بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المخلوقين محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ، يسرني أن أقدم لكم هذا العمل المتواضع وهو عبارة على جميع دروس وتمارين

الرياضيات لمستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية مجمعة في كتاب واحد مفهرس

لتصفح أي درس أضغط على عنوانه في الفهرس وكذلك التمارين

وللرجوع إلى الفهرس إضغط على

تجميع وترتيب وفهرست

ALMOHANNAD

عضو بمنتديات دفاتر

الفهرس

النهـــايـــات والاتصـــــال

I- أنشطـــة :

1- أحسب النهايات التالية :

- $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} x^2+x+1$$
$$= 3$$

- $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+5}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$
$$= 1$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}\quad 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$
$$= \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$$ مع : $0 \prec q$ و $0 \prec p$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+p^2-p^2\right)\left(\sqrt{x^2+q^2}\quad q\right)}{\left(x^2+q^2-q^2\right)\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}$$
$$= \frac{2q}{2p}$$

$$= \frac{q}{p}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$

لنحسب :

$$S = 1+2+3+\dots+n$$
$$S = n+(n-1)+(n-2)+\dots+1$$
$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{\text{n مـــــرة}}$$
$$2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

إذن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

تذكيـر :

$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3$$
$$= \lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} \times 3 = 3$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$

تذكيـر :

$$\lim_{X\to 0} \frac{\tan X}{X} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x} = \frac{1}{4}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

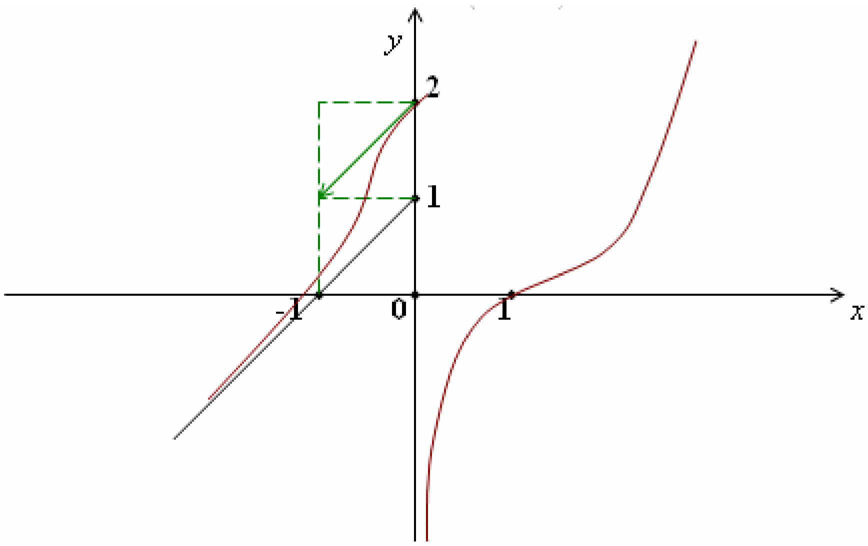
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

2- ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- حدد D_f.



- حدد النهايات التالية :

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

* $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$ * $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ * $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x$

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ * $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{f(x)-2}{x}$

الجـواب :

- $D_f =]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[$

- * $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

* $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$

* $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = 2$

* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

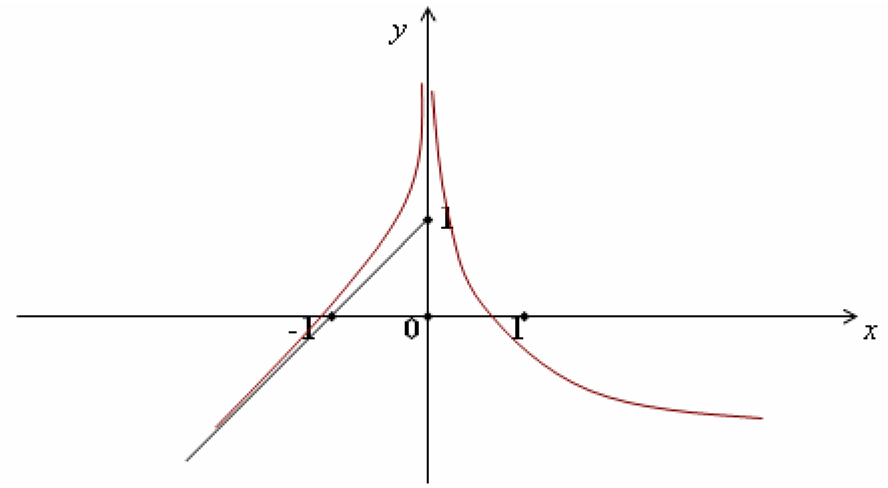
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 1$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \prec 0}} \dfrac{f(x)-2}{x} = 1$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

(لأن ℓ_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب).

-3 ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.



- حدد D_f.
- حدد النهايات التالية :

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x)$
* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \prec 0}} f(x)$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

- هل f متصلة في 0 ؟
- حدد :

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

- أعط جدول تغيرات f ، ثم جدول تغيرات الدالة $g = |f|$.

<u>الجـواب :</u>

- $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[= \mathbb{R}-\{0\}$

- * $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \prec 0}} f(x) = +\infty$

  * $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- f ليست متصلة لأن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

-

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 1$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

-

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$	
	$-\infty$				$-\infty$

x	$-\infty$	**-1**	**0**	**1**	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$ $+\infty$		$+\infty$
		0		**0**	

4- حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

- $f(x) = \sqrt{|x|(x^2-1)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x|(x^2 - 1) \geq 0\}$

x	$-\infty$ **-1**	**0**	**1**	$+\infty$
x^2-1	+	-	-	+
$\|x\|$	+	+	+	+
$\|x\|(x^2-1)$	+	-	-	+

$D_f =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} - x^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0$ و $\dfrac{1}{x} - x^2 \geq 0\}$

$\dfrac{1}{x} - x^2 = \dfrac{1-x^3}{x}$

$= \dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{x}$

x	$-\infty$	0	1 $\quad$ $+\infty$
$1-x$	+	+	-
x	-	+	+
$\dfrac{1-x}{x}$	-	+	-

$$D_f \;=\;]0,1]$$

5- لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

- حدد D_f.
- بين أنه يمكن تمديد f باتصال في **1** .
- ليكن g هذا التمديد بالاتصال، حدد D_g، ثم أحسب نهايات g عند محدات D_g.

الأجوبـة :

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- لنحسب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

$$\lim_{x\to1} f(x) \;=\; \lim_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

نضع : $X=x-1$

$$(x\to1) \;\Leftrightarrow\; (X\to0)$$

إذن :
$$\lim_{x\to1} f(x) \;=\; \lim_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X^2} \;=\; \frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

إذن : f تقبل تمديد باتصال في **1** .

وهذا التمديد هو الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{و} \quad x\neq1 \\ g(1)=\dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

- $D_g=\mathbb{R}$

لدينا :
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad -1 \;\le\; \cos x \;\le\; 1$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad -1 \;\le\; \cos(x-1) \;\le\; 1$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad -1 \;\le\; -\cos(x-1) \;\le\; 1$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad 0 \;\le\; 1-\cos(x-1) \;\le\; 2$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad 0 \;\le\; \frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2} \;\le\; \frac{2}{(x-1)^2}$$

وبما أن :
$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2}{(x-1)^2} \;=\; 0$$

إذن : $$\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$$

-6 ليكن k عددا حقيقيا و f دالة معرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+kx+1 & ; \quad x \succ -1 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{x-2} & ; \quad x \le -1 \end{cases}$$

حدد k لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

الجــواب :

لدينا f متصلة على $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$

إذن : لكي تكون f ممتصلة على $\mathbb{R}$ يكفي أن تكون متصلة في **-1** .

ولهذا يكفي ان تكون :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} f(x) = f(-1)$$

أي : $$0 = 2 - k$$

$$k = 2$$

-7 أحسب النهايتين :

-a $$\lim_{x\to0^+} \sin x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

لدينا : $$-1 \le \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \le 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$$

أي : $$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$$

إذن : $$\left|\sin x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le |\sin x| \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$$

وبما أن : $$\lim_{x\to0^+} |\sin x| = 0$$

فإن : $$\lim_{x\to0^+} \left|\sin x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = 0$$

ومنه : $$\lim_{x\to0^+} \sin x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

-b $$\lim_{|x|\to+\infty} x^2\left(\cos x + 2\right)$$

لدينا : $$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

إذن : $$1 \le \cos x + 2 \le 3 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

ومنه : $$x^2 \le x^2\left(\cos x + 2\right) \le 3x^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

وبما أن : $$\lim_{|x|\to+\infty} x^2 = +\infty$$

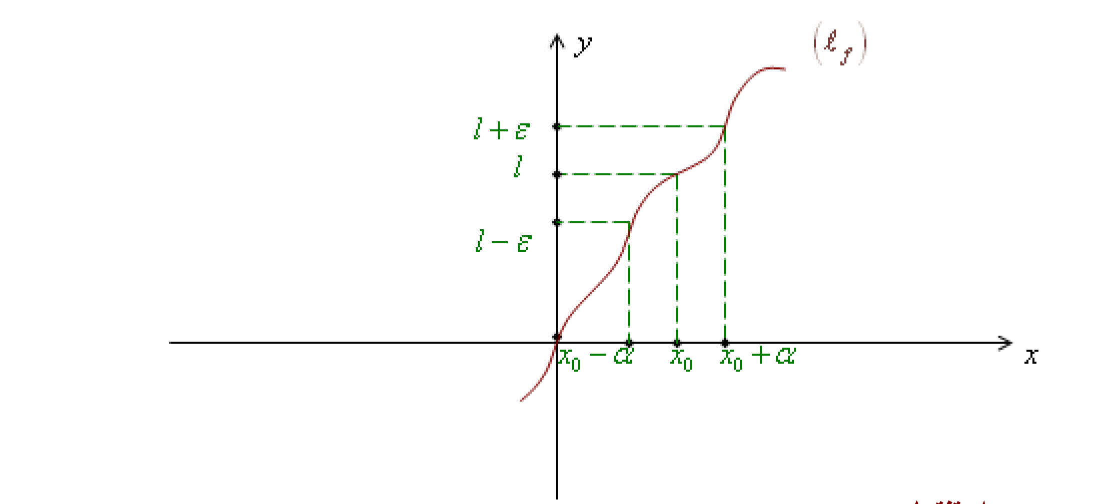
فإن :
$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2\left(\cos x+2\right)=+\infty$$

II- تعاريــف :

1- النهايــات :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

نقول أن نهاية $f(x)$ عندما تؤول x إلى x_0 هي l إذا وفقط إذا كان : كلما اقتربت x من x_0 فإن $f(x)$ تقترب من l.



استنتـاج :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \;/\; x_0\in\mathbb{R}\;;\; l\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\;;\;\exists\alpha>0\;/\;(\forall x\in D_f)\;;\;0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

ملاحظـات :

1- $x_0\in\mathbb{R}\;;\;l\in\mathbb{R}$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$
$$\Leftrightarrow (\forall A>0)\;;\;\exists\alpha>0\;;\;(\forall x\in D_f)\;;\;0<|x_0-x|<\alpha\Rightarrow f(x)>A$$

2-
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\;\exists B>0\;(\forall x\in D_f)\;;\;x>B\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

3-
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\Leftrightarrow (\forall A>0)\;\exists B>0\;(\forall x\in D_f)\;;\;x>B\Rightarrow f(x)>A$$

R

c العمليات على النهايات :

$(l \cdot l') \in \mathbb{R}^2$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
l	l'	$l + l'$	$l \cdot l'$	$\frac{l}{l'}\ ;\ l' \neq 0$
$l \succ 0\ ;\ l$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$l \succ 0\ ;\ l$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$-\infty$	$l'\ ;\ l' \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$F.I$
0	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$	0
0	0	0	0	$F.I$

الأشكال غير المحددة :

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \times \infty$	$(+\infty) - (+\infty)$

2- الاتصــال

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0 ، $x_0 \in \mathbb{R}$

- نقول أن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

التمديد بالاتصال :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 ، $x_0 \notin D_f$.

