤوس المثلث الثلاثة. أما مركز هذه الدائرة فهو نقطة التقاء محاور المثلث كما يتضح من الشكل أدناه:



المثلث المحيط بدائرة هو المثلث الذي تمس أضلاعه الثلاثة الدائرة. أما مركز هذه الدائرة فهو نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث كما يتضح من الشكل أدناه



إليك هذا الشكل الجميل التناظر الذي نحصل عليه في حالة مثلث متساوي الأضلاع (تذكّر أن المنصفات هي المحاور في هذه الحالة) :

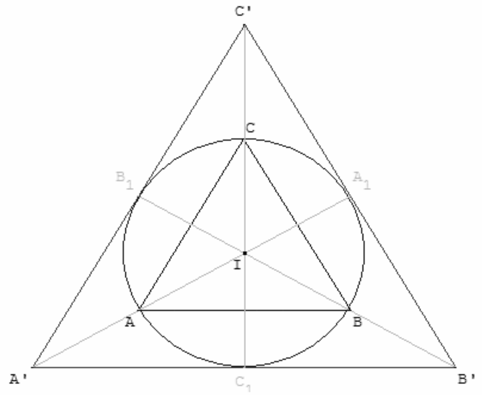
– النقطة I هي نقطة تقاطع محاور المثلث المتساوي الأضلاع ABC. وبالتالي فهي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث.

– النقطة I هي أيضا نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث المتساوي الأضلاع $A'B'C'$. وبالتالي فهي مركز الدائرة التي يحيط بها هذا المثلث.

– النقاط A_1 و B_1 و C_1 هي على التوالي منتصفات الأضلاع $[C'B']$ ، $[A'C']$ ، $[A'B']$.

– لدينا فيما يخص بعض الأطوال :

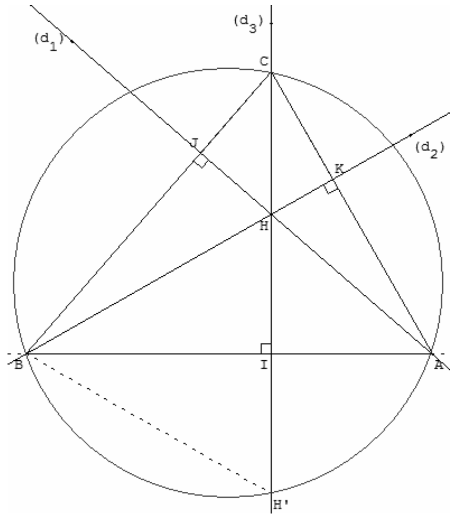
$$A'A = AI = IA_1,$$
$$B'B = BI = IB_1,$$
$$C'C = CI = IC_1.$$



ملاحظة

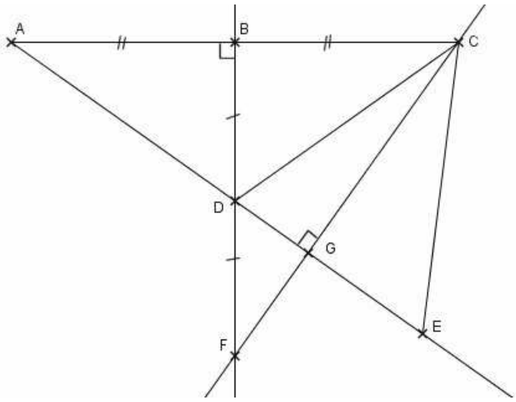
من الخواص الجميلة في المستقيمات الخاصة في مثلث تلك التي تربط نظيرة نقطة تقاطع الارتفاعات. تقول هذه خاصية:

باعتبار أي مثلث ABC ونقطة تقاطع ارتفاعاته H، نرسم الدائرة المحيطة بـــه، والارتفاع المنطلق مثلا من النقطة C ويقطع المستقيم (AB) في نقطة I. فـــإذا أنشأنا نظيرة H بالنسبة إلى I فإن هذه النظيرة H' تقع بالضرورة على الـــدائرة المحيطة.



تمرين

تعرَّف على بعض المستقيمات الشهيرة في هذا الشكل



نذكر على سبيل المثال أن

(*CF*) ارتفاع لكل المثلثات ***ACE*** و ***ACG*** و ***ACD*** و ***DCG*** و ***DCE*** و ***GCE*** .

(*CD*) متوسط للمثلث ***BCF*** .

IV

التناظر

التـــــناظر

يُعْنى هذا الفصل بموضوع التناظر الذي ينقسم عمـــوما إلى نوعين: تناظر مركزي (أي بالنسبة إلى نقطة) وتنـــاظر محـــوري (أي بالنـــسبة إلى مستقيم). ويحتوي الفصل على دراسة نظيرات أبرز الأشـــكال الهندســـية المتداولة كالزاوية والمستقيم والدائرة، الخ. كما يقدم بعض الأشكال الـــتي تتميز بمحاور تناظر. وينتهي الفصل ببعض التمارين المحلولة.

❖ مقدمة

يدخل موضوع التناظر في باب ما يسمى بالتحويلات النقطية، وهي التحويلات التي تحوّل شكلا هندسيا نقطة نقطة فنحصل في الأخير على شكل هندسي آخر يكون أحيانا مماثلا للشكل الأول، وأحيانا مخالفا له. والتناظر بصيغتيْه – وهما التناظر المركزي، أي التناظر بالنسبة إلى نقطة (تسمى مركز التناظر)، والتناظر المحوري، أي التناظر بالنسبة إلى مستقيم – يعطي في الأخير شكلا مشابها للشكل الأول. وهناك التناظر في المستوي (وهذا ما سنتناوله) وهناك أيضا التناظر في الفضاء (الذي لن نتعرض إليه في هذا الدرس).

وقد اهتم الرياضيون حديثا بموضوع التحويلات النقطية ودرسوا تركيباتها واستغلوها أحسن استغلال في براهين العديد من النتائج الرياضية. والواقع أن الرياضيين والمهندسين لم يهتموا بهذا النوع من النشاط الرياضي إلا في أواخر القرن الثامن عشر. ويمكن في هذا السياق أن نشير لرياضييْن اهتما بهذا الموضوع في ذلك العهد، وهما جون فكتور بونسلي Poncelet (1788-1867) وميشيل شال Chasles (1793-1880) اللذين رأيا في التحويلات النقطية أداة فعالة لحل بعض المسائل والبرهان عليها.

وفي القرن التاسع عشر برز في هذا المجال الرياضيان أرثر كيلي Cayley (1821-1895) وفلكس كلين Klein (1849-1925) اللذان درسَا خواص التحويلات وركّزا على خاصية "الصمود" فربطَا بذلك بين الهندسة والجبر. نشير إلى أننا نقول عن جزء من شكل معطى إنه صامد بالنسبة لتحويل معين إذا ما ظل هذا الجزء بدون تغيير (صامد ... لم يؤثر فيه التحويل) بعد إجراء التحويل المذكور. وذهب غيرهما إلى أبعد من ذلك حيث عمل بعضهم على استغلال التحويلات لتوحيد الهندسية الإقليدية مع الهندسات غير الإقليدية.

أثبت كلين أن مجموعة واسعة من التحويلات تشكل بنية جبرية تدعى "زمرة" باعتبار قانون تركيب التحويلات. ثم إن هذه الزمرة تحتوي على زمـــر جزئية مثل الزمرة الجزئية المؤلفة من الدورانات والانسحابات والتناظرات.

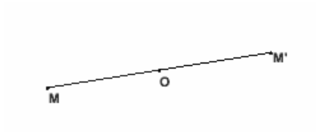
وسيلاحظ القارئ أننا سنفصل أحيانا ونقتضب أحيانا أخرى تفاديا لتفاصيل قد تكون ثقيلة على القارئ غير المختص في الرياضيات... ونفسح بذلك المجال للطالب المفتش كي يبحث عن الاستزادة في مواضيع مختلفة.

❖ التناظر المركزي

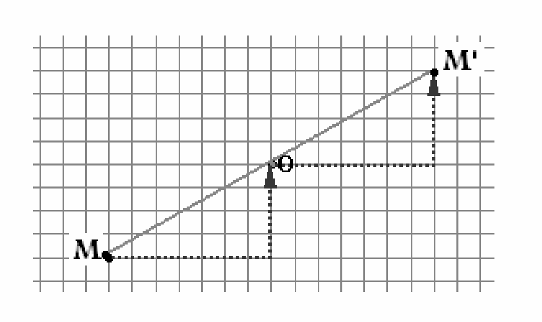
تعريف

التناظر المركزي ذو المركز O في المستوي (P) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي المعرفة بالعلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$.

ومعنى ذلك أن النقطتين M و M' تكونان متناظرتين بالنسبة للنقطة O إذا كانت O منتصف القطعة $[MM']$.

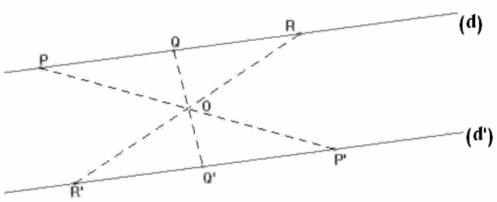


يمكن استعمال مربعات الورقة لإنشاء النقطة النظيرة :



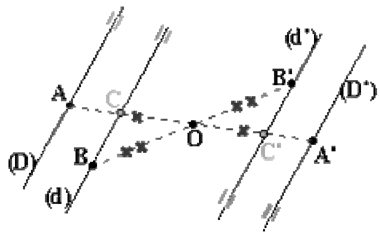
لنتعرّف على نظيرات بعض الأشكال بالنسبة إلى نقطة

1. نظير مستقيم (d) بالنسبة لنقطة O لا تقع على (d)



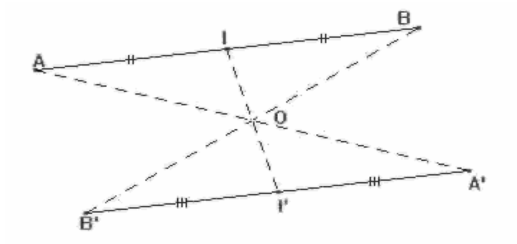
إذن : نظير مستقيم (d) بالنسبة إلى نقطة O لا تقع على (d) هو مستقيم يوازيه (d').

2. نظير مستقيمين متوازيين (d) و (D) بالنسبة لنقطة O لا تقع لا أحدهما



إذن : نظير مستقيمين (d) و (D) بالنسبة إلى نقطة O لا تقع على (d) هو مستقيمان (d') و (D') يوازيان (d) و (D).

3. نظير قطعة مستقيم $[AB]$ بالنسبة لنقطة O تقع خارج المستقيم (AB)

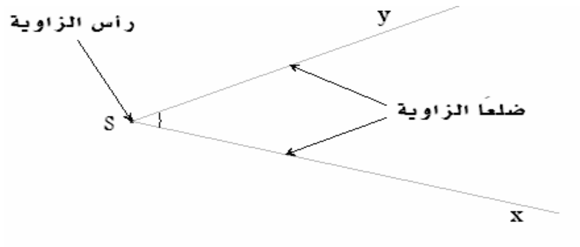


إذن : نظيرة قطعة مستقيمة $[AB]$ بالنسبة إلى نقطة O تقع خارج المستقيم (AB) هي قطعة مستقيمة توازيها $[A'B']$ ولها نفس الطول بحيث أن المضلع $ABA'B'$ متوازي أضلاع

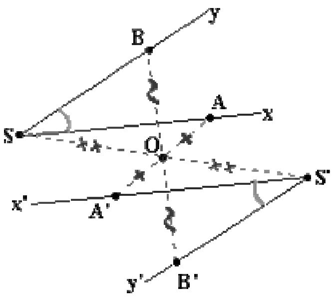
لاحظ أنه إذا وقعت النقطة O على المستقيم (AB) فإن $[A'B']$ تكون أيضا محمولة على (AB).