نقول أن : f تقبل تمديدا باتصال في x_0 إذا وفقط إذا كانت نهاية $f(x)$ عند x_0 منتهية.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

الدالة g المعرفة بــ :

$$\begin{cases} g(x) = f(x)\ ;\ x \in D_f \\ g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{cases}$$

تسمى تمديد f باتصال في x_0.

R

الاتصال على مجال :

تكون f متصلة على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة في a على اليمين وفي b على اليسار.

3- مركب دالتين Composée de 2 fonctions

تمهيـد :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{|x^2-1|}} \qquad \text{و} \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|}}$$

حدد $gof(x)$

أحسب $\lim_{x\to 1} gof(x)$

الجـــواب :

$$D_g=\mathbb{R} \;\; ; \;\; D_f=\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$\begin{aligned}
gof(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+|f(x)|}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{|x-1|}{\sqrt{|x^2-1|}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{|x-1|^2}{|x^2-1|}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\left|\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}\right|}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}}}
\end{aligned}$$

أي : $\lim_{x\to 1} gof(x)=1$

حساب $\lim_{x\to 1} gof(x)$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{|x^2-1|}} \\
&= \lim_{x\to 1} \pm\sqrt{\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 1} \pm \sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} = 0$$

وبما أن : $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 1$

فإن : $\lim_{x \to 0} gof(x) = 1$

خاصيــات :

1- مركبة دالتين متصلتين هي دالة متصلة.

2- إذا كانت f متصلة في x_0 و g دالة متصلة في $y_0 = f(x_0)$.

فإن : gof متصلة في x_0.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & y_0 = f(x_0) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & J \arrow[r, "g"] & K \end{tikzcd}$$

3-

إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J حيث $f(I) \subset J$

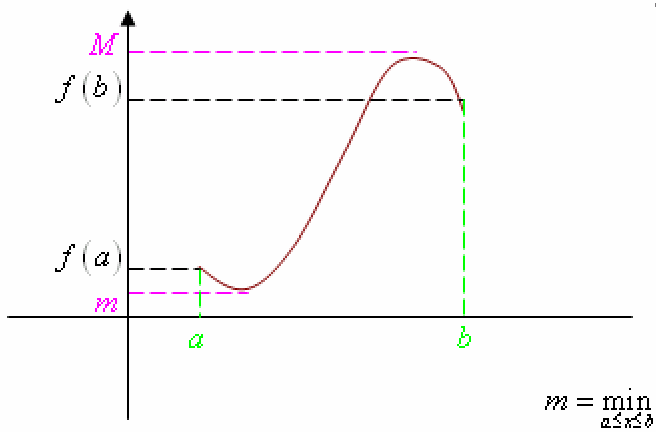
فإن : gof متصلة على I .

إذا كانت f تقبل نهاية في x_0 ، $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ و g دالة متصلة في y_0.

فإن : $\lim_{x \to x_0} gof(x) = g(y_0)$

4- صورة مجال بدالة متصلة :

متصلة على مجال $[a,b]$.



لتكن $m = \min_{a \le x \le b} f(x)$

$M = \max_{a \le x \le b} f(x)$

نلاحظ أن :

$$\in (\forall y \in [m;M])\ (\exists x \ \ [a,b])\ /\ f(x) \ \ y$$

و هذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال $J = [m,M]$ سابق من $I = [a,b]$ ، في هذه الحالة نقول أن f شمولية من I نحو J .

R

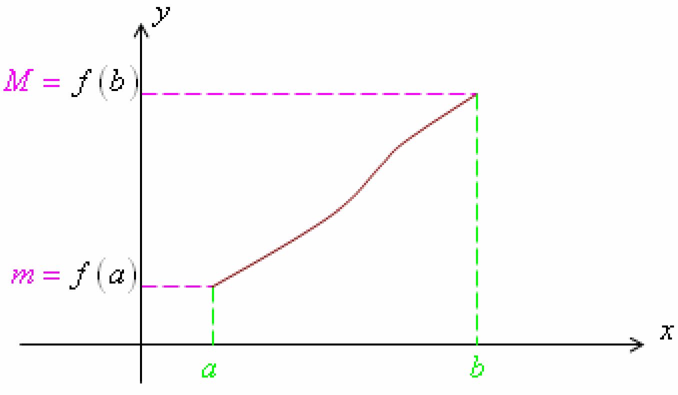
ونكتب : $f([a,b])=[m,M]$

خاصيـــة :

صورة مجال من $\mathbb{R}$ بدالة متصلة هي مجال من $\mathbb{R}$.

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$.

الحالة① : f تزايدية قطعا.



$$f([a,b]) = [m,M] = [f(a),f(b)]$$

نلاحظ أن :

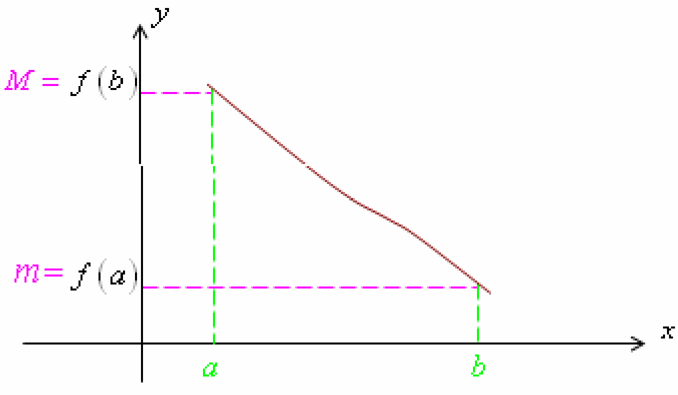
$$(\forall y\in[m,M])\ (\exists' x\in[a,b])\ /\ f(x)=y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال : $J=[m,M]$ سابق وحيـــد من $I=[a,b]$.

وفي هذه الحالة نقول أن : f تقابـــل من $I=[a,b]$ نحو المجال $J=[m,M]$.

الحالة② : f تناقصية قطعا.



$$f([a,b]) = [f(b),f(a)]$$

خاصيـــة :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على المجال $[a,b]$ فإنها تقابـــل من $[a,b]$ نحو $f([a,b])=[m,M]$.

تحديد صورة مجال :

- **الحالة① : f تزايدية قطعا.**

I	$J=f(I)$
$[a,b]$	$[f(a)\ ;\ f(b)]$

$[a,b[$	$\left[f(a) \; ; \; \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x)\right[$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \; ; \; f(b)\right]$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a) \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

• الحالة② : f تناقصية قطعا.

I	$f(I)$
$[a,b]$	$[f(b) \; ; \; f(a)]$
$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{x<b} f(x) \; ; \; f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left[f(b) \; ; \; \lim\limits_{x>a} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \; ; \; f(a)\right]$
$]-\infty,b]$	$\left[f(b) \; ; \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \; ; \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

تطبيــق :

حدد صورتي المجالين I و J في الحالات التالية :

• $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $\quad J=[0,2] \quad , \quad I=[0,+\infty[$

لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

وبما أن :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

إذن : f تزايدية قطعا.

ومنه :

$$f([0,2]) = [f(0) \; ; \; f(2)] = \left[-1 \; ; \; \frac{1}{3}\right]$$

$$f([0,+\infty[) = \left[f(0) \; ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1,1[$$

• $f(x)=\cos x \quad ; \quad J=\mathbb{R} \quad ; \quad I=[0,\pi]$

لدينا : f متصلة وتناقصية قطعا على I.

إذن :

$$f([0,\pi]) = [f(\pi) \; ; \; f(0)] = [-1 \; ; \; 1]$$

ولدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

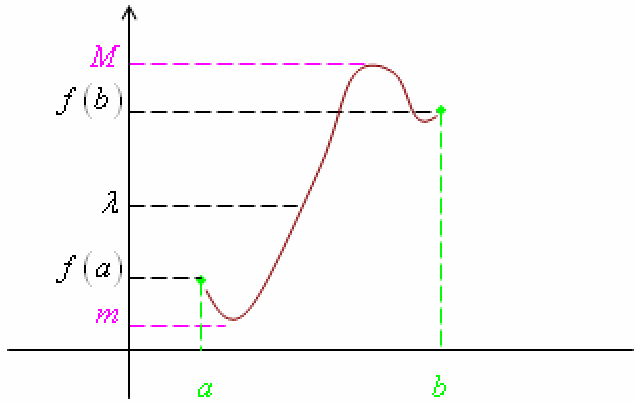
$$f(\mathbb{R}) = [-1\,;\,1]$$

5- مبرهنة القيم الوسطيــة (T.V.I)

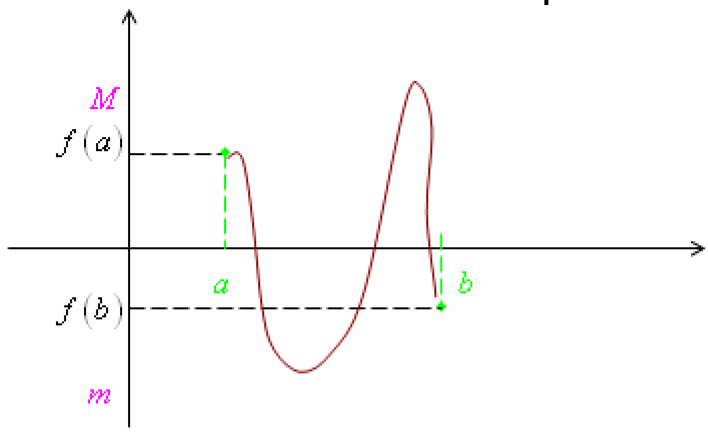
لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ و $f([a,b]) = [m,M]$

لدينا : لكل λ من $[m,M]$ سابق x من $[a,b]$.

وهذا يعني أنه لكل λ من $[m,M]$ المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حل على الأقل في $[a,b]$.



نفترض أن : $0 \prec M$ و $m \prec 0$.



بما أن : $0 \in [m,M]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $[a,b]$.

مبرهنة القيم الوسطية :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b) \prec 0$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

تطبيــق 1 :

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث $f(a) \succ a$ و $f(b) \prec b$.

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a,b]$.

R

الجـــواب :

نضع : $g(x) = f(x) - x$

بما أن : الدالة f متصلة على $[a,b]$.

فإن : الدالة g متصلة على $[a,b]$.

وبما أن : $g(a) = f(a) - a \succ 0$

و : $g(b) = f(b) - b \prec 0$

فإن : $g(a) \cdot g(b) \prec 0$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل من $[a,b]$.

وبالتالي المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a,b]$.