4. نظيرة زاوية $\widehat{xSy}$ بالنسبة إلى نقطة O لا تقع على أحد ضلعي الزاوية

في البداية نذكّر من جديد بالشكل الذي يسمى زاوية :

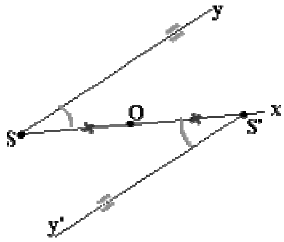


والآن نتحدث عن نظير زاوية :



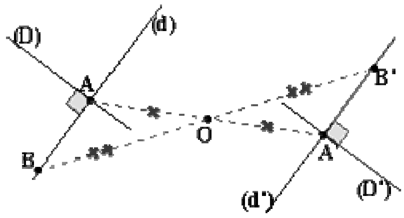
إذن : نظيرة زاوية $\widehat{xSy}$ بالنسبة إلى نقطة O هي زاوية $\widehat{x'S'y'}$ لها نفس القيس وضلعها $[S'x')$ يوازي $[Sx)$ وضلعها $[S'y')$ يوازي $[Sy)$

5. نظير زاوية $\widehat{xSy}$ بالنسبة إلى نقطة O تقع على أحد ضلعي الزاوية



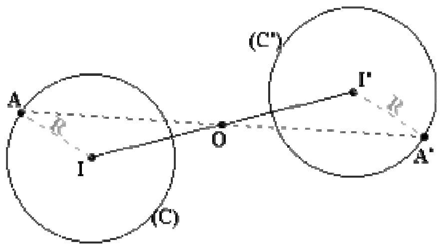
إذن : نظيرة زاوية $\widehat{xSy}$ بالنسبة إلى نقطة O تقع على $[Sx)$ هي زاوية $\widehat{SS'y'}$ لها نفس القيس وضلعها $[S'y')$ يوازي $[Sy)$ حيث S' نظيرة S بالنسبة إلى O

6. نظير زاوية قائمة بالنسبة إلى نقطة O لا تقع على أحد الضلعين



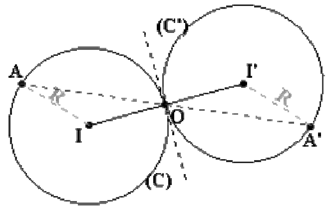
إذن : نظيرة زاوية قائمة رأسها A بالنسبة إلى نقطة O هي زاوية قائمة رأسها A' نظير A بالنسبة إلى نقطة O

7. نظيرة دائرة (C) بالنسبة إلى نقطة O تقع خارج الدائرة



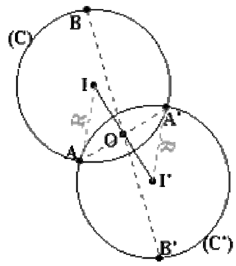
إذن : نظيرة دائرة مركزها I بالنسبة إلى نقطة O تقع خارج هي دائرة لها نفس نصف القطر ومركزها I' نظير I بالنسبة إلى نقطة O. لاحظ أن تقاطع الدائرتين خال.

8. نظيرة دائرة (C) بالنسبة إلى نقطة O تقع على الدائرة



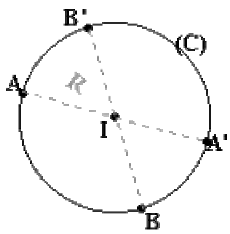
إذن : نظيرة دائرة (C) مركزها I بالنسبة إلى نقطة O تقع على الدائرة هي دائرة (C') لها نفس نصف القطر ومركزها I' نظير I بالنسبة إلى نقطة O. لاحظ أن الدائرتين متماستان.

9. نظيرة دائرة (C) بالنسبة إلى نقطة O تقع داخل على الدائرة



إذن : نظيرة دائرة (C) مركزها I بالنسبة إلى نقطة O تقع داخل الدائرة هي دائرة (C') لها نفس نصف القطر ومركزها I' نظير I بالنسبة إلى نقطة O. لاحظ أن الدائرتين متقاطعتين.

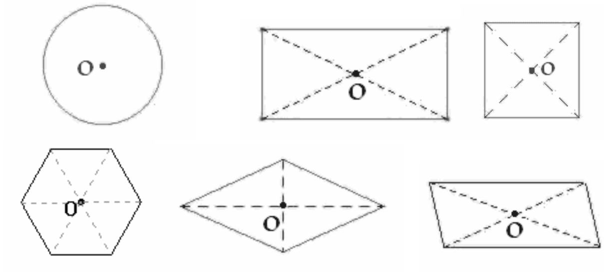
10. نظيرة دائرة (C) بالنسبة إلى مركزها



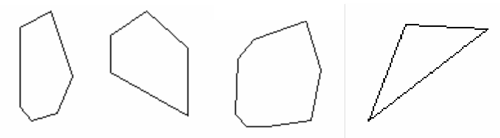
إذن : نظيرة دائرة (C) مركزها I بالنسبة إلى مركزها هي الدائرة ذاتها

ملاحظة

لكل شكل من الأشكال التالية مركز تناظر هو النقطة O، بمعنى أن نظير أية نقطة من الشكل بالنسبة إلى النقطة O نقطة تنتمي إلى الشكل نفسه :



أما الأشكال التالية فلا تقبل مراكز تناظر :



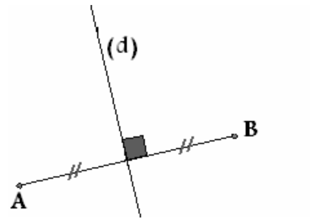
❖ التناظر المحوري

تعريف

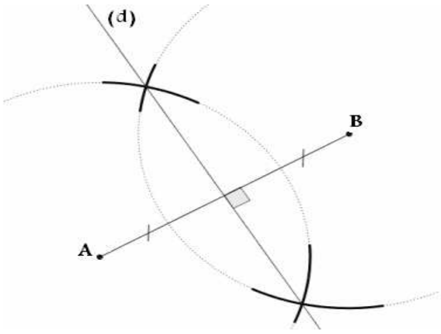
ليكن D مستقيما مثبتا. التناظر المحوري (في المستوي) ذو المحور D هو التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق كل نقطة M بالنقطة M' المعرفة بالخاصية التالية : المستقيم D هو محور القطعة المستقيمة $[MM']$.

ملاحظة

نذكّر أن محور قطعة مستقيمة $[AB]$ هو المستقيم (d) الذي يمر بمنتصف هذه القطعة ويعامد المستقيم (AB).

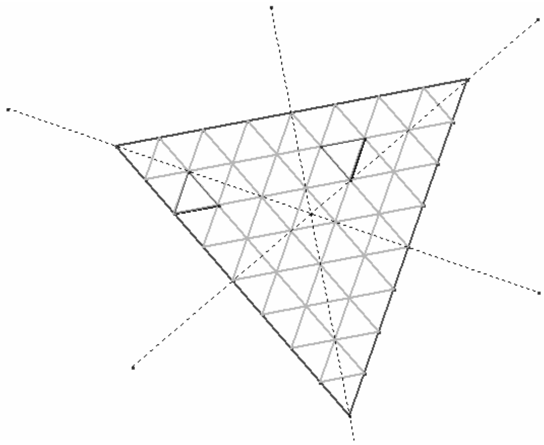


ونعلم أن لكل قطعة مستقيمة محور تناظر وأن إنشاءه يـــتم برســـم دائـــرة مركزها A ونصف قطرها أكبر من نصف طول$[AB]$، ثم الدائرة التي لهـــا نفس نصف القطر ومركزها B. تلتقي الدائرتان في نقطتين. المحور المطلوب (d) هو المستقيم الذي يصل هاتين النقطتين.



تعريف :

نقول عن مستقيم إنه محور (تناظر) لشكل معين إذا كانت نظيرة كل نقطة من هذا الشكل بالنسبة إلى ذلك المستقيم هي نقطة من الشكل المعطى.



كل مستقيم منقط من المستقيمات الثلاثة في الشكل أعلاه يمثل محور تناظر للمثلث الكبير.

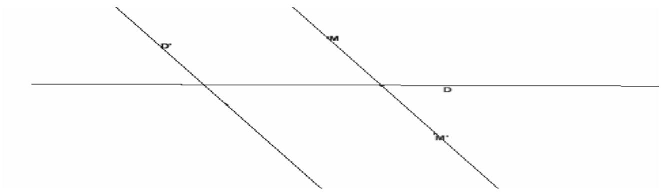
هناك تعميم للتعريف السابق :

تعريف (التناظر المائل)

ليكن D و D' مستقيمين من المستوي. نسمى تناظرا محوريا بالنسبة للمستقيم D منحاه D' التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' المعرفة بالخاصيتين التاليتين :

- المستقيم (MM') يوازي المستقيم D'،
- نقطة تقاطع المستقيمين (MM') و D هي منتصف القطعة المستقيمة $[MM']$

يسمى المستقيم D محور التناظر المائل

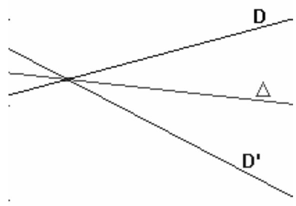


لنتعرّف على نظيرات بعض الأشكال بالنسبة إلى نقطة :

1. نظير مستقيم D بالنسبة إلى مستقيم Δ

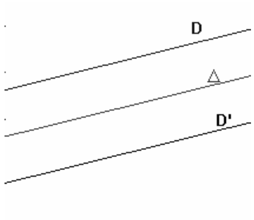
هناك 3 حالات :

الحالة الأولى : **المستقيم D يقطع المستقيم Δ ولا يعامده**



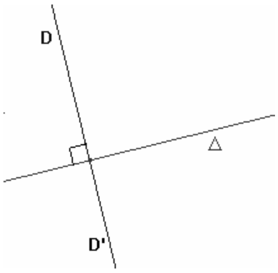
إذن : نظير مستقيم D بالنسبة إلى مستقيم Δ يقطع D ولا يعامده هو مستقيم D' بحيث يكون Δ منصفا لزاوية من الزوايا التي يشكلها D و D'.

الحالة الثانية : **المستقيم D يوازي المستقيم Δ**



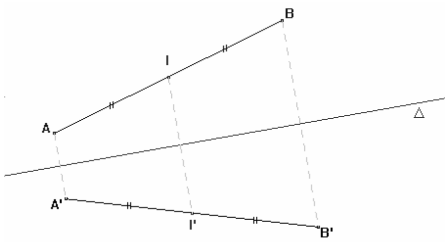
إذن : نظير مستقيم D بالنسبة إلى مستقيم Δ يوازي D هو مستقيم D' يوازيهما

الحالة الثالثة : **المستقيم D يعامد المستقيم Δ**



إذن : نظير مستقيم D بالنسبة إلى مستقيم Δ يعامده هو المستقيم D ذاته

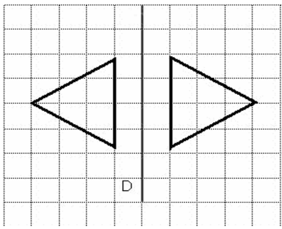
2. نظير قطعة مستقيمة $[AB]$ بالنسبة إلى مستقيم Δ

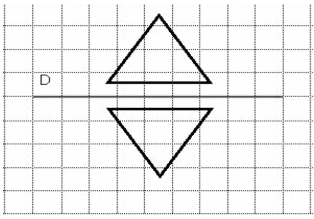


إذن : نظير قطعة مستقيمة $[AB]$ بالنسبة إلى مستقيم Δ هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ تساويها في الطول، علما أن نظير منتصف $[AB]$ هو منتصف $[A'B']$. لاحظ أنه إذا كانت $[AB]$ تعامد Δ فإن القطعتين $[AB]$ و $[A'B']$ تقعان على نفس المستقيم

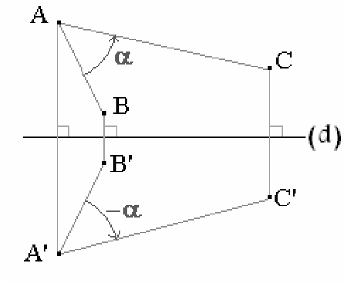
3. نظير مثلث بالنسبة إلى مستقيم باستخدام مربعات الورقة

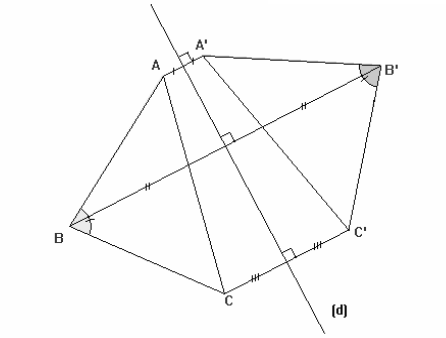
نوضح ذلك في الشكلين المواليين :





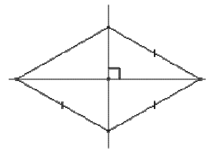
4. نظير زاوية بالنسبة إلى مستقيم



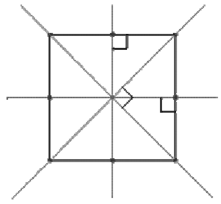


إذن : نظير زاوية $\widehat{ABC}$ بالنسبة إلى مستقيم (d) هي زاوية $\widehat{A'B'C'}$ لها نفس القيس.

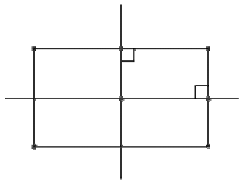
❖ أشكال لها محاور تناظر



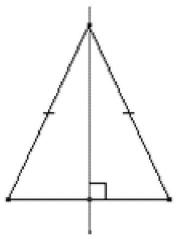
المعين له محورَا تناظر هما القطران



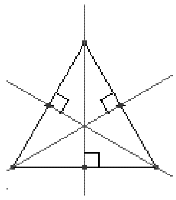
المربع له أربعة محاور تناظر هي القطران والمستقيمان اللذان ينصفان كل ضلعين متقابلين



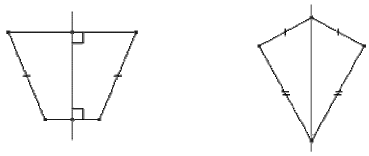
المستطيل له محورَا تناظر هما المستقيمان اللذان ينصفان كل ضلعين متقابلين



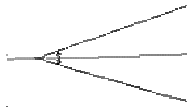
المثلث المتساوي الساقين (إذا لم يكن متساوي الأضلاع) له محور تناظر واحد.



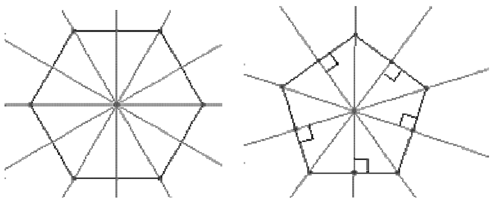
المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تناظر.



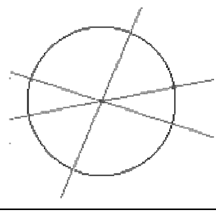
لكل شكل من الشكلين أعلاه محور تناظر واحد.



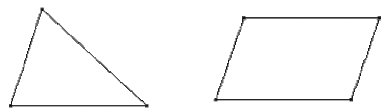
كل زاوية لها محور تناظر هو منصفها.



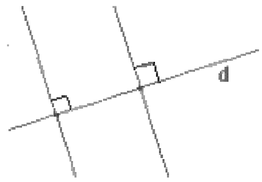
لهذين المضلعين المنتظمين العديد من محاور التناظر (عدد المحاور يساوي ضعف عدد الأضلاع).



للدائرة عدد غير منته من محاور التناظر.



هذان الشكلان (متوازي الأضلاع والمثلث) لا يقبلان أي محور تناظر.



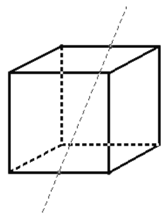
المستقيم هو محور تناظر نفسه وكل مستقيم يعامده هو أيضا محور تناظر.

❖ **المزيد من التناظر**

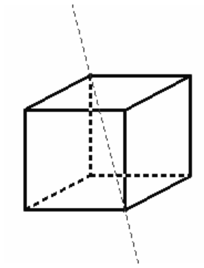
نجد التناظر في الكثير من الكائنات التي نشاهدها كل يوم. كما يوجد في كائنات أخرى غير مرئية.

مثال ذلك : المكعب يملك العديد من التناظرات

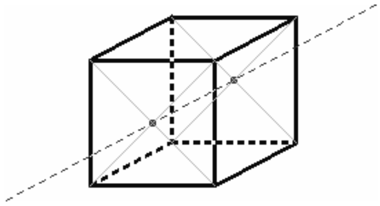
1) يملك 6 محاور تناظر يمرّ كل منها بمنصفي حرفين متقابلين كما هو مبيّن في الشكل الموالي



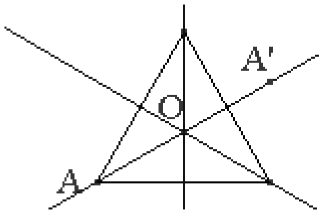
2) يملك 4 محاور تناظر يمرّ كل منها برأسين متقابلين كما هو مبيّن في الشكل



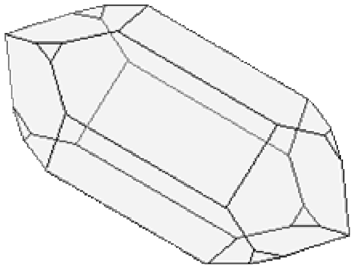
3) يملك 3 محاور يمرّ كل منها بمركزي وجهين متقابلين كما هو مبيّن في الشكل



نلاحظ، من جهة أخرى، أنه بالإمكان إيجاد أشكال في المستوي أو الفضاء تمتلك محاور تناظر دون أن يكون لها مركز تناظر. ولعل أبسط مثال على ذلك المثلث المتساوي الأضلاع فمحاوره الثلاثة تمثل محاور تناظر لكنه لا يقبل مركز تناظر... ولو قبل لكان هذا المركز هو نقطة تقاطع محاور التناظر ... أي لكان مركز الثقل هو مركز تناظر ... وهذا خطأ يرتكبه الكثير من التلاميذ وكذا بعض المعلمين والأساتذة أيضا! لاحظ في شكل الموالي موقع صورة أحد رؤوس المثلث:



ويعرِف علماء المعادن أن الشبكات البلورية تتحلى بالكثير من التناظر. وقد اهتم العلماء بدراسة هذه الخاصية بدءا من القرن الثامن عشر.



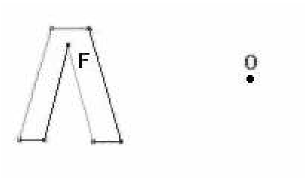
يبيّن هذا الرسم شكل تناظر بلّور الكوارتز

وقد أكدت خواص التناظر التي تتمتع بها المعادن الأشعة السينية وسمحت بتصنيفها حسب خواصها الهندسية. وثبت أن كل شبكة بلورية بسيطة (أي خاصة بمعدن خالص) لا يمكن أن تمتلك إلا تناظرات من شكل معين.

❖ **تمارين**

تمرين 1

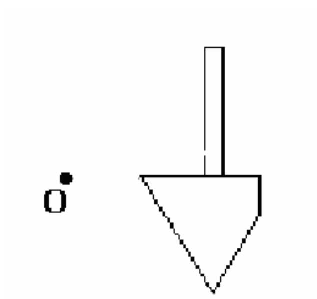
عيّن نظير الشكل F بالنسبة للنقطة O.



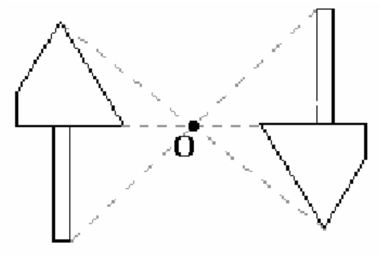
الحل

تمرين 2

عين نظير الشكل أدناه بالنسبة للنقطة O :

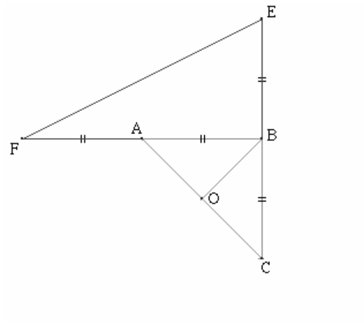


الحل



تمرين 3

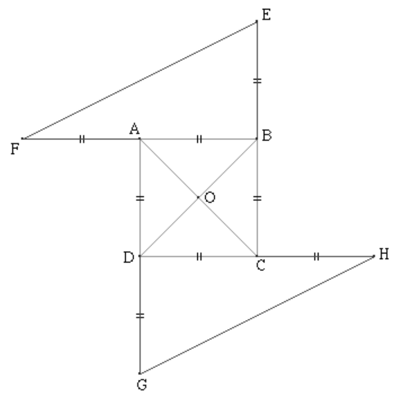
إليك الشكل التالي :



ارسم نظير هذا الشكل بالنسبة للنقطة O .