تطبيـــق 2 :

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$ في الحالات التالية :

1- $f(x) = x^3 - 1$

2- $f(x) = x^7 + x^2 - 1$

3- $f(x) = 1 + \sin x - x$

الجـــواب :

1- لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $f(0) = -1$ و $f(2) = 7$

إذن : $f(0) \cdot f(2) \prec 0$

ومنه : $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

2- لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

3- لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

و : $f(0) = 1 \succ 0$

و : $f(\pi) = 1 - \pi \prec 0$

إذن : $f(0) \cdot f(\pi) \prec 0$

ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

6- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $I = [a,b]$ و $f(I) = J = [m,M]$

إذن : f تقابل من I نحو J.
ومنه فإن : الدالة f تقبل تقابل عكسي نرمز له بـ : f^{-1}.
الدالة f^{-1} تسمى الدالة العكسية للدالة f.

$$\begin{tikzcd} x \in I \arrow[r, bend left, "f"] & y \in J \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

أمثلـــة :

-1 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.
بين أن : g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.
ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

الجـــواب :

-1 لدينا : g قصور f على $I=[0,+\infty[$.
و f دالة جذرية حيز تعريفها $\mathbb{R}$.
إذن : f متصلة على $\mathbb{R}$.
ومنه : g متصلة على I.

ولدينا : $g(x)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}$ $\quad \forall x \in I$

الدالة $x \mapsto x^2+1$ تزايدية على I (قطعا).

إذن : الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ تناقصية قطعا على I.

ومنه : $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+1}$ تزايدية قطعا على I.

ومنه : g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

وبالتالي : g تقابل $\mathbb{R}^+$ نحو J.

- **تحديـد J :**

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و $g(0)=0$.

ومنه : $J=[0,1[$

- **لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $J=[0,1[$.**

لدينا : $\forall y \in [0,+\infty[$ و $\forall x \in [0,1[$

$$g^{-1}(x) = y \iff x = g(y)$$

$$\iff x = \frac{y^2}{y^2+1}$$

$$\iff x = 1 - \frac{1}{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2+1} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2+1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

وبما أن : $y \succ 0$

فإن : $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

ومنه : $\forall x \in J \;;\; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

-2 $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = [0,+\infty[$

بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} وحدد حيز تعريف f^{-1} .

ثم : $f^{-1}(x)$ لكل x من $D_{f^{-1}}$.

الجــواب :

لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على D_f.

إذن : f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ومنه حيز تعريف f^{-1} هو $\mathbb{R}^+$.

- لنحدد $f^{-1}(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \;;\; \forall y \in \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = x$$

ومنه : $\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad f^{-1}(y) = y^2$

وبالتالي : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f^{-1}(x) = x^2$

خاصيــة :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I، و $f(I) = J$

(1 $\forall x \in I \;;\; \forall y \in J \;;\; f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

(2 $\forall x \in I \;;\; f^{-1} o f(x) = x$

(3 $\forall y \in J \;;\; f o f^{-1}(y) = y$

دراسة الدالة f^{-1} :

- **منحنى الدالة f (الرتابة)**

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I. و f^{-1} الدالة العكسية للدالة f .

و : $f(I)=J$

ليكن x و y عنصرين مختلفين من J .

بحيث $f^{-1}(y)=b$ و $f^{-1}(x)=a$

لدينا :

$$\mathrm{T}_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(y)}{x - y} = \frac{a - b}{f(a) - f(b)} = \frac{1}{\frac{f(a) - f(b)}{a - b}} = \frac{1}{\mathrm{T}_f}$$

إذن : $\mathrm{T}_{f^{-1}} \times \mathrm{T}_f \succ 0$

إذن f و f^{-1} لهما نفس المنحى.(الرتابة)

استنتاج وخاصية :

الدالتين f و f^{-1} لهما نفس المنحى . (الرتابة)

- **منحنى الدالة f^{-1} :**

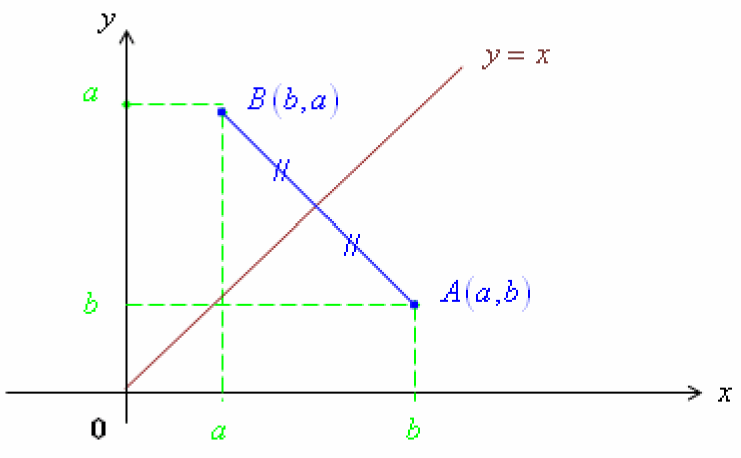
$$\ell_f = \{ M(x,y) \in P \ / \ x \in I \ \text{و} \ f(x) = y \}$$

$$\ell_{f^{-1}} = \{ M(y,x) \in P \ / \ y \in J \ \text{و} \ f^{-1}(y) = x \}$$

$$= \{ M(y,x) \in P \ / \ x \in I \ \text{و} \ f(x) = y \}$$

ملاحظة :

النقطتين $B(b,a)$ و $A(a,b)$ متماثلتين بالنسبة للمنصف الأول $(y=x)$.



R

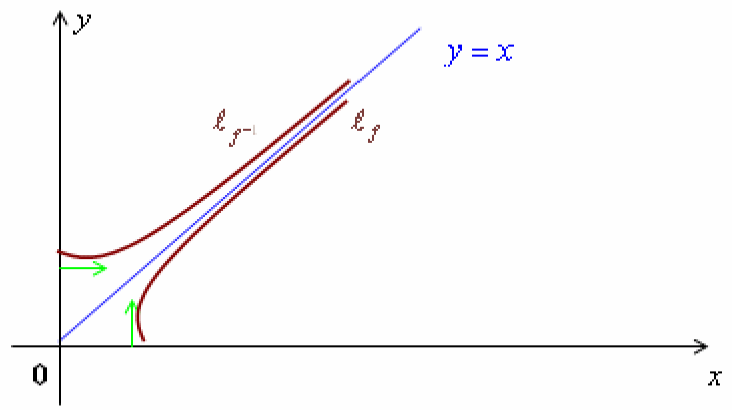
خلاصــة وخاصيــة :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

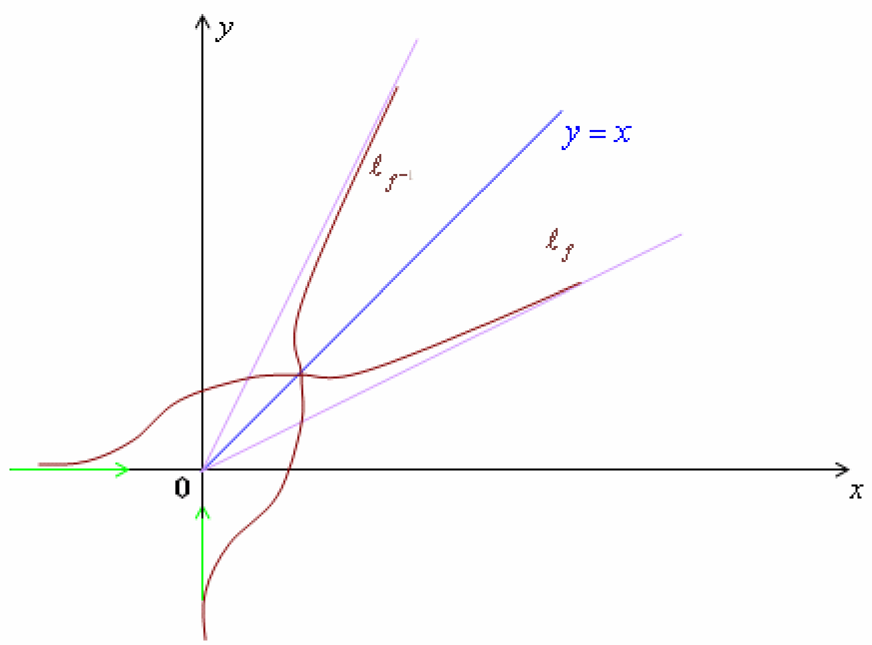
ℓ_f و $\ell_{f^{-1}}$ متماثلين بالنسبة للمنصف الأول.

أمثلــة :

- مثـــال ① :



- مثـــال ② :



أمثلة لبعض الدوال العكسية :

1. دالة الجذر من الرتبـة n $\qquad n \in \mathbb{N}^*$

الدالة $f:\left(x \mapsto x^{n}\right)$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{+}$ و $f\left(\mathbb{R}^{+}\right)=\mathbb{R}^{+}$

إذن : f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}^{+}$.

ونرمز لها بـ : $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

نتائج وخاصيات :

1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^{*}$

$$\sqrt[n]{x^{n}} = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n}$$

$$f(x) = x^{n}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$x = f^{-1}\left(f(x)\right) = \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{x^{n}}$$

مثـال

$$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = 2$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^{3}} = 2$$
$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^{4}} = 2$$

2) الدالة : $f^{-1}: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{+}$.

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+}$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} \succ \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \succ y$$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^{*}$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+} \; ; \; \forall y \in \mathbb{R}_{+}^{*} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^{*}$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \; ; \; \forall n, m \in \mathbb{N}^{*}$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$$

$$\sqrt[n]{x^{m}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m}$$

R

ملاحظـة :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = a^1 = a^{\frac{n}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

إذن : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

تعريـف :

ليكن a عددا من $\mathbb{R}^+$ و r عددا جذريا.

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ذات الأس r.

لتكن $r = \frac{p}{q} \; ; \; x \in \mathbb{R}^+$

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p}$$

اتصال مركبة دالة متصلة ودالة الجذر من الرتبة n :

نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ : $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

- إذا كانت f دالة موجبة على I ومتصلة في x_0 ، $x_0 \in I$
  فإن g متصلة في x_0.
- إذا كانت f متصلة وموجبة على I فإن g متصلة على I.

مثــال :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

الدالة : $x \mapsto x^2+1$ متصلة وموجبة على $\mathbb{R}$.

إذن : الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

نهاية مركبة دالة ودالة الجذر من الرتبة n :

لتكن f دالة متصلة وموجبة على I. و $x_0 \in I$

إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

على الخصوص :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

تطبيقــات :

أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

<u>طريقة 1</u> :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} = 1$$

<u>طريقة 2</u> :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-3\right)^{\frac{3}{6}}}{\left(x^3+1\right)^{\frac{2}{6}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{\left(x^2-3\right)^3}{\left(x^3+1\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{x^6}{x^6}} = 1$$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^6}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$

تمارين

التمرين الأول :

حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & ; \quad x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & ; \quad x\le 2 \end{cases}$$

متصلة في النقطة $x_0=2$.

التمرين الثاني :

حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث تكون الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2-2bx+1}{2x^2+ax-a-2} & ; \quad x>1 \\ f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+3}{x^2+1} & ; \quad x<1 \\ f(1)=\dfrac{2+c}{3} \end{cases}$$

متصلة في النقطة $x_0=1$.

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=2x^2-3x & ; \quad x<-1 \\ f(x)=x^2+4 & ; \quad -1\le x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+1}+2 & ; \quad x\ge 1 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f في 1- و 0 و 1 .
2. هل f متصلة على $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

1. حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
2. حدد نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$.
3. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]1,+\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J ، ينبغي تحديده ، نحو المجال I .

ب- حدد الدالة العكسية g^{-1} .