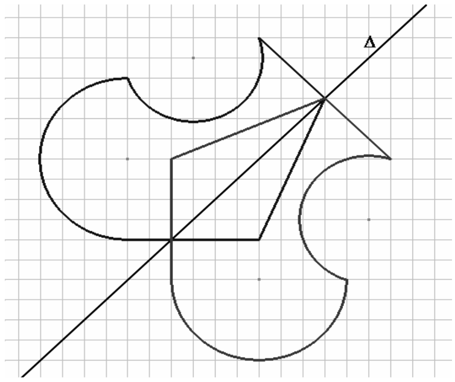
الحل

تعرّف على نظير كل نقطة من النقاط الموضحة في الشكل :



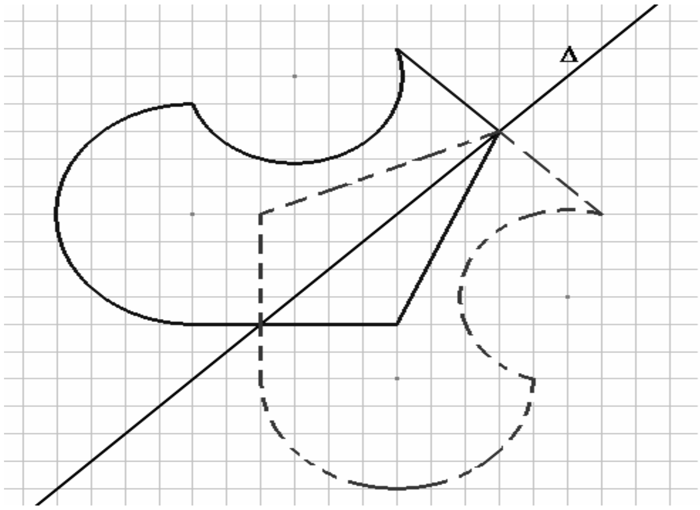
تمرين 4

في الرسم التالي تعرّف على شكل وعلى نظيره :



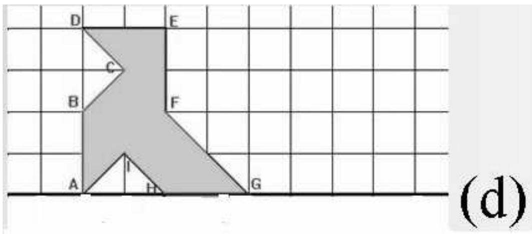
الحل

الشكل المتقطع (أدناه) هو نظير الشكل المتصل بالنسبة للمستقيم Δ (والعكس أيضا صحيح : الشكل المتصل نظير الشكل المتقطع بالنسبة للمستقيم Δ)

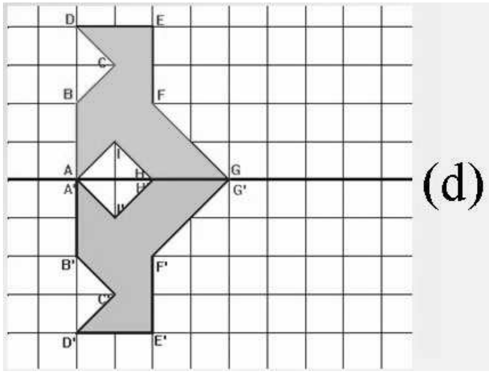


مرين 5

ارسم نظير الشكل المبيّن بالنسبة إلى المحور (d)

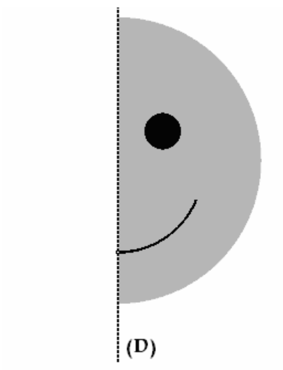


الحل

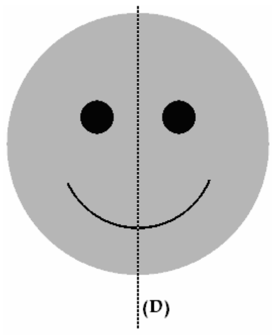


تمرين 6

ارسم نظير الشكل المبين بالنسبة إلى المستقيم (D)



الحل

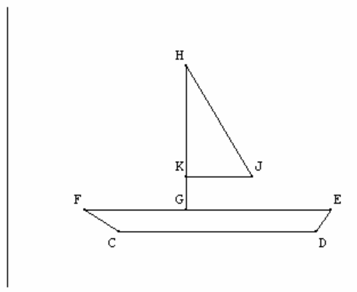


ملاحظة

التناظر يحافظ على التوازي والتعامد ومركز الثقل والمسافة والمساحة.

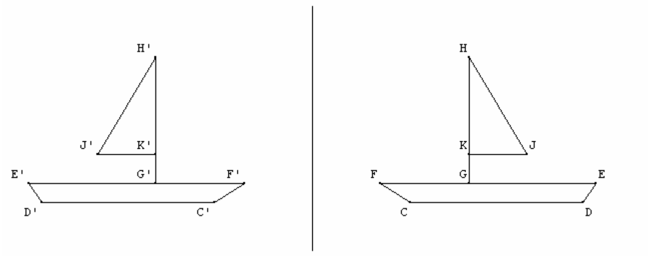
تمرين 7

إليك هذا الشكل



ارسم نظير الباخرة بالنسبة للمستقيم الشاقولي

الحل



V

المضلعات والمجسمات

المضلـــعات و المجـــســـمات

يتناول هذا الفصل موضوع المضلعات في المستوي والمجـــسمات في الفضاء الثلاثي الأبعاد. وقد ركّز على تقديم المضلعات المنتظمة وكيفية إنشاء البعض منها. أما بخصوص المجسمات فيقدم في البداية مـــسلمات الهندســـة الفضائية ثم يهتم بتقاطعات بعض تلك المجسمات ومـــساحاتها وحجومهـــا. وينتهي الفصل بموضوع تثقيفي حول المجسمات الإفلاطونية.

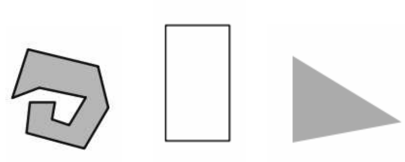
❖ المضلعات

المضلع هو شكل هندسي في المستوي تحيط به من كل جانب أضلاع مستقيمة ملتصقة ومرتّبة.

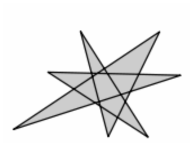
للحصول على مضلع نعتبر مجموعة نقاط لا يقل عددها عن 3 نقاط، ثم نرتبها ونصل وفق هذا الترتيب كل نقطة بالنقطة التي تليها.

تسمى القطع المستقيمة المحيطة التي تحد المضلع أضلاع المضلع. أما زوايا المضلع فهي الزوايا التي تشكلها أضلاعه.

ومن مثل هذه المضلعات ما تبيّنه الأشكال التالية :



لكن هناك أشكالا أخرى تعتبر أيضا مضلعات مثل الشكل التالي :



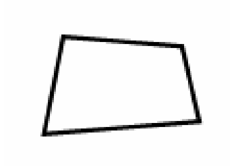
لنتعرّف على جملة من المضلعات المتداولة مثل المثلثات والرباعيات...

1. المثلثات

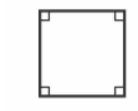
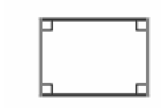
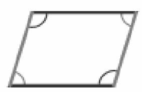
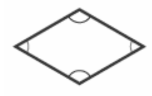
لقد سبق أن تناولنا موضوع المثلثات وتعرّفنا على أبرز أنواعها (المثلث القائم، المثلث المتساوي الساقين، المثلث المتساوي الأضلاع). ولذا لن نعود إليها في باب المضلعات.

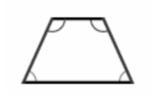
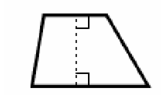
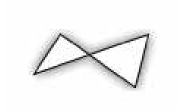
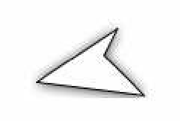
2. الرباعيات

الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع.



ومن أبرز الرباعيات نذكر المربع، المستطيل، متوازي الأضلاع، المعين، شبه المنحرف.

			
المربع	المستطيل	متوازي الأضلاع	المعين

			
شبه منحرف	شبه منحرف	رباعي مختلط	رباعي مقعر

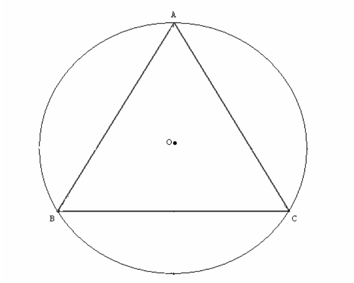
3. المضلعات المنتظمة

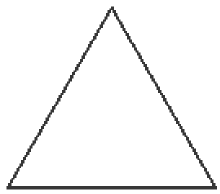
هي المضلعات التي تتساوى فيها جميع الأضلاع وكذلك جميع الزوايا. كل مضلع منتظم تحيط به دائرة.

نقدم في ما يلي بعض المضلعات المنتظمة ومساحاتها بدلالة نصف القطر R للدائرة المحيطة به. R هي المسافة التي تفصل مركز الشكل عن أي رأس (زاوية) من رؤوس المضلع.

4. المثلث المتساوي الأضلاع

هذا المثلث هو المثلث المنتظم الوحيد، له 3 أضلاع متساوية و 3 زوايا متساوية قيس كل منها **°60** :

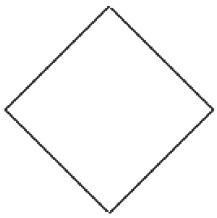
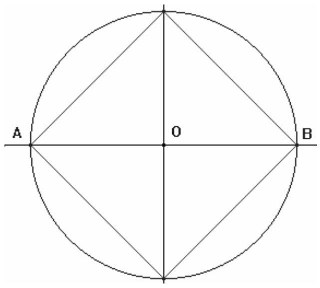




مساحته : $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \approx 1,30R^2$ حيث R هو نصف قطر الدائرة المحيطة به.

5. المربع

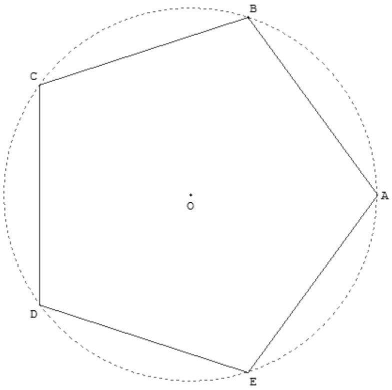
هو الرباعي المنتظم الوحيد، له 4 أضلاع متساوية و 4 زوايا متساوية قيس كل منها **°90**.

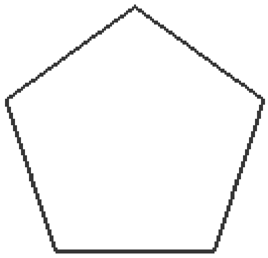



مساحته : $S = 2R^2$.

6. الخماسي المنتظم

له 5 أضلاع متساوية و 5 زوايا متساوية قيس كل منها **°108** :

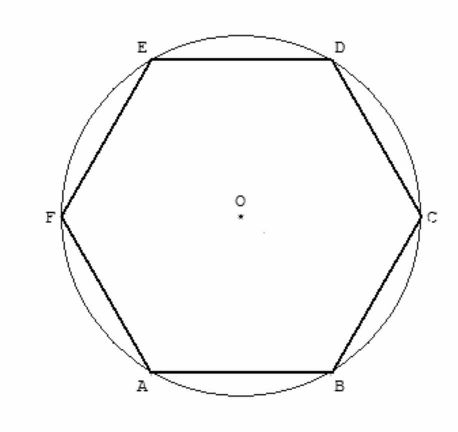


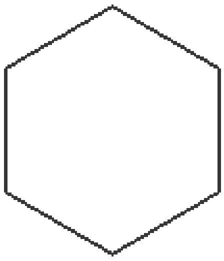


مساحته : $S = \frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}R^2 \approx 2.38R^2$.

7. السداسي المنتظم

له 6 أضلاع متساوية و 6 زوايا متساوية قيس كل منها **°120** :

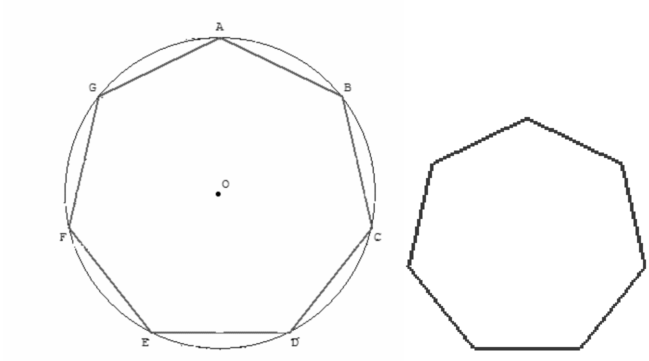




مساحته : $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \approx 2.60R^2$.

8. السباعي المنتظم

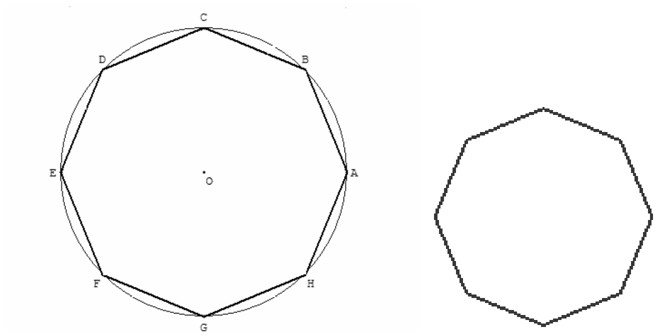
له 7 أضلاع متساوية و 7 زوايا متساوية قيس كل منها التقريبي هو **°129**:



مساحته : $S \approx 2.47R^2$.

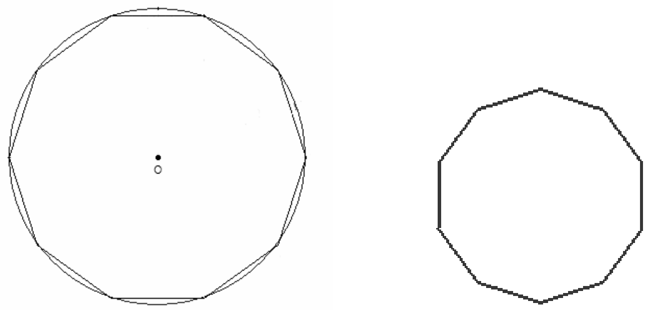
9. الثماني المنتظم

له 8 أضلاع متساوية و 8 زوايا متساوية قيس كل منها هو **°135** :

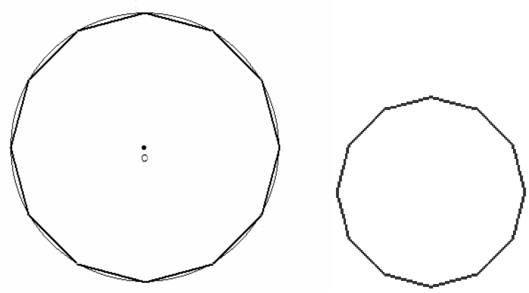


مساحته : $S = 2\sqrt{2}R^2 \approx 2.83R^2$.

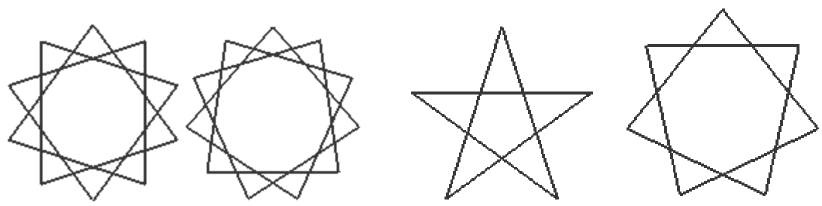
وهذا شكل العشاري المنتظم الذي يبلغ قيس كل زاوية من زواياه **°144** :



وهذا شكل المضلع المنتظم ذو 12 ضلعا الذي يبلغ قيس كل زاوية من زواياه **°155**:

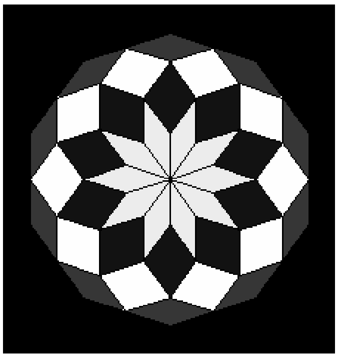


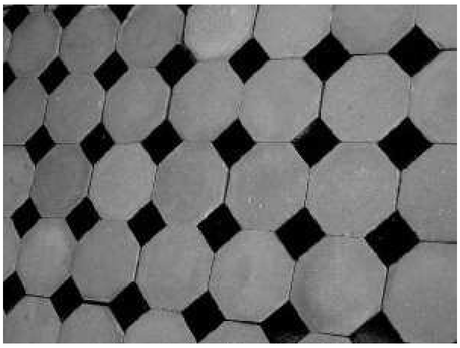
وهذه مضلعات أيضا... لكنها غير محدّبة (أي أن لها زوايا منفرجة) ... رغم أن فيها انتظاما :



ملاحظة

الملاحظ أن المضلعات تستخدم في كثير من الأحيان في موضوع التجميل والتبليط كما تبيّن الصورتان :

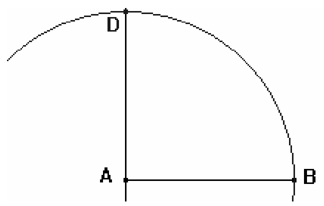




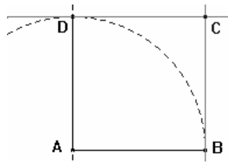
❖ إنشاء بعض المضلعات المنتظمة

1. إنشاء المربع

- نرسم قطعة $[AB]$ ونصف مستقيم يعامد $[AB]$ عند A.
- نرسم الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AB فيقطع نصف المستقيم أعلاه عند النقطة D.



– نرسم بعد ذلك الدائرة ذات المركز D ونصف القطر AB، وكذلك الدائرة ذات المركز B ونصف القطر AB. تلتقي في نقطتين نسمي إحداهما C.



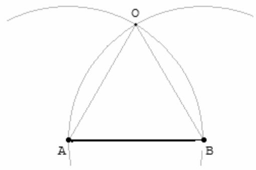
– إن الرباعي $ABCD$ مربع.

2. إنشاء السداسي المنتظم

ننطلق من قطعة مستقيمة $[AB]$ نعتبرها أحد أضلاع الخماسي المنتظم.

– نرسم الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AB والدائرة ذات المركز B ونصف القطر AB.

– تلتقي الدائرتان في نقطة O ستكون هي مركز الخماسي ومركز الدائرة المحيطة به (وهي الدائرة ذات المركز O ونصف القطر OA).



– نرسم الدائرة المحيطة بالخماسي، أي الدائرة ذات المركز O ونصف القطر OA.

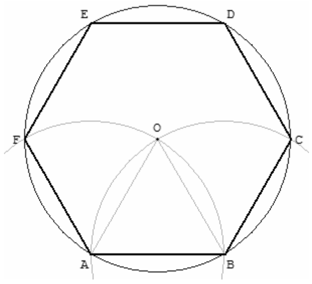
– الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AB تقطع الدائرة المحيطة في نقطتين هما B و F.

– الدائرة ذات المركز B ونصف القطر AB تقطع الدائرة المحيطة في نقطتين هما A و C.

– لاحظ أن المثلث OAB و OAC و OAF متساوية الأضلاع. وبالتالي $[FC]$ قطر للدائرة المحيطة.

– الملاحظة السابقة تبيّن أننا إذا رسمنا الدائرة ذات المركز F ونصف القطر AB فإنها تقطع الدائرة المحيطة في النقطة A ونقطة أخرى E، ورسمنا الدائرة ذات المركز C ونصف القطر AB فإنها تقطع الدائرة المحيطة في النقطة B ونقطة أخرى D فإن المضلع $ABCDEF$ سداسي منتظم.

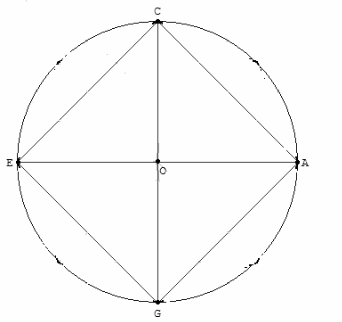
– وهكذا فالمضلع $ABCDEF$ أدناه سداسي منتظم.



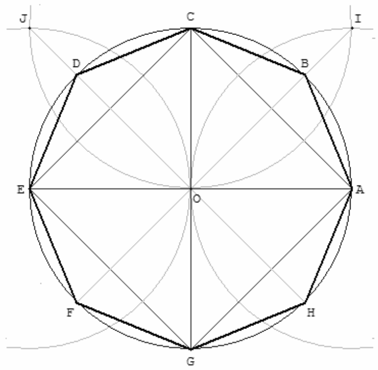
3. إنشاء الثماني المنتظم

– نرسم دائرة مركزها O.

– نرسم قطرين متعامدين $[AE]$ و $[CG]$ لهذه الدائرة.



– نرسم المنصفات الأربعة للزاوية القائمة التي رأسها O (يوضح الشكل كيف ننشئ تلك المنصفات). تقطع هذه المنصفات الدائرة المرسومة في النقاط B ، D ، F ، H.



- إن المضلع $AHGFEDCB$ ثماني منتظم.

❖ المجسمات

تعتبر الهندسة الفضائية من حقول الرياضيات التي قدمت العديد من المواضيع والمسائل الهامة والصعبة في آن. ومما لا شك فيه أن التلاميذ يواجهون صعوبات جمة في التعامل مع الهندسة بوجه عام، والهندسة الفضائية بوجه خاص، وهو ما جعل العديد من الإصلاحات تتخلى عن دروس في الهندسة تجنبا لتلك الصعوبات.

لكن الحل في هذا المجال العلمي ليس في الابتعاد عن الصعوبات بل يكمن الحل في البحث عن أفضل السبل التي تساعد التلميذ على استيعاب مثل هذه الدروس ... كما استوعبها سابقوه، سيما أن الجميع يؤكد على دور الهندسة في صقل فكر التلميذ عندما يتعلق الأمر بالبرهان الرياضي. والجدير بالملاحظة بخصوص الهندسة (الأولية) أنها تمثّل فرع الرياضيات الأقل تجريدا، ومن ثمّ فهو الأقرب إلى ذهن التلميذ.

لذلك يعتبر التعامل مع الهندسة النشاط الرياضي القريب من مستلزمات الحياة اليومية التي نجد فيها كل الأشكال الهندسية في المستوي وفي

الفضاء. كما أن الهندسة تساعد على الارتقاء من الملموس إلى المجرد في مجال الرياضيات وغيره. فهي تتطلب من المتعامل معها أن يتمثل الفضاء ومفهـــوم الاتجاه ... وأن يركز في التحليل والاستنتاج ...