التمرين الخامس :

1. بين أن المعادلة $-x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $\alpha\in]1,2[$.
2. بين أن المعادلة $x^3-3x+1=0$ تقبل بالضبط ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$ ، ثم أعط تأطيرا لكل منها إلى 5×10^{-1} .
3. بين أن للمعادلة $x^3-6x^2+6=0$ حلان بالضبط في المجال $[-2,4]$.
4. أحسب النهايات التالية :

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \quad \text{و} \quad B=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$$

و $$C=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+x+1}-x-3$$

التمرين السادس:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\forall x\in[0,+\infty[\quad : \quad f(x)=\sqrt{x^2+1}+2x$$

1. بين أن f رتيبة قطعا على المجال $[0,+\infty[$.
2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} ، معرفة من مجال J ، ينبغي تحديده ، نحو المجال $[0,+\infty[$.
3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .
4. بين أن المعادلة $f(x)=x^3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1,2]$.

التمرين السابع :

1. بسط الأعداد التالية :

$$A=\frac{\sqrt[4]{9}.\sqrt{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[5]{81}.\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}} \quad \text{و} \quad B=\frac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}.\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} \quad \text{و}$$

$$C=\frac{27^{\frac{2}{3}}.49^{-\frac{1}{2}}.16^{\frac{3}{4}}}{\left(9\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}}}$$

2. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=1+\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

أ- حدد $\mathcal{D}_g$ حيز تعريف الدالة g .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

جـ- أدرس اتصال الدالة g في النقطة 0.

التمرين الثامن :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

1. حدد $\mathcal{D}_f$ وأحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} ، معرفة من مجال J ، ينبغي تحديده ، نحو $\mathcal{D}_f$.
3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.
4. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,1]$.

الاشتقـــــاق

I- الاشتقاق في نقطـة :

أنشطـة :

1- حدد العدد المشتق للدالة f في x_0 في الحالات التالية :

a- $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $x_0=1$

لدينا :

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2\,(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x)}{x^2\,(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(1+x)}{x^2}$$

$$=-2$$

إذن العدد المشتق للدالة f في $x_0=1$ هو -2 .

ونكتب $\qquad f'(1)=-2$

b- $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $x_0=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 2 و $\qquad f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

2- أدرس قابلية اشتقاق f في x_0 في الحالات التالية :

a- $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ $\qquad$ $x_0=1$

لدينا :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & x\prec1 \text{ أو } x\succ2\\ -x^2+3x-2 & 1\leq x\leq2\end{cases}$$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to1\\1\prec x}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}-(x-2)$$

R

$$= 1$$

ونكتب : $f'_d(1) = 1$

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

$$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} x - 2 = -1$$

ومنه : $f'_g(1) = -1$

بما أن : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

فإن : f غير قابلة للاشتقاق في **1** .

-b $f(x) = \begin{cases} \tan x & ; \quad 0 \prec x \prec \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & ; \quad \dfrac{-\pi}{2} \prec x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$$

إذن : $f'_d(0) = f'_g(0) = 1$

إذن : f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

و $f'(0) = 1$.

-c $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \\ x + 1 & ; \quad x \prec 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} x + 1 = 2$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1$$

إذن : f غير متصلة في **1** .

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق في **1** .

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (ℓ_f) الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم في النقطة ذات الأفصول x_0 .

-a $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ $\qquad x_0 = 0$

لدينا : $f(0) = 1$

و : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+1-1}{x\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)}$$

$$= 0 = f'(0)$$

وبما أن معادلة المماس لـ (ℓ_f) في **0** هـي :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

فإن معادلة المماس في **0** هـي :

$$y = 1$$

-b $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad x_0 = 1$

لدينا : $f(1) = 1$

لدينا :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}$$

إذن : $f'(1) = \frac{1}{3}$

ومنه معادلة المماس هـي :

$$y = \frac{1}{3}(x-1) + 1$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

خلاصـة :

1- الاشتقاق في نقطة :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0،
نقول أن : f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$$

ونكتب : $f'(x_0) = l$

العدد $f'(x_0)$ يسمى **العدد المشتق** للدالة f في x_0.

2- الاشتقاق على اليمين :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح $[x_0 , x_0+\alpha[$ حيث $\alpha \succ 0$.

نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

ونكتب : $f'_d(x_0)=l$

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين للدالة f في x_0.

3- الاشتقاق على اليسار :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح $]x_0-\alpha\ ,\ x_0]$.

نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x_0\succ x}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$$

ونكتب : $f'_g(x_0)=l$

العدد $f'_g(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في x_0.

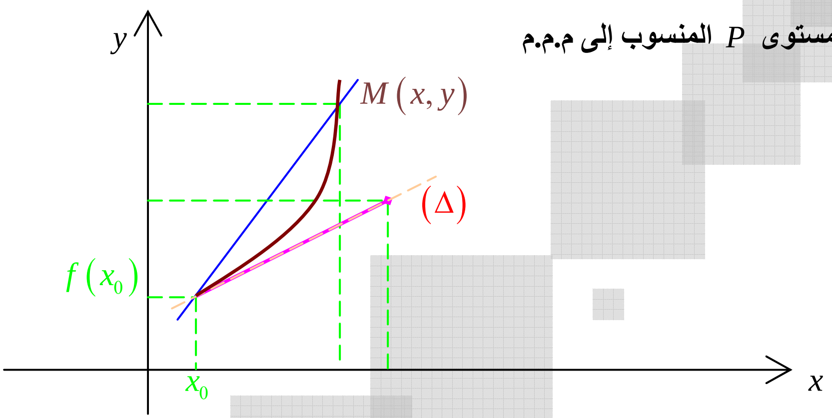
خاصيـة :

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين وقابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار و $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

4- التأويل الهندسي :

ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى P المنسوب إلى م.م.م

و $M_0(x_0\ ,\ f(x_0))$.



لدينا : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ هو ميل المستقيم (MM_0).

عندما تقترب M مــن M_0.

فإن المستقيم (M_0M) يقترب من (Δ).

إذن : ميل المستقيم (Δ) هـو

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

إذن : معادلة (Δ) تكون على شكل :

$$y = f'(x_0)x + p$$

وبما أن : $M_0(x_0\ ,\ f(x_0)) \in (\Delta)$

فإن : $f(x_0)=f'(x_0)\ x_0 + p$

إذن : $p = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

ومنه : $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$

أو :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$$

وهذه هي معادلة المماس لـ (ℓ_f) في $M_0(x_0 , f(x_0))$.

نصف مماس لمنحنى دالــة :

-1 إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين .

فإن معادلة نصف المماس لـ (ℓ_f) في x_0 على اليمين هي :

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \ge x_0 \end{cases}$$

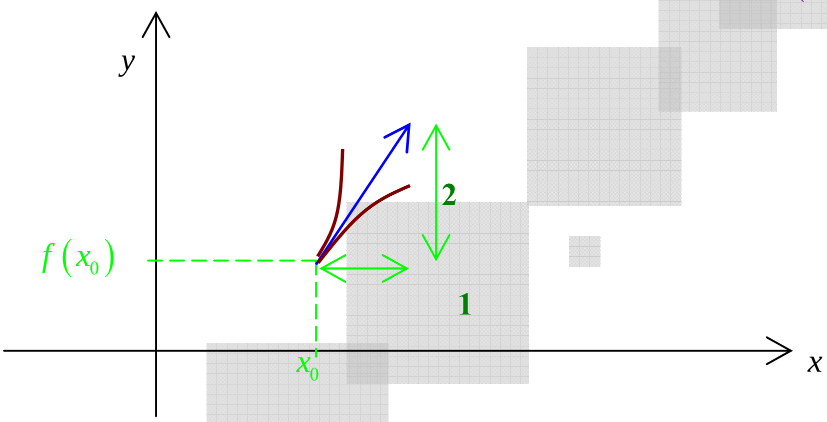
-2 إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار.

فإن معادلة نصف المماس لـ (ℓ_f) في x_0 على اليسار هي :

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \le x_0 \end{cases}$$

أمثلــة :

-1 $f(x_0)=1$ و $f'_d(x_0)=2$



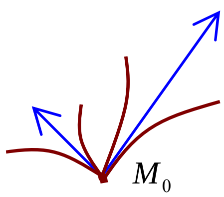
-2 $f'_d(x_0)=-2$

$f'_g(x_0)=\frac{3}{2}$

$f'_g(x_0)=-2$

$f'_g(x_0)=-1 \; ; \; f'_d(x_0)=1$

$f'_d(x_0)=2$ $\qquad$ $f'_g(x_0)=-1$

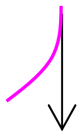
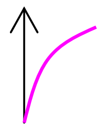
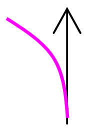
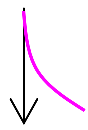
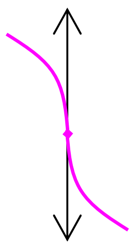
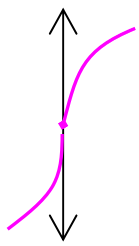


نصف مماس مواز لمحور الأراتيب

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

أو : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في x_0.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 

II- الدالــة المشتقــة :

حدد الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية :

1- $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$

2- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

3- $f(x) = |x^2-1|$

4- $f(x) = \tan^5(x)$

تصحيح :

1- لدينا : $f'(x) = \left[(x^2+1)\sqrt{x}\right]'$

R

$$= \left(x^2+1\right)' \sqrt{x} + \left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$= 2x\sqrt{x} + \left(x^2+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x\sqrt{x} + \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x}}{2x}$$

-2 لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

إذن :

$$f'(x) = \frac{x'\left(x^2+1\right) - x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

-3

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; \quad x \prec -1 \text{ أو } x \succ 1 \\ 1-x^2 & ; \quad -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

إذن :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x \prec -1 \text{ أو } x \succ 1 \\ -2x & ; \quad -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

-4 $f(x) = \tan^5(x)$

$$f'(x) = 5\tan^4(x)\left(\tan(x)\right)'$$

$$= 5\tan^4 x\left(1 + \tan^2(x)\right)$$

$$= \frac{5\tan^4 x}{\cos^2(x)}$$

خلاصة :

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k \cdot u' \ / \ k \in \mathbb{R}$$

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u' \ / \ n \in \mathbb{N}$$

R

جدول مشتقات الدوال الاعتيادية :

ملاحظات	الدالة f'	الدالة f
$a\in\mathbb{R}$	0	a
	a	$ax+b$
	1	x
$n\in\mathbb{N}^*$	$n\cdot x^{n-1}$	x^n
$x\neq 0$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$x\succ 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$x\neq\frac{-d}{c}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)'}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
	$-\sin x$	$\cos(x)$
	$\cos x$	$\sin(x)$
	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
	$af'(ax+b)$	$f(ax+b)$

الاشتقاق على مجــال :

- نقول أن f قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال I.
- إذا كان حيز تعريف الدالة يحتوي على مجال من نوع $[x_0\ ,\ x_0+\alpha[$

وكان : $D_f\ =\ ]x_0-\alpha\ ,\ x_0+\alpha[\ =\ [x_0\ ,\ x_0+\alpha[$

و f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين فإننا نقول أن : f قابلة للاشتقاق في x_0.

ونكتب : $f'(x_0)=f'_d(x_0)$

المشتقات المتتاليــة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال I، فإن دالتها المشتقة f' تكون معرفة على I.
وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I ، فإن دالتها المشتقة تسمى المشتقة الثانية للدالة f' وتكتب f'' أو $f^{(2)}$.
وبصفة عامة : $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$

ملاحظــة :

إذا وجدت $f^{(n)}$ وكانت معرفة على I ، نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على I.