وقد أظهرت البحوث البيداغوجية في الرياضـــيات أنـــه يستحـــسن الانطلاق من وضعيات معقدة نسبيا لتتجلى تدريجيا مختلف الحالات والمفاهيم المرتبطة بها. وهو ما يؤكد مرة أخرى أهمية دور الهندسة الفـــضائية في هـــذا الباب، سيما المجسمات.

1. مسلمات الهندسة الفضائية

هناك مسلمات في الهندسة الفضائية تمثل القاعدة التي تقوم عليها هذه الهندسة. إليك هذه المسلمات الثلاث التي من المهم التأمل فيها :

المسلمة الأولى : يمرّ مستقيم واحد من كل نقطتين معلومتين في الفضاء.

ويمرّ مستو واحد من كل ثلاث نقاط معلومة في الفضاء لا تقع على استقامة واحدة.

المسلمة الثانية : إذا انتمت نقطتان إلى مستو فإن هذا المستوي يشمل كل النقاط الواقعة على المستقيم المار بالنقطتين المعتبرتين.

المسلمة الثالثة : إذا انتمت نقطة إلى تقاطع مستويين مختلفين فإن تقاطعهما مستقيم يشمل تلك النقطة.

ملاحظة

نستنتج من المسلمتين الثانية والثالثة خاصية هامة كثيرا ما تستعمل في البراهين، هذا نصها :

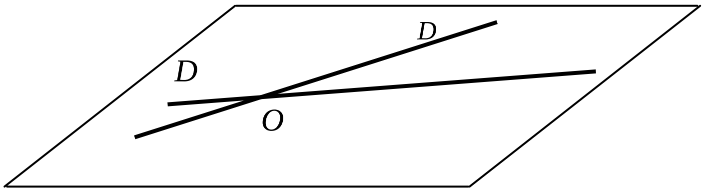
إذا انتمت نقطتان إلى تقاطع مستويين مختلفين فإن تقاطع هذين المستويين هو المستقيم الذي يشمل النقطتين المذكورتين.

وهكذا حتى نعيّن تقاطع مستويين يكفي أن نعيّن نقطتين من هذا التقاطع (الذي هو مستقيم).

2. تعاريف

في المستوي (الثنائي البعد) : يكون مستقيمان متقاطعين أو متوازيين (أو متطابقين). أما في الفضاء الثلاثي الأبعاد فالأمر ليس كذلك إذا كان المستقيمان لا يقعان في نفس المستوي. نذكّر بهذه الخاصية الهامة :

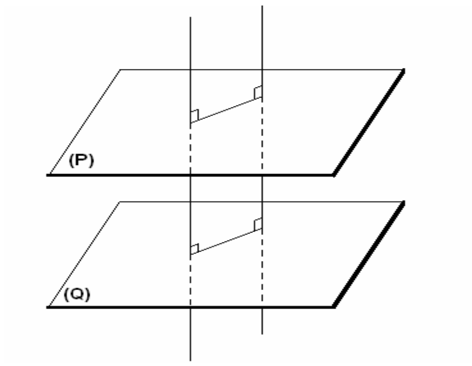
المستقيم في المستوي أو في الفضاء يُعيَّن بنقطتين. أما المستوي في الفضاء فيُعيَّن بثلاث نقاط. كما يعيّن أيضا بمستقيمين متقاطعين ذلك أن المستقيم الأول يعيّن بنقطة التقاطع ونقطة ثانية ويعيّن المستقيم الثاني بنقطة التقاطع ونقطة ثالثة.



في المستوي لا نجد سوى توازي مستقيمين، أما في الفضاء فهناك توازي مستقيمين وتوازي مستقيم ومستو وتوازي مستويين. لنقدم جميع هذه التعاريف :

تعريف توازي مستويين:

نقول إن مستويين متوازيان إذا كانا متطابقين أو كان تقاطعهما خاليا. انظر الشكل التالي توازي المستويين (P) و (Q)



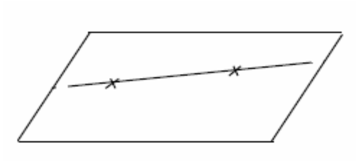
تعريف توازي مستقيم ومستوي:

نقول إن مستقيما يوازي مستويا إذا كان تقاطعهما خاليا (أو كان المستقيم محتويا في المستوي).

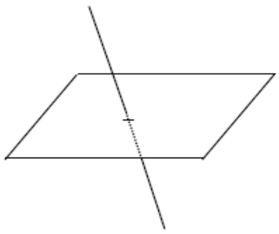
ملاحظة

إليك الوضعيات الثلاث الممكنة لمستقيم ومستو في الفضاء ... وليس هناك وضعية رابعة :

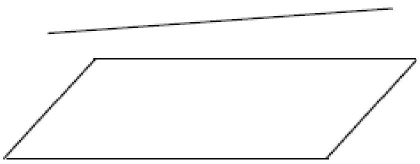
الوضعية الأولى : المستقيم يقع بأكمله في المستوي



الوضعية الثانية: المستقيم يقطع المستوي في نقطة واحدة



الوضعية الثالثة: المستقيم يوازي المستوي فلا يقطعه في أية نقطة



تعريف توازي مستقيمين

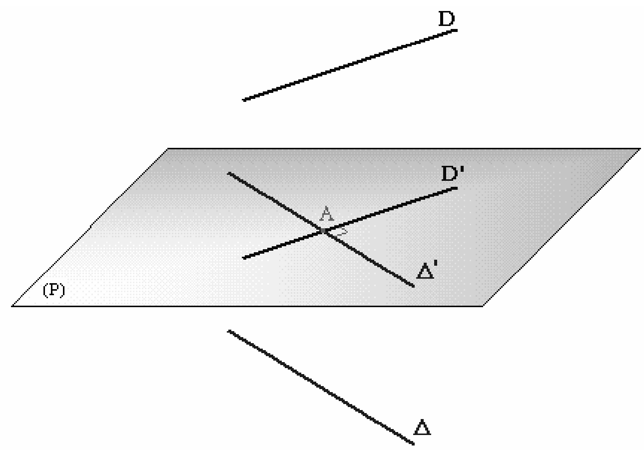
نقول عن مستقيمين في الفضاء إنهما متوازيان إذا وقعا في نفس المستوي وكانا متوازيين (في هذا المستوي).

في المستوي لا نجد سوى تعامد مستقيمين، أما في الفضاء فهناك تعامد مستقيمين وتعامد مستقيم ومستو وتعامد مستويين. لنقدم جميع هذه

تعريفات:

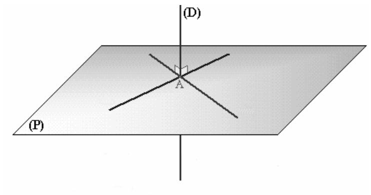
تعريف تعامد مستقيمين

نقول عن مستقيمين (D) و (Δ) إنهما متعامدان إذا كان المستقيم (D') الموازي لـــ (D) والمار بنقطة A والمستقيم (Δ') الموازي لـــ(Δ) والمار بالنقطة A متعامدان عند A (في المستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D') و (Δ')). انظر الشكل الموالي.



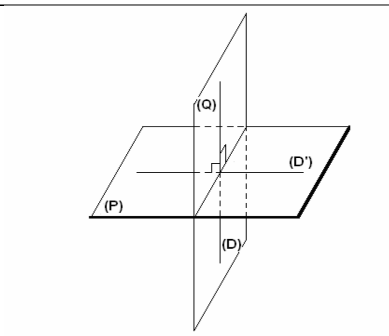
تعريف تعامد مستقيم ومستوي

2. نقول إن مستقيما (D) عمودي على المستوي (P) عند نقطة A إذا كان (D) عموديا على مستقيمين من (P) يمران من A. انظر الشكل الموالي.



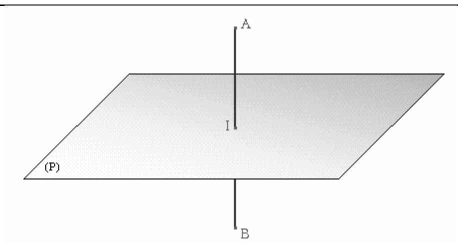
تعريف تعامد مستويين

نقول عن مستويين (P) و (Q) إنهما متعامدان إذا كان مستقيم (D) عمودي على (P) يعامد مستقيم (D') عمودي على (Q). انظر الشكل الموالي.



تعريف المستوي المحوري

ليكن $[AB]$ قطعة مستقيمة في الفضاء. المستوي المحوري (P) للقطعة $[AB]$ هو المستوي العمودي على $[AB]$ عند منتصفه I

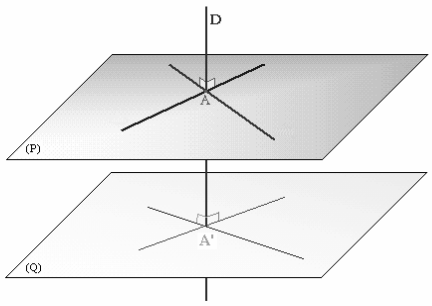


❖ بعض خواص التوازي والتعامد

نقدم في ما يلي قائمة من الخواص المرتبطة بالتوازي والتعامد باعتبار المستقيمات والمستويات في الفضاء.

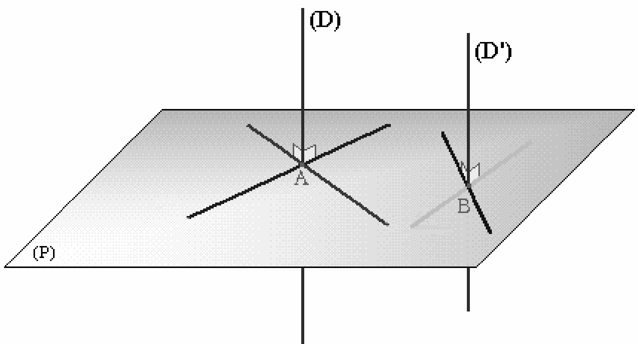
1. إذا عامد مستويان نفس المستقيم فإن المستويين متوازيان (انظر الشكل الموالي).

2. إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم عمودي على أحدهما يعامد المستوي الآخر (انظر الشكل الموالي).



3. إذا توازى مستقيمان فإن كل مستو عمودي على أحدهما يعامد المستقيم الآخر.

4. إذا عامد مستقيمان نفس المستوي فإنهما متوازيان.



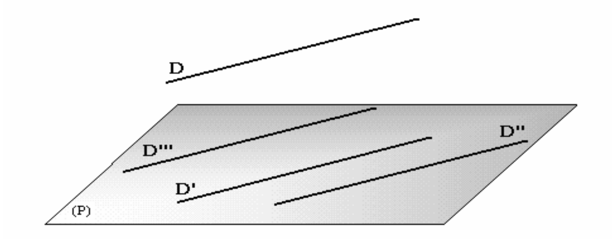
إذا افترضنا أن (D) // (D') وأن (D) يعامد المستوي (P) في A فإن (D') يعامد (P) في B. أما إذا افترضنا أن (D) و (D') يعامدان (P) فإننا نستنتج بأن (D) // (D').

5. إذا عامد مستقيم مستويا فإن هذا المستقيم يعامد كل مستقيم يحتوي المستوي.

6. إذا توازى مستقيمان فإن كل مستقيم يعامد أحدهما يعامد الآخر.