III- التقريب المحلي لدالة بدالــة تآلفيــة :

R

مثــال : $f(x)=(1+2x)^3$

لدينا : $f'(x) = 3(1+2x)^2 \cdot 2$

$= 6(1+2x)^2$

إذن : $f'(0) = 6$

ولدينا : $f(0) = 1$

ولدينا : $f(x) = 1 + 3(2x) + 3(2x)^2 + (2x)^3$

$= 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$

$= 1 + 6x + x(12x + 8x^2)$

$= f(0) + f'(0)(x-0) + (x-0)(12x + 8x^2)$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to 0} 12x + 8x^2 = 0$

إذن : عندما تكون x قريبة من **0** .

فإن : قيمة $12x + 8x^2$ تكون مهملة .

إذن : بجوار صفر $f(x) \simeq 1 + 6x$.

نضع : $u(x) = 1 + 6x$.

الدالة u تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في $x_0 = 0$.

خاصية وتعريــف :

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0 (I).

تكون f قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا وجدت دالة f معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 بحيث $\forall x \in I$.

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)(x-x_0) \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

مع : $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=0$

الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$u(x)=ax+b$

$u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0.

ملاحظة :

المنحنى الممثل للدالة u هو المماس لـ (ℓ_f) في النقطة ذات الأفصول x_0.

IV- مشتقة الدالة العكسيــة :

1- مشتقة دالة مركبة :

تمهيـد :

لدينا : $f'(x) = \dfrac{d\,f(x)}{dx}$

إذن : $fog'(x) = \dfrac{d\,\big(fog(x)\big)}{dx}$

نضع : $g(x)=y$

R

إذن :
$$fog'(x) = \frac{d\,f(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{d\,(f(y))}{dy} \cdot \frac{d(g(x))}{dx}$$
$$= f'(y) \cdot g'(x)$$
$$= f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبالتالي :
$$\boxed{(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)}$$
$$\boxed{(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)}$$

خاصيـة :

لتكن f دالة معرفة على مجال I ، $x_0 \in I$ و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0) = y_0$.

فإن : gof قابلة للاشتقاق في x_0 .

ولدينا : $(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على J .

فإن : gof قابلة للاشتقاق على I.

ولدينا : $\forall x \in I \; ; \; (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

تطبيقـــات :

أحسب مشتقة الدوال التالية :

-1 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = \cos'\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)'$
$$= -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

-2 $f(x) = \cos(ax+b) \;\Rightarrow\; f'(x) = -\cos'(ax+b) \cdot (ax+b)'$
$$= -a\,\sin(ax+b)$$

-3 $g(x) = f(ax+b)$

$$g'(x) = f'(ax+b) \cdot (ax+b)'$$
$$= a \cdot f'(ax+b)$$

-4 $f(x) = \sqrt{v(x)}$

نضع : $u(x) = \sqrt{x}$

إذن : $f(x) = uov(x)$

وبما أن : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

و : $$\begin{aligned} f'(x) &= u'(v(x)) \times v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \times v'(x) \\ &= \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} \end{aligned}$$

مشتقة الدالة العكسيــة :

تمهيــد :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على J. و $f(I)=J$.

لدينا : f تقابل من I نحو J.

ولتكن : f^{-1} التقابل العكسي للدالة f.

لدينا : $\forall x \in J \; ; \; f \, o \, f^{-1}(x) = x$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و f^{-1} قابلة للاشتقاق على J.

فإن : $\forall x \in J \; ; \; \left(f \, o \, f^{-1}\right)'(x) = 1$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)' \times \left(f^{(-1)}\right)'(x) = 1$$

إذن : $\forall x \in J \; ; \; \left(f^{(-1)}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

ملاحظــة :

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \; ; \; f(x_0) = y_0$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

خاصيــة :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ ، $x_0 \in I$.
  فإن : الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$.
  ولدينا : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم في I ،
  فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على : $f'(I)=J$.
  ولكل x من I لدينا :
  $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

تطبيقــات :

1 : مشتقة دالة الجذر من الدرجة n.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $f(x) = x^n$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

و : $f'(x) = n\, x^{n-1}$

ولدينا :
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$= \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

إذن :
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\,\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}$$

ملاحظــة :

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{x}\right)' &= \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}\\ &= \frac{1}{n\,x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}}$$

خلاصــة :

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}}$$

مثــال :

-1 $f(x) = \sqrt{x}$
$$= x^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2\,x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

-2 $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\,x^{\frac{-2}{3}}$$
$$= \frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

استنتـــاج :

-a $\forall r \in \mathbb{Q}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left(x^r\right)' = r\,x^{r-1}$$

R

b- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I .

ولكل x من I ، $f(x) \succ 0$ و $r \in \mathbb{Q}$.

$$\left(f^{r}\right)' = r\, f^{r-1}(x) \times f'(x)$$

أمثلــــة :

1- $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}$

$$= \left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (2x)$$

$$= \frac{4x}{3\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}$$

2- $f(x) = \left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

3- $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2+x+1}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

4- $f(x) = x^2\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}}$

$$f'(x) = 2x\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + x^2\,\frac{\dfrac{-3}{(2x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}}}$$

تذكير

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

R

دراســـة الـــــدوال

I- أنـشطــة :

1- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[2,+\infty[$

ب : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

(ℓ_f) هـو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $f(2)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]2,+\infty[$ ، واعط جدول تغيراتها.

3- بين أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

وأول النتيجة هندسيا.

الجـــواب :

-1

$$f(2) = 2 - 1 + \sqrt{2^2 - 3\times 2 + 2}$$
$$= 2 - 1 + \sqrt{4 - 6 + 2}$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

و : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2}$

$$= +\infty$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

-2 أ-

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 1}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2}}$$

R

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1+\sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1+\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$= 1+(+\infty)$$

$$= +\infty$$

• استنتــاج :

في 2 على اليمين ℓ_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى.

ب- لدينا : $f(x) = x-1+\sqrt{x^2-3x+2}$

إذن : $f'(x) = 1+\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ $\quad \forall x\in]2,+\infty[$

وبما أن : $x \succ 2$

$2x-3 \succ 0$

ومنه : $f'(x) \succ 0$ $\quad \forall x\in]2,+\infty[$

جـدول تغيـرات f :

x	**2** $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert +\infty$ $\qquad$ +
$f(x)$	**1** $\nearrow$ $+\infty$

3- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{2}\right) = 0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\sqrt{x^2-3x+2}-2x+\frac{5}{2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-x+\frac{3}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-3x+2)-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-\frac{3}{2}}$$

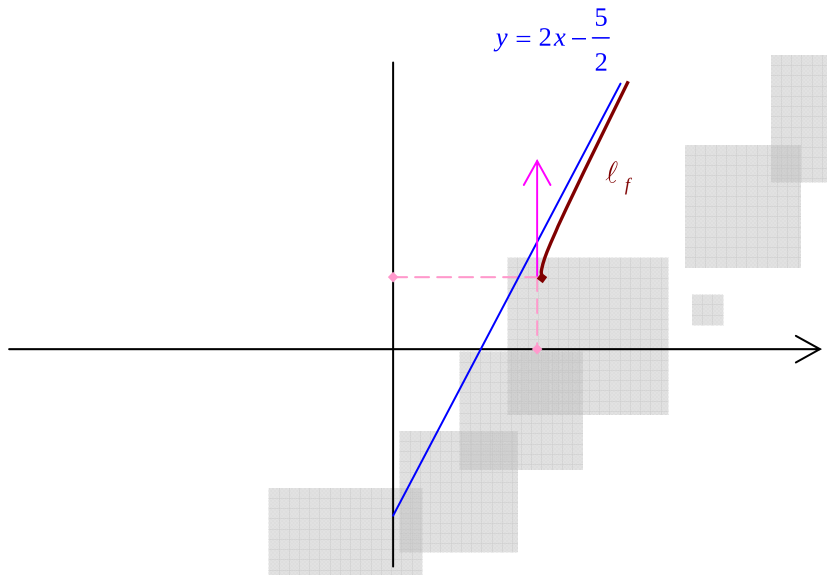
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-3x+2}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$$

إذن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{2}\right) = 0$$

وبالتالي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - \frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ ℓ_f بجوار $+\infty$.



تمريـن 2 :

لتكن f الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$$

1) حدد D_f.

2) أحسب النهايات عند محدات D_f.

3) بين أن لكل x من $]0,4[$:

$$f'(x) = \frac{x-2}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$$

أعط جدول تغيرات f .

4) أنشئ ℓ_f.

5) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f.

الجـواب :

1) تحديد مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 4x - x^2 \succ 0\}$$

R

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن : $D_f =]0\,,\,4[$

(2 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

$= +\infty$

(3 حساب $f'(x)$ لكل x من $]0,4[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = \left(4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(4x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(4-2x\right)$$

$$= \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)^{\frac{2}{2}} \times \left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

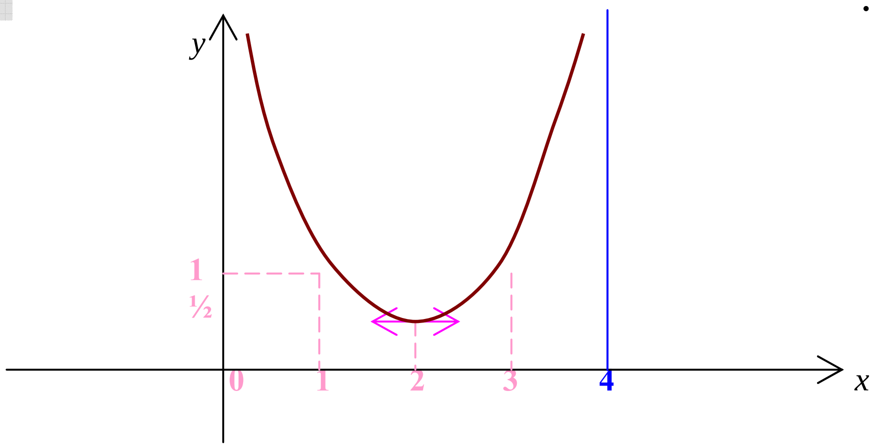
ومنه :

$$f'(x) = \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)\sqrt{4x-x^2}}$$

- جدول التغيرات :

x	0		2		4
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	½	↗	$+\infty$ ‖

(4 إنشاء ℓ_f .



5) لدينا : $\forall x \in D_f \; ; \quad 4-x \in D_f$

ولدينا : $\forall x \in D_f \; ; \quad f(4-x) = \dfrac{1}{\sqrt{4(4-x) - (4-x)^2}}$

$$\forall x \in D_f \; ; \quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{16 - 4x - 16 + 8x - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$= f(x)$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f.

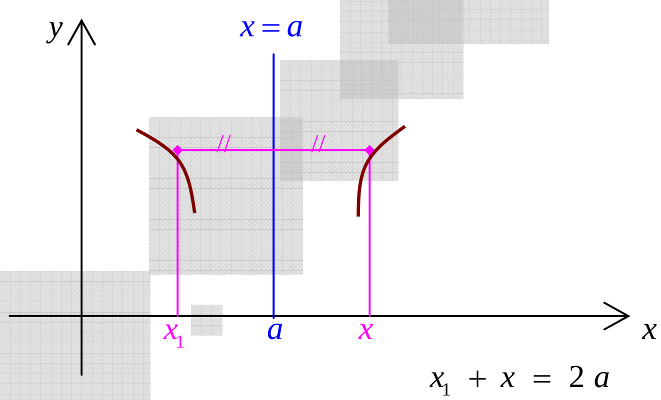
تذكيـــر :

1- محـور تماثـل ℓ_f :

نقول أن المستقيم $D(x=a)$ محور تماثل (ℓ_f) إذا وفقط إذا كان :

$\forall x \in D_f \; ; \quad 2a-x \in D_f$

و $f(2a-x) = f(x)$



لدينا : $x_1 + x = 2a$

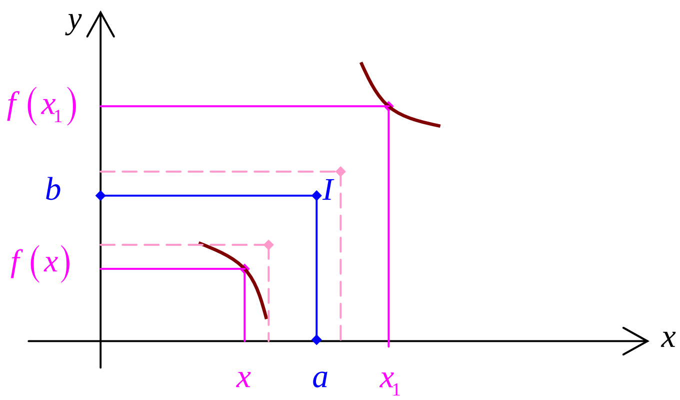
إذن : $x_1 = 2a - x$

$f(x_1) = f(x)$

ومنه : $f(2a-x) = f(x)$

2- مركز تماثـل ℓ_f

لتكن $I(a,b)$.



$x_1 + x = 2a$

$$f(x_1) + f(x) = 2b$$
$$x_1 = 2a - x$$
$$f(x_1) = 2b - f(x)$$
ومنه : $f(2a - x) = 2b - f(x)$

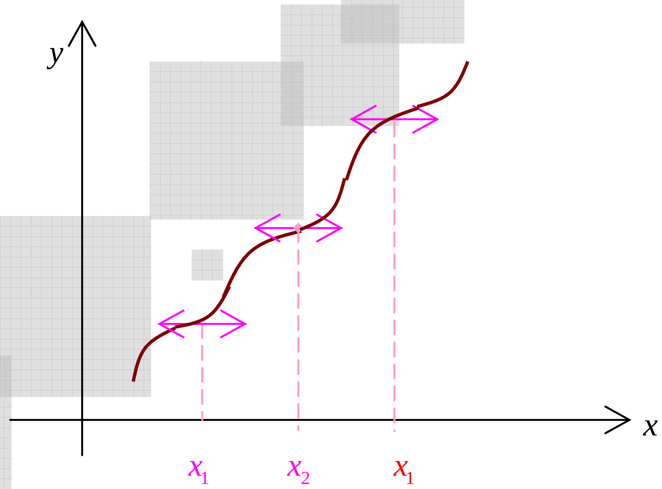
خاصيـة :

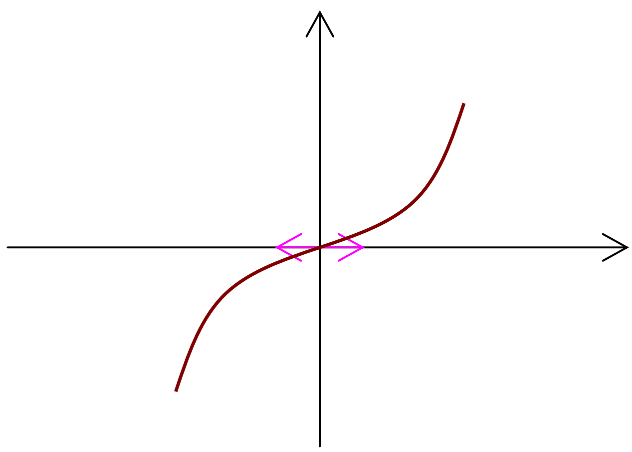
تكون النقطة $I(a,b)$ مركز تماثل لـ ℓ_f إذا وفقط إذا كان :
- $\forall x \in D_f \ ; \quad 2a - x \in D_f$
- $\forall x \in D_f \ ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

ملـخـص :

1- قابلية الاشتقـاق ورتـابـة دالـة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I.
- إذا كان لكل x من I : $f'(x) = 0$ فإن : f ثابتـة على I.
- إذا كان لكل x من I، $f'(x) \succ 0$ (يمكن لـ f' أن تنعدم في عدد منته من النقط).
فإن : f تزايدية قطعا على I.
- إذا كان لكل x من I، $f'(x) \prec 0$ (يمكن لـ f' أن تنعدم في عدد منته من النقط).
فإن : f تناقصية قطعا على I.





2- مطـارف دالــة :

a- القيــم القصــوى

لتكن $x_0 \in I$ و $I \subset D_f$

نقول أن $f\left(x_0\right)$ قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I \;;\quad f\left(x\right) \le f\left(x_0\right)$$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على : $I=\left[a,b\right]$ و $x_0 \in I$

العدد $f\left(x_0\right)$ هو قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in \left[a,x_0\right[\;;\quad f'\left(x_0\right) \succ 0$$

و $$\forall x \in \left]x_0,b\right] \;;\quad f'\left(x_0\right) \prec 0$$

و $$f'\left(x_0\right) = a$$

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(x_0\right)$		

b- القيــم الدنيــا

$x_0 \in I$ ، $I \subset D_f$

نقول أن $f\left(x_0\right)$ قيمة دنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I \;;\quad f\left(x\right) \ge f\left(x_0\right)$$

خاصيــة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I مركزه x_0 ،
يكون $f\left(x\right)$ مطـرافا إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' تنعدم في x_0 وتتغير إشارتها.

3- تقعـر منحنى دالــة ونقط الانعطــاف :

تعريــف :

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I و $\left(\ell_f\right)$ المنحنى الممثل لها.
نقول أن المنحنى $\left(\ell_f\right)$ محدب (أو تقعر المنحنى موجه نحو الأراتيب الموجبة) إذا وفقط إذا كان ℓ_f فوق جميع مماساته.
ونقول أن المنحنى $\left(\ell_f\right)$ مقعر إذا وفقط إذا كان ℓ_f تحت جميع مماساته.

خاصيــة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I .

R

و (ℓ_f) المنحنى الممثل لها.

- إذا كانت f'' موجبة على I فإن ℓ_f محدب.
- إذا كانت f'' سالبة على I فإن ℓ_f مقعـر.
- إذا انعدمت f'' في x_0 $(x_0 \in I)$ وتغير إشارتها فإن النقطة $I\left(x_0\ ,\ f(x_0)\right)$ نقطة انعطـاف.

4- الفـروع اللانهائيـة Branches infinies

ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f.

نقول أن (ℓ_f) يقبل فرعا لانهائيا إذا وفقط إذا آلت x أو $f(x)$ إلى ∞.

$$\ell_f = \left\{M\left(x\ ,\ f(x)\right) \ / \ x \in D_f\right\}$$

a- المستقيمـات المقاربــة لمنحنى :

1- إذا كانت $\left|\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right| = +\infty$ أو $\left|\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right| = +\infty$

فإن المستقيم $(x = x_0)$ مقارب عمودي لــ (ℓ_f).

2- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

فإن المستقيم $(y = b)$ مقارب أفقــي لــ (ℓ_f) بجوار ∞.

3- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (a x + b) = 0 \quad (a \neq 0)$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لــ (ℓ_f) بجوار ∞.

4- إذا كانت $f(x) = a x + b + h(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لــ (ℓ_f) بجوار ∞.

5- يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقاربا لــ (ℓ_f) بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - a x = b \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$(a \in \mathbb{R}^*\ ,\ b \in \mathbb{R}) \quad \text{أو} \quad (a\ ,\ b) \in \mathbb{R}^2$$

b- الاتجـاهـات المقاربـة :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

1- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

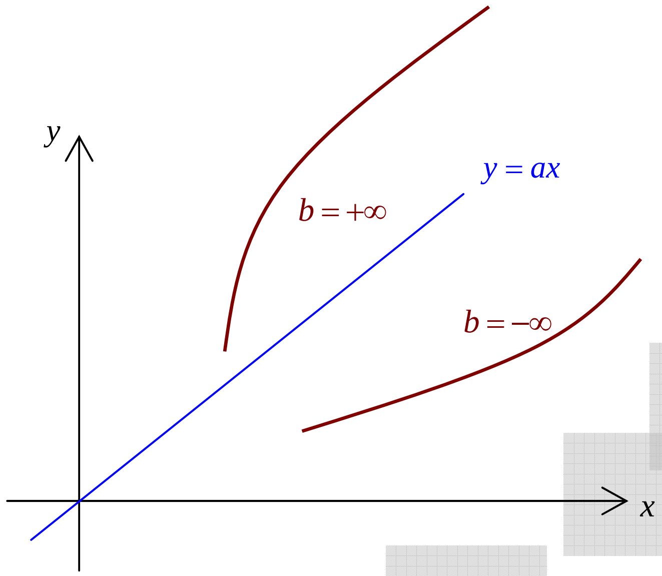
2- إذا كانت $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

3- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

و : $\lim f(x) - ax = \infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ بجوار ∞.



خلاصة :

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

$a = 0$: ℓ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞

$a = \infty$: ℓ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞

$a \in \mathbb{R}^*$: $\lim f(x) - ax = b$

- $b = \pm\infty$: ℓ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم $y = ax$ بجوار ∞
- $b \in \mathbb{R}$: المستقيم $y = ax + b$ مقارب لـ ℓ_f بجوار ∞

R

تمارين

تمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$

1-أ حدد D حيز تعريف الدالة f.

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتائج.

2.أ – برهن أن: $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

ب-أعط جدول تغيرات الدالة f.

3-أ بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\le x$ ثم أول هندسيا النتيجة.

ب- أنشئ (C_f) في م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

4-أ- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن: $\forall x\in J: f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

ج- أنشئ $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم .

تمرين 2:

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+1}-x; x\le 0 \\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}+1; x\succ 0 \end{cases}$$

1) حدد D_f

2) أدرس اتصال f في 0

3) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين و على اليسار في 0 و أول النتائج هندسيا.

4) أحسب نهايات f عند محدات D_f

5) أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f)

6) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\Re^*$ ثم ضع جدول تغيرات f على D_f

7) أ) برهن أن : $\forall x\succ 0: f''(x)=\frac{6x^2-2}{9(x^3+x)^{5/3}}$ ثم استنتج نقطة إنعطاف (C_f)

8) أرسم (C_f) في م م م $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

9) ليكن g قصور f على $I=]-\infty,0]$

أ) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب)أحسب $g^{-1}(x)$ لكل $x\in J$

ج) أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم

د) أحسب $(g^{-1})'(2)$.

تمرين 3 : نعتبر الدالة f بحيث $f(x)=1-x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) حدد D_f و أحسب نهايات f عند محدات D_f

2) أحسب $f'(x)$ من أجل x عدد حقيقي

3) برهن أنه : $\forall x\in\Re: 1-(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\le 0$

4) ضع جدول تغيرات الدالة f

R

5) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{7}{4}\prec\alpha\prec 2$

6) ادرس الفروع اللانهائية ل (C_f)

7) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و $\Delta: y=-x+2$

8) بين أن $I(0,1)$ مركز تماثل ل (C_f)

9) حدد تقاطع (C_f) مع (Oy)

10) حدد إحداثيات مماثلة النقطة ذات الأفصول α بالنسبة ل I و ارسم (C_f) في م م م $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

11) حدد حسب قيم البار متر m عدد حلول المعادلة $(x+m)\sqrt{1+x^2}=x+\sqrt{1+x^2}$.

تمرين 4 :

لتكن الدالة f بحيث : $f(x)=\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)-1$

1) برهن أنه تكفي دراسة الدالة f على $D_E=\left[-\pi,\pi\right]$

2) لتكن $g(x)=\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)$. أدرس إشارة g على D_E

3) أحسب $f(-\frac{\pi}{6})$ و $f(\frac{5\pi}{6})$

4) حدد مماسات (C_f) عند $A(-\frac{\pi}{6},-1)$ و $B(\frac{5\pi}{6},-1)$

5) أدرس في D_E نقط انعطاف و تقعر (C_f)

6) حل المعادلة $f(x)=0$

7) أرسم (C_f) على D_E في م م م .

تمرين 5:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ و (C_f) منحناها في م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- حدد D_f تم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- حدد المقارب المائل ل (C_f) بجوار $-\infty$

3- أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 2 و عند 0 ، تم أول النتائج هندسيا.

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على $D_f-\{0,2\}$ و أن : $\forall x\in D_f-\{0,2\}: f'(x)=\frac{x(4-3x)}{3(f(x))^2}$

ج) أنشى جدول تغيرات f و استنتج مطا رفها.

4- - أننشى (C_f) في م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[0,\frac{4}{3}\right]$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق عند 1 و حدد $(g^{-1})'(1)$ تم أكتب معادلة المماس (Δ') ل $(C_{g^{-1}})$ عند النقطة $A(1,1)$

R

المتتاليات العددية

I- المتتاليات: تعاريف و خاصيات

1- تعريف

ليكن I جزء من $\mathbb{N}$
المتتالية العددية هي تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$

اصطلاحات

*- $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية
يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.
يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\in I}$ عوض u.
$\{u_n / n \in I\}$ هي مجموعة قيم المتتالية $(u_n)_{n\in I}$.

*- اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n)

- اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 1}$
- اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$

2- المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

رتابة متتالية

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \succ u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \prec u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

3- المتتالية الحسابية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$
العدد r يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا وفقط اذا كان $\forall n \succ n_0 \quad u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

صيغة الحد العام

R

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \ge n_0 \quad u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$
- اذا كان $(u_n)_{n\ge 1}$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \ge 1 \quad u_n = u_1 + (n-1)r$
- اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \ge p \ge n_0 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فان $S_n = \dfrac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\ge 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

4- المتتالية الهندسية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $\forall n \ge n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هندسية اذا وفقط اذا كان $\forall n \succ n_0 \quad u_n^2 = u_{n+1} \cdot u_{n-1}$

صيغة الحد العام

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \ge n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$
- اذا كان $(u_n)_{n\ge 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \ge 1 \quad u_n = u_1 q^{n-1}$
- اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \ge p \ge n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p \left(\dfrac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

R

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

اذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p(n-p)$

VII- نهـايــات المـتـتـالـيــات :

1- تمهيـد :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بـ $u_n = f(n) \qquad \forall n \in I$

حيث f دالة عدديـة.

- إذا كانت I منتهية فلا معنـى لحساب النهاية.
- إذا كانت I غير منتهية فهنا يمكن حساب نهاية (u_n) عندما تؤول إلى $+\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$

تذكيـر :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall A \succ 0)\ (\exists B \succ 0)\ (\forall x \in D_f)$$
$$B \prec x \Rightarrow A \prec f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty \iff (\forall A \succ 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})$$
$$N \prec n \Rightarrow A \prec f(n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A \succ 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})$$
$$N \prec n \Rightarrow A \prec u_n$$

أمثلـة :

أحسب نهاية المتتالية إذا كانت المتتاليـة :

R

(1 $$u_n = \sqrt[3]{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n+1} = +\infty$$

(2 $$u_n = n\, Arc\tan\, n$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\, Arc\tan\, n = +\infty \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$= +\infty$$

ملاحظـة :

$$\lim u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall A \succ 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})$$
$$N \prec n \quad \Rightarrow \quad u_n \prec -A$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

تـذكيـر :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon \succ 0)\ (\exists B \succ 0)\ (\forall x \in D_f)$$
$$B \prec x \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \prec \varepsilon$$

2- نـهايـة (q^n) :

نــاقش حسب قيم العدد الحقيقي q نهاية q^n .

الحالة ①: $1 \prec q$

نضع : $(\alpha \succ 0) \ / \ q = 1 + \alpha$

لدينا : $q^n = (1+\alpha)^n$

بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ ; \quad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\,\alpha$

من أجـل : $n = 0$

لدينا : $(1+\alpha)^0 = 1 \quad ; \quad 1 + 0\,\alpha = 1$

إذن : $(1+\alpha)^0 \geq 1 + 0\,\alpha$

من أجـل : $n = 1$

لدينا : $(1+\alpha)^1 = 1 + \alpha$

إذن : $(1+\alpha)^1 \geq 1 + \alpha$

من أجـل : $n = 2$

R

لدينا : $(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2$

إذن : $(1+\alpha)^2 \geq 1+2\alpha$

نفترض أن : $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$

ونبين أن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$

لدينا : $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq (1+\alpha)(1+n\alpha)$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+n\alpha+\alpha+n\alpha^2$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha+n\alpha$

ومنه : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty} 1+n\alpha = +\infty$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} (1+\alpha)^n = +\infty$

ومنه : $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

<u>الحالة</u> ②: $q=1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$$

<u>الحالة</u> ③: $0 \prec q \prec 1$

لدينا : $1 \prec \dfrac{1}{q}$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q^n} = +\infty$

ومنه : $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

<u>الحالة</u> ④: $q=0$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

<u>الحالة</u> ⑤: $-1 \prec q \prec 0$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} (-q)^n = 0$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n q^n = 0$

R

إذن :
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

الحالة ⑥: $q \le -1$

نهاية q^n غير موجودة.

خلاصة :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & 1 \prec q \\ 1 & 1 = q \\ 0 & -1 \prec q \prec 1 \\ \text{غير موجودة} & q \le -1 \end{cases}$$

تطبيقات :

أحسب نهاية (u_n) في الحالات التالية :

(1
$$u_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$$

لدينا :
$$1-\sqrt{2} \prec 1+\sqrt{2}$$

إذن :
$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \prec 1$$

لدينا :
$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + 1 = \frac{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2}{1+\sqrt{2}} \succ 0$$

إذن :
$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \succ -1$$

ومنه :
$$-1 \prec \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \prec +1$$

وبالتالي :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

(2
$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$

R

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

مصاديق تقارب متتالية

.

نعتبر المتتاليات : $(u_n)_{n\geq n_0}$ ، $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$.

1) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث : $\forall n \succ N$

$$u_n \prec v_n \prec w_n$$

و : $\lim u_n = \lim w_n = l$

فإن : $\lim v_n = l$

2) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث :

$\forall n \succ N \qquad u_n \prec v_n$

و : $\lim u_n = +\infty$

فإن : $\lim v_n = +\infty$

3) $\forall n \succ N \qquad u_n \prec v_n$

و : $\lim v_n = -\infty$

فإن : $\lim u_n = -\infty$

4) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$\forall n \succ N \qquad |u_n| \prec v_n$

و : $\lim v_n = 0$

فإن : $\lim u_n = 0$

5) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$\forall n \succ N \qquad |u_n - l| \prec v_n$

و : $\lim v_n = 0$

فإن : $\lim u_n = l$

6) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$\forall n \succ N \qquad |u_n - l| \prec \frac{k}{n}$

فإن : $\lim u_n = l$

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت لها نهاية منتهية

ونقول أنها متباعدة إذا كانت غير متقاربة.

R

خاصيات :

إذا كانت $\lim u_n = l$ و $\lim v_n = l'$

فإن :

$$\lim u_n + v_n = l + l'$$

$$\lim u_n \cdot v_n = l \cdot l'$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$$

مبرهنة :

كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نهايتها موجبة.

مبرهنة :

إذا كان لك $N \prec n$ ، $u_n \prec v_n$

و $\lim v_n = l'$ و $\lim u_n = l$

فإن : $l \prec l'$

مبرهنة :

كل متتالية تزايدية ومكبورة هـي متتالية متقاربة.
كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة.

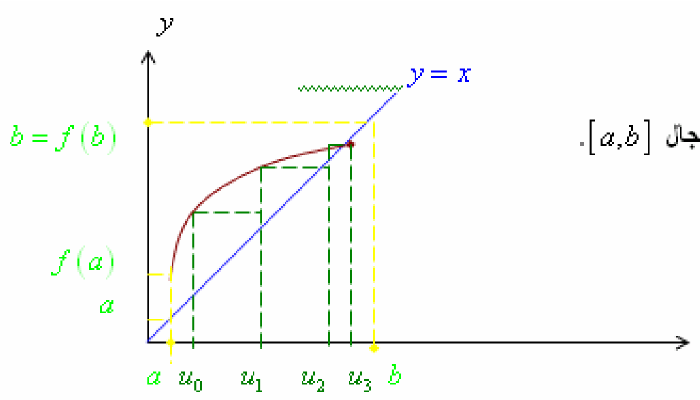
استنتــــاج :

- كل متتالية موجبة وتناقصية هـي متتالية متقاربة.
- كل متتالية سالبة وتزايدية هي متتالية متقاربة.

متتاليات من نوع : $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال ① :

ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[a,b]$.



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a , b] \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

R

نلاحظ أن : $\forall x \in [a , b] \quad ; \quad f(x) \in [a , b]$

يعني أن : $f([a , b]) \subset [a , b]$

وبما أن : (ℓ_f) يوجد فوق المنصف.

فإن : $\forall x \in [a , b] \quad ; \quad f(x) \geq x$

لنبين بالترجع أن (u_n) مكبورة.

- من أجل $n = 0$ $\quad a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a,b]$ ، $f(x) \in [a , b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$ إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $a \leq u_n \leq b$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \; ;$ ①

ولنبين أن : (u_n) تزايديــة.

لدينا : $f(x) \geq x \quad \forall x \in [a,b]$

و : $a \leq u_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $f(u_n) \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) تزايديــة ②.

ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربــة.

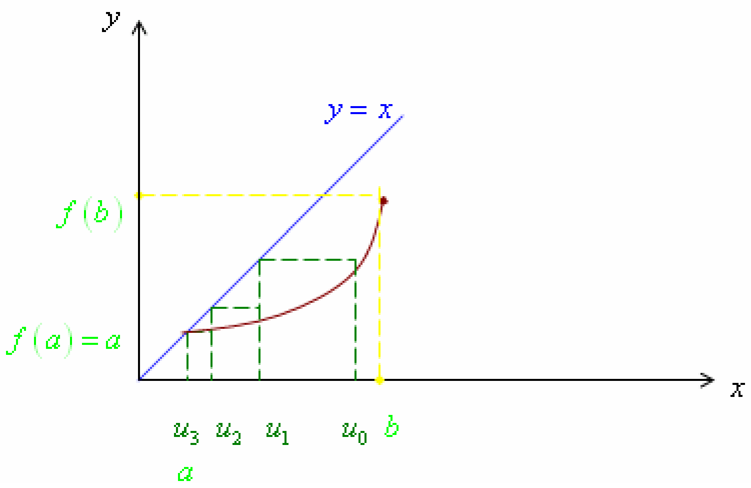
إذن لـهـا نـهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهايــة (u_n) هــي حــل المعادلــة :

$$a \leq x \leq b \; ; \quad f(x) = x$$

R

مثــال ②:



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بــ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a\ ,\ b] \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

لدينا : $\forall\ x \in [a\ ,\ b]\quad ;\quad f(x) \in [a\ ,\ b]$

يعني أن : $a \le x \le b \quad \Rightarrow \quad a \le f(x) \le b$

ولدينا : $\forall x \in [a\ ,\ b] \quad ; \quad f(x) \le x$

لنبين بالترجع أن : (u_n) مصغـورة.