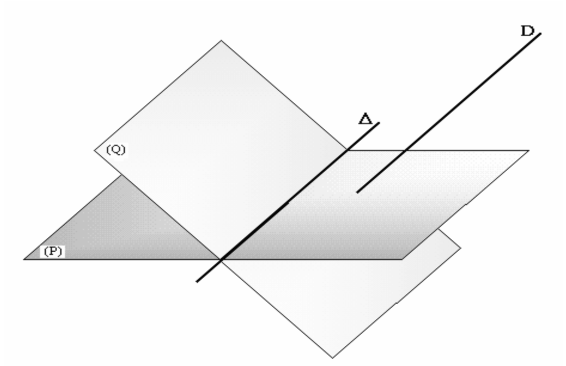
7. إذا كان مستقيم عموديا على مستو فإنه يعامد كل مستقيم يحتويه ذلك المستوي.

8. إذا وازى مستقيم مستويا فهو يوازي (على الأقل) مستقيما محتويا في المستوي. في الشكل الموالي نرى أن المستقيم (D) يوازي المستوي (P). ومن ثمّ فهو يوازي مثلا المستقيمات الثلاثة الموضحة على المستوي.

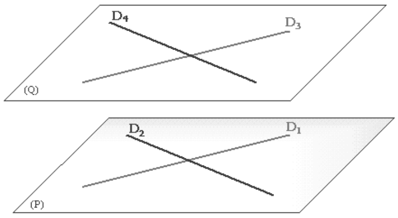


لإدراك هذه النتيجة يكفي التفطن إلى أن كل مستو يشمل (D)، ولا يوازي المستوي (P) يقطع هذا الأخير وفق مستقيم (Δ). إن (D) و (Δ) متوازيان (ولولاه لتقاطع (D) و (P))، مع الملاحظة أن (Δ) مستقيم محتو في المستوي (P).

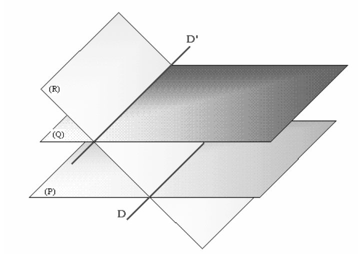
9. إذا وازى مستقيم (D) مستويين (P) و (Q) فإنه يوازي المستقيم (Δ) الذي يمثّل تقاطعهما.



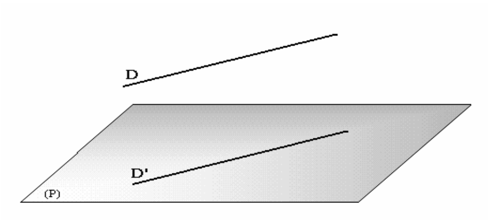
10. إذا كان مستقيمان متقاطعان (D_1) و (D_2) في مستو (P) موازيين لمستقيمين (D_3) و (D_4) في مستو (Q) فإن المستويين (P) و (Q) متوازيان.



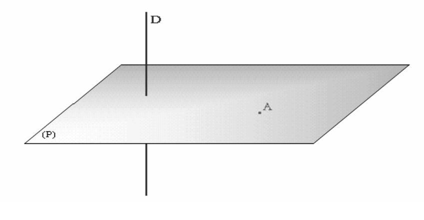
11. إذا كان مستويان (P) و (Q) متوازيين وقطعا بمستو (R) عند مستقيمين (D) و (D') فإن (D) و (D') متوازيان.



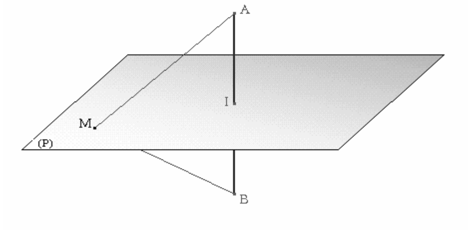
12. إذا كان مستقيم (D) يوازي مستقيما (D') محتويا في مستوي (P) فإن المستقيم (D) والمستوي (P) متوازيان.



13. هناك مستو واحد (P) يعامد مستقيما معلوما (D) ويمر بنقطة معلومة A

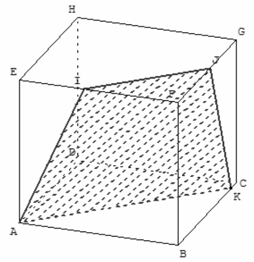


14. المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$ هو مجموعة النقاط M من الفضاء المتساوية المسافة عن A و B، أي النقاط M التي تحقق $MA = MB$:

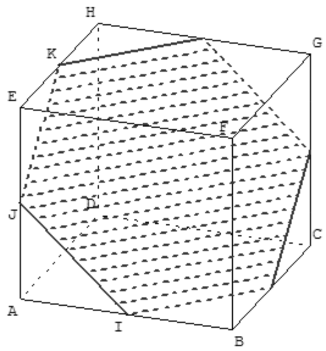


❖ **تقاطع مستو مع متوازي مستطيلات وأسطوانة**

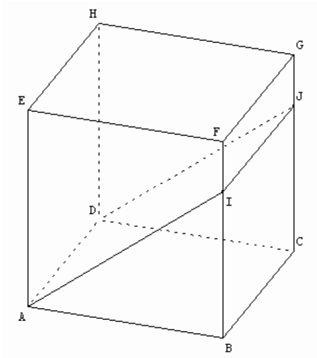
1. تقاطع متوازي مستطيلات ومستو يمرّ بأحد رؤوسه. التقاطع هو شبه المنحرف المظلل:



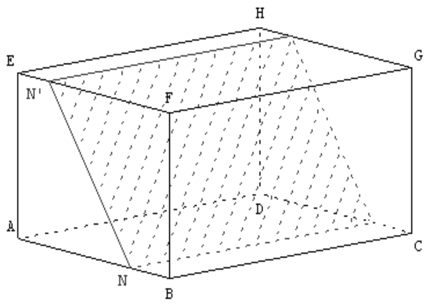
2. تقاطع مكعب ومستو يمرّ بمنتصفات أحرف متوالية (I ، J ، K).
هذا التقاطع هو المضلع السداسي المظلل :



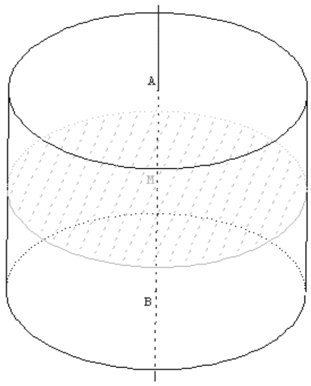
3. تقاطع متوازي مستطيلات ومستو يشمل أحد أحرف متوازي المستطيلات. هذا التقاطع هو المستطيل المرسوم داخل المجسم :



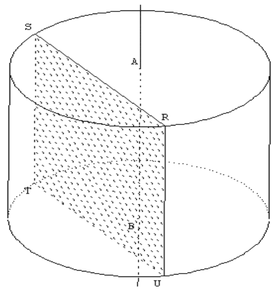
4. تقاطع متوازي مستطيلات ومستو يقطع وجهين وفق قطعتين موازيتين لأحد الأحرف. هذا التقاطع هو المستطيل المظلل:



5. تقاطع أسطوانة ومستو عمودي على محـــور الأسطوانة. هذا التقاطع هو القرص المظلل :



6. تقاطع أسطوانة ومستو يوازي محور الأسطوانة. هذا التقاطع هو المستطيل المظلل:



❖ مساحات وحجوم بعض المجسمات

1. تعريف المخروط

في الهندسة الأولية المخروط هو السطح الذي نحصل عليه بجعل مثلث قائم يدور حول أحد ضلعيه القائمين. في هذه الحالة تسمى المساحة التي يمسحها (وهي قرص) الضلع القائم الآخر قاعدة المخروط.

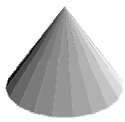
أما ارتفاع المخروط فهو طول الضلع الذي يدور حوله المثلث. كما يسمى طرف هذا الضلع الذي لا يمس القاعدة رأس المخروط.

نصف زاوية الرأس للمخروط هي الزاوية المثلث القائم التي رأسها رأس المخروط.

وبعبارة أوضح :

إذا كان ABC مثلثا قائما في B وجعلناه يدور حول الضلع AB فإن

* A هو رأس المخروط،
* الطول BC هو ارتفاعه،
* قاعدته هي القرص الذي مركزه B ونصف قطره BC الواقع في المستوي العمودي على المستقيم (AB)، ونصف زاويته هي $\widehat{BAC}$.

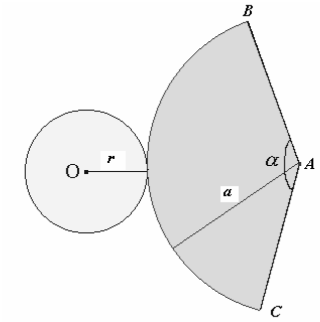


ملاحظة

يسمى المخروط الذي عرّفناه آنفا مخروطا دورانيا أو قائما، وهو الذي نعنيه عموما. لكن المفهوم العام (النظري) للمخروط في الهندسة يشمل سطوحا أخرى.

2. مساحة المخروط

نعتبر مخروطا دورانيا تصميمه من الشكل



رأسه A وقاعدته قرص نصف قطره r وطول المسافة الفاصلة بين الرأس ونقطة من نقاط حافة القاعدة يساوي a. إن المساحة الجانبية S للمخروط هو مساحة المثلث المنحني $\widehat{ABC}$، أي جزء القرص الذي مركزه A ونصف قطره a وزاويته α. حساب S يبيّن أن

$$S = \frac{a^2\alpha}{2} = \frac{a^2}{2}\frac{2\pi r}{a} = \pi ar$$

وإن بحثنا عن المساحة الكلية فعلينا أن نضيف إلى المساحة السابقة مساحة القاعدة، أي أن المساحة الكلية هي : $\pi ar + \pi r^2$.

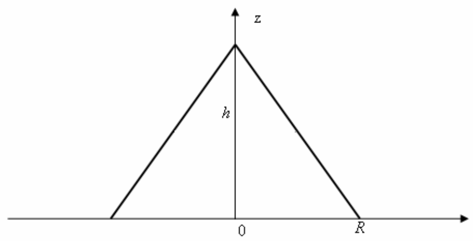
3. حجم الأسطوانة

إذا كان h هو ارتفاع هذه الأسطوانة الدورانية، وكان r نصف قطر قاعدتها فإن العلاقة التي تعطي الحجم V (باستخدام التكامل) تعطي :

$$V = \pi r^2 h .$$

4. حجم المخروط

نعتبر مخروطا دورانيا نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h كما هو مبيّن في الشكل الموالي (الممثل لمقطع مخروط) :



حجم هذا المخروط هو $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

ملاحظة

نلاحظ عند مقارنة حجم مخروط نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h بحجم أسطوانة نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h أن حجم المخروط يساوي **ثلث** حجم الإسطوانة.