- من أجل $n = 0$ $\quad a \le u_0 \le b$

نفترض أن : $a \le u_n \le b$

ونبين أن : $a \le u_{n+1} \le b$

نعلم أن لكل x من $[a,b]$ ، $f(x) \in [a\ ,\ b]$

وبما أن : $a \le u_0 \le b$

فإن : $a \le f(u_n) \le b$

إذن : $a \le u_{n+1} \le b$

ومنه : $a \le u_n \le b \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ; \quad ①$

لنبين أن : (u_n) تناقصيــة.

لدينا : $f(x) \le x \quad \forall x \in [a,b]$

و : $a \le u_n \le b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(u_n) \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) تناقصيـــة ②.

ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربـة.
إذن لـها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$
ومنه نهايـة (u_n) هـي حـل المعـادلـة :

$$a \le x \le b \; ; \qquad f(x) = x$$

خـلاصـة وخـاصيـة :

إذا كانت (u_n) متتالية معرفة بالعلاقـة $u_{n+1} = f(u_n)$
و f متصلة على مجـال I
مـــع : $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$
إذا كانت (u_n) متقاربـة.
فـإن نـهايـتـهـا هـي حـل المعـادلـة $f(x) = x$ ، $x \in I$

مثـال :

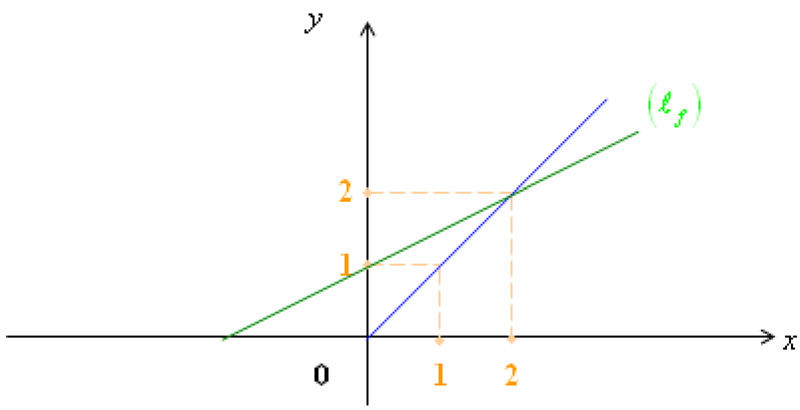
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

1) مثل مبيانيـا الدالة المعرفة بــ :

$$f(x) = \frac{1}{2} x + 1$$

2) بين أن : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$
3) بين أن : $f(x) \ge x$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$
4) بين أن : (u_n) مكبـورة.
5) بين أن : (u_n) تـزايـديـة.
6) استنتج نـهاية (u_n).

الجــواب :
(1



1) بما أن f متصلة وتزايدية على $[0,2]$.
فإن : $f([0,2]) = [1,2] \subset [0,2]$
ومنه : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

2) لنبين : $f(x) \ge x$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

R

على المجال $[0,2]$ ، ℓ_f يوجد فوق المنصف.

ومنه : $f(x) \geq x$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

3) من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 2$

لنفترض أن : $0 \leq u_n \leq 2$

بما أن : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

فإن : $0 \leq f(u_n) \leq 2$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

ومنه : $0 \leq u_n \leq 2$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

إذن : (u_n) مكبـورة.

4) لدينا : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

و : $f(x) \geq x$

وبما أن : $u_n \in [0\,,\,2]$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

فإن : $f(u_n) \geq u_n$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايديــة.

5) بما أن : (u_n) تزايديــة ومكبورة .

فإنـها متقاربــة.

ونـهايتها هــي حــل المعادلــة :

$$f(x) = x \quad ، \quad x \in [0\,,\,2]$$

لدينا :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 1 = x$$

$$\iff x = 2$$

وبما أن : $2 \in [0\,,\,2]$

فإن : $\lim u_n = 2$

تمريــن تطبيـقــي :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = \dfrac{2 \cdot u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

ثم أنشئ (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم ، ثم انشئ الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

2) بين أن : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

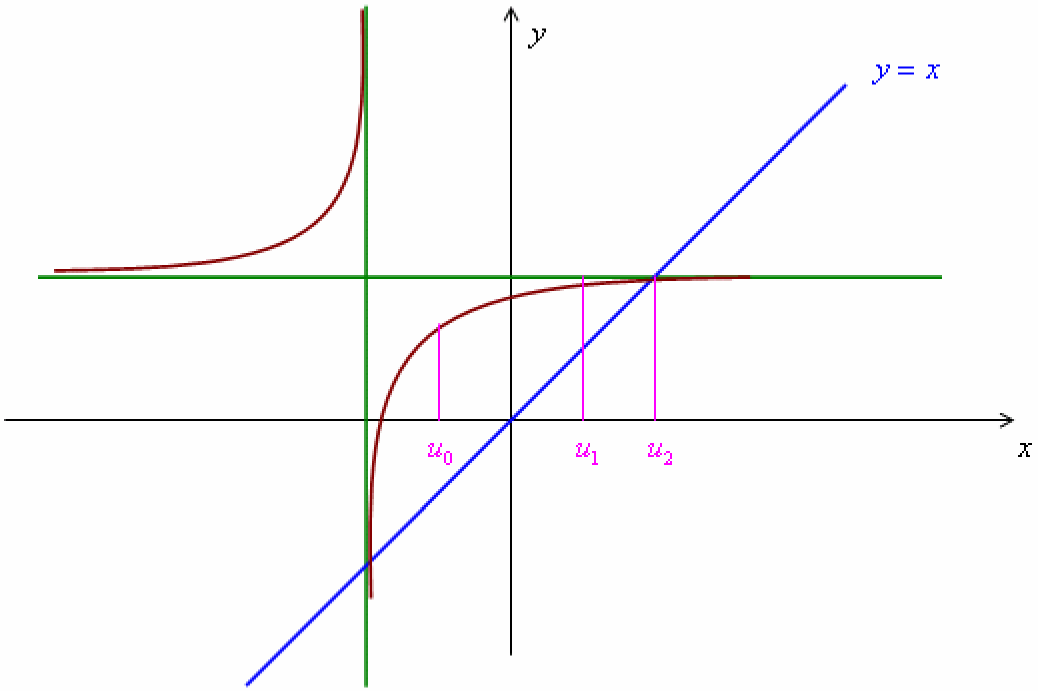
3) استنتج رتابة (u_n) ، u_0 . (u_n) متقاربة.

R

(4 حدد نهاية (u_n).

الجـــواب :

(1



(1 لنبين أن : $\qquad -1 \le u_n \le \sqrt{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ;$

من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = -1$

$$-1 \le u_0 \le \sqrt{3}$$

من أجل $n = 1$ ، لدينا : $u_1 = 1$

إذن : $\quad -1 \le u_1 \le \sqrt{3}$

نفترض أن : $\quad -1 \le u_n \le \sqrt{3}$

ونبين أن : $\quad -1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لدينا : $\quad -1 \le u_n \le \sqrt{3}$

إذن : $\quad f(-1) \le f(u_n) \le f(\sqrt{3})$

إذن : $\quad 1 \le f(u_n) \le \sqrt{3}$

إذن : $\quad 1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

ومنه : $\quad -1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

وبالتالي : $\quad -1 \le u_n \le \sqrt{3}$

R

تمارين

تمرين1) لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) بحيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n} \end{cases}$ و $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

1)بين أن (v_n) متتالية حسابية .

2)عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حيث: $u_0 = 0; u_1 = 1; u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$

نضع: $v_n = u_{n+1} - u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين3) (u_n) متتالية هندسية حيث: $u_2 = 2$ و $u_5 = \frac{2}{27}$.

1) حدد أساس المتتالية (u_n).

2) (v_n) متتالية حيث: $v_n = 3^n u_n - n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول.

ب)) احسب بدلالة n المجموع : $S = 3^1 u_1 + 3^2 u_2 + 3^3 u_3 + ... + 3^n u_n$

تمرين4) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \sqrt[3]{\dfrac{4}{2+u_n^3}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) بين بالترجع أن : $u_n > 0$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \sqrt[3]{2}$.

2) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{2}{u_n^3} - 1; n \in \mathbb{N}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب)حدد (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

ج)احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

د) احسب بدلالة n المجموع : $S = 2\left[\left(\frac{1}{u_0}\right)^3 + \left(\frac{1}{u_1}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{u_{n-1}}\right)^3\right]$

من اقتراح الأستاذ:عبد الرحيم الأصب

R

تمرين5) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[2,3]$ ب : $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$.

1)أ)اعط جدول تغيرات f على I ب) بين أن : $f(I)\subset I$.

2)نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+2}{u_n+3};n\in \mathrm{N} \end{cases}$

أ) بين أن $\forall n\in \mathrm{N}:2\le u_n\le 3$

ب) بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ج)استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

تمرين6) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0=1$ و $\forall n\in \mathrm{N}:u_{n+1}=\dfrac{2+3u_n^2}{1+3u_n}$

1) أ) بين أن : $\forall n\in \mathrm{N}:2-u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$

ب) بين بالترجع أن : $\forall n\in \mathrm{N}:0\prec u_n\prec 2$

ج)بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ) بين أن : $\forall n\in \mathrm{N}:\dfrac{3u_n}{1+3u_n}\prec \dfrac{6}{7}$.

ب) استنتج أن : $\forall n\in \mathrm{N}:2-u_n\prec \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين7) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1) أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب) بين أن : $\forall x\in \mathbb{R}^+:f(x)\le x$.

ج) حدد صورة المجال $[0,1]$ بالدالة f .

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n),n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

أ) تحقق أن : $\forall n\in \mathrm{N}:0\le u_n\le 1$.

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

من اقتراح الأستاذ:عبد الرحيم الأصب

R

الـــدوال الأصليـــة

1- تعريـف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :
F دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.
ولكل x من I : $F'(x) = f(x)$

مثـــال :

1- لتكن $F(x) = x^2 + x + 1$

إذن : $F'(x) = 2x + 1$

إذن : الدالة F هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2x + 1$

2- حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

-a $f(x) = 2$

$F(x) = 2x + C \;/\; C \in \mathbb{R}$

-b $f(x) = x$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

-c $f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$

-d $f(x) = x^n \;/\; n \in \mathbb{N}^*$

$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

-e $f(x) = x^r \;;\; r \in \mathbb{N}^* - \{-1\}$

$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

-f $f(x) = \sqrt{x}$

$= x^{\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{Cte}$

-g $f(x) = (x^2+1)^3(2x)$

$F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + \text{Cte}$

$u^r \cdot u' :$ **الأصليـة** $\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$

R

2- خـاصيــة :

لتكن f دالة عددية.

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن مجموعة الدالة الأصلية للدالة f على I هــي :

$F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

برهــان :

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي.

لدينا : $