يعني ذلك أننا نستطيع "وضع" 3 مخروطات داخل إسطوانة إن كان لها نفس الارتفاع ونفس نصف القطر... في حين أن مساحة مستطيل تساوي نصف مساحة المثلث الذي يكون ارتفاعه عرض المستطيل وقاعدته طول ذلك المستطيل ! ألا يرجع ذلك إلى الانتقال من المستوي إلى الفضاء ... الانتقال من البعد 2 إلى البعد 3؟

5. حجم الكرة

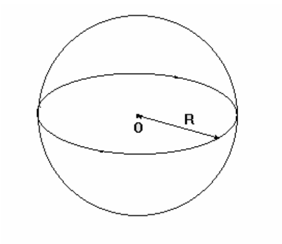
هناك خاصية مهمة للكرة : يمثل سطح الكرة أصغر مساحة ممكنة من بين السطوح التي تحيط بحجم معطى. بمعنى أنه إذا أعطي حجم وطلب وضعه داخل إناء وأردنا أن يكون سطح الإناء أصغريا فلا بد أن نختار الإناء كروي الشكل.

كما أن الكرة تحتوي على أكبر حجم ممكن من بين السطوح التي لها مساحة معطاة.

بمعنى أنه إذا أعطي سطح مساحته معلومة وأردنا أن نعطي له شكلا يجعله يحتوي على أكبر حجم ممكن فلا بد أن نجعله يأخذ شكل كرة.

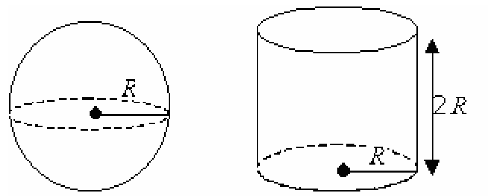
هذه الخاصية هي التي تجعل فقعات الصابون وقطرات الماء – عندما نهمل تأثير الجاذبية – تأخذ أشكالا كروية ذلك أن الضغط السطحي يسعى دوما إلى تصغير المساحة.

نعتبر كرة نصف قطرها R. عند حساب الحجم V لهذه الكرة (باستخدام التكامل) نجد أن : $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.



ملاحظة

كان أرخميدس قد بيّن أن مساحة سطح كرة تساوي المساحة الجانبية للأسطوانة التي قطر قاعدتها يساوي قطر الكرة وارتفاعها يساوي أيضا قطر الكرة.



المساحة الجانبية لهذه الأسطوانة = مساحة سطح هذه الكرة.

ولذلك نستنتج مما قاله أرخميدس أن مساحة سطح كرة نصف قطرها R هو $4\pi R^2$.

6. جدول المساحات

نذكر في الجدول التالي بمساحات بعض الأشكال الهندسية في الفضاء. وقبل ذلك نذكّر أن الموشور هو مجسم له قاعدتان متوازيتان وجوانبه مستطيلات، ويكون الموشور قائما إذا كانت الأحرف الجانبية تعامد مستويي القاعدتين (المكعب موشور، وكذلك متوازي المستطيلات، ...).
أما الهرم فجوانبه مثلثات، ورأسه هو الزاوية المشتركة لتلك المثلثات.

الشكل	المساحة
مكعب طول ضلعه a	$6a^2$
متوازي المستطيلات أبعاده a ، b ، c	$2ab+2bc+2ac$
الموشور القائم	المساحة الجانبية : جداء محيط القاعدة في الارتفاع
الهرم	المساحة الجانبية : مجموع مساحات المثلثات الجانبية
أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h	المساحة الجانبية : $2\pi R.h$ المساحة الكلية : $2\pi R.h+2\pi R^2$
مخروط نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h	المساحة الجانبية : $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ المساحة الكلية : $\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2$
كرة نصف قطرها R	$4\pi R^2$

7. جدول الحجوم

نقدم في الجدول التالي قائمة توضح حجوم أهم الأشكال الهندسية في الفضاء :

الشكل	الحجم
مكعب طول ضلعه a	a^3
متوازي المستطيلات أبعاده a ، b ، c	$a.b.c$
متوازي وجوه	مساحة قاعدته في ارتفاعه
الهرم	ثلث جداء قاعدته في ارتفاعه
الموشور	مساحة قاعدته في ارتفاعه
أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h	$\pi R^2.h$
أسطوانة	مساحة قاعدتها في ارتفاعها
مخروط نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h	$\dfrac{\pi R^2.h}{3}$
الهرم	ثلث جداء مساحة قاعدته في ارتفاعه
كرة نصف قطرها R	$\dfrac{4\pi R^3}{3}$
مجسم ناقصي أنصاف محاوره a ، b ، c	$\dfrac{4\pi}{3}a.b.c$
جذع مخروط ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتاه R و R'	$\dfrac{\pi h}{3}\left(R^2+R'^2+RR'\right)$
جذع كرة ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتاه Rو R'	$\dfrac{\pi h}{6}\left(3R^2+3R'^2+h^2\right)$
قبة كرة ارتفاعها h ونصف قطر الكرة r	$\dfrac{\pi h^2}{3}(3r-h)$

ملاحظة

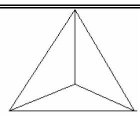
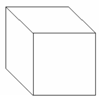
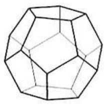
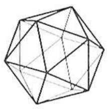
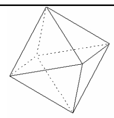
لحساب حجم أي مجسم نستخدم العلاقة $\int A(t)dt$ التي تعبر عن الحجم المطلوب حيث :

1) $A(t)$ هي مساحة مقطع المجسم العمودي على "المحور" الذي ينتمي إليه t،

2) t تمسح "الارتفاع".

❖ **المجسمات الإفلاطونية**

يحمل هذا الاسم كل متعدد وجوه يتشكل سطحه من مضلعات

المجسم	**نوع مضلعات كل سطح**	**عدد الرؤوس**	**عدد الأحرف**	**عدد الوجوه**	**شكل المجسم**
رباعي الوجوه	مثلث متساوي الأضلاع	4	6	4	
المكعب	مربع	8	12	6	
متعدد وجوه ذو 12 وجها	خماسي	20	30	12	
متعدد وجوه ذو 20 وجها	مثلث	12	30	20	
متعدد وجوه ذو 8 وجوه	مثلث	6	12	8	

منتظمة متطابقة تحدها زوايا متساوية. هناك خمسة مجسمات من هذا القبيل، ويمكن البرهان على أنه لا يوجد أكثر من ذلك. هذه المجسمات هي :

لاحظ في هذه المتعددات السطوح أن لدينا في كل الحالات $S-A+F=2$. ذلك أيضا ما لاحظناه في كل الحالات التي طلب منا فيها حساب $S-A+F$ في التمرين. تسمى العلاقة $S-A+F=2$ علاقة أولر Euler. وهناك من يسميها علاقة أولر- ديكارت Descartes لأنه يبدو أن ديكارت كان قد برهن على علاقة مماثلة لم يتم نشرها، ولذا أضاف البعض اسم ديكارت إلى تسمية هذه العلاقة. وقد أثبت بوانكريه Poincaré تعميما لعلاقة أولر عام 1893 في فضاءات متعددة الأبعاد، بعدها أكبر من 3.

إذا لم يكن متعدد الوجوه محدبا فمن الممكن ألا تصدق علاقة أولر. ولدي الرياضيين الكثير من الأمثلة، منها الشكل التالي الذي فيه : $S=12$ ، $A=24$ ، $F=10$. إذ نجد هنا: $S-A+F=-2$

تنص علاقة أولر على أن $S-A+F=2$ إذا ما كان متعدد السطوح بدون ثقوب، أي إذا حذفنا منه أحد وجوهه فإننا نحصل على سطح مترابط ببساطة (باللغة الطبولوجية). تسمى هذه المجسمات متعددات الوجوه من النمط 0. مثال ذلك : كل متعددات الوجوه المحدبة من النمط 0. وبالتالي تصدق على هذه المجسمات علاقة أولر.

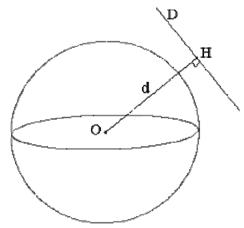
تمرين

ادرس تقاطع سطح كرة مع مستقيم.

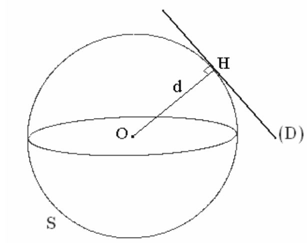
الحل

نعتبر مستقيما (D) وسطح كرة S مركزها O ونصف قطرها r. نرمز بـــ H لمسقط O العمودي على المستقيم (D) وبـــ d للمسافة OH. هناك 3 حالات:

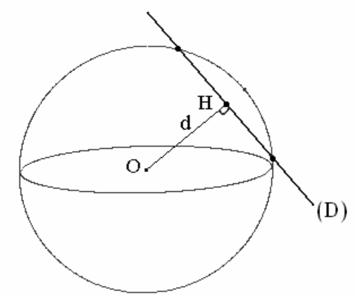
الحالة الأولى $d > r$: لا يتقاطع سطح الكرة مع المستقيم، أي أن $S \cap (D) = \varnothing$.



الحالة الثانية $d = r$: هناك نقطة مشتركة واحدة بين سطح الكرة S والمستقيم (D)، هي النقطة H. تسمى هذه النقطة نقطة تماس المستقيم بسطح الكرة.



الحالة الثالثة $d < r$: هناك نقطتا تقاطع بين سطح الكرة والمستقيم. هاتان النقطتان متناظرتان بالنسبة للنقطة H.



قائمة المراجع

I- الحساب

II- الهندسة

II. مراجع الهندسة :

هناك مراجع كثيرة في الهندسة تغطي هذا الموضوع نذكر منها :

1. أ.ب. سعد الله، ع. قاصد، ب. شرابطة، ح. بوركاب : الهندسة، دورس وتمارين محلولة، دار شريفة، الجزائر، 1990.

2. أ.ب. سعد الله : دروس في الهندسة لأساتذة التعليم الثانوي (6 دروس مطبوعة)، المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم، الحراش، الجزائر، 2006–2007.

3. أ.ب. سعد الله : دروس لمفتشي التعليم المتوسط (مطبوعة)، المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم، الحراش، الجزائر، 2008.

4. Abdeljaouad Mahdi : Eléments de géométrie du plan, Pub. de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, Tome 2, Tunis, 2000.

5. Antoine Dalle & C. De Waele : Cours de géométrie à l'usage de l'enseignement moyen et de l'enseignement normal, 21e edition, ed. La Procure Namur, Bruxelles, 1959.

6. Jean-Luc Chabert *: Les géométries non euclidiennes*, Repères, Octobre, 1990.

7. Jean Dieudonné *: Pour l'honneur de l'esprit humain*, Coll. Pluriel, Ed. Hachette, Paris, 1987.

8. Stamatia Mavridès : *La relativité*, Que sais-je, n° 37, P.U.F, 1995.

9. في المواقع التالية توجد العديد من الدروس والكتب المجانية حول الهندسة (دروس وتمارين) :

www.alain.be/geometrieplane.html
www.mathdaily.com/lessons/Mathematics
www.bibmath.net
www.homeomath.imingo.net
www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm
www.bibmath.net/dico/index.php3?action=rub&quoi=400
www.ac-nice.fr/maths/Coin/autrement/pavages/Penrose/Penrose1.htm
www.cmp.caltech.edu/~lifshitz/quasicrystals.html
www.mathcurve.com/polyedres/regulier/polygoneregulier.shtml
pagesperso-orange.fr/debart/geoplan/polygone_regulier.html#ch7
www.sciences-en-ligne.com/
www.chronomath.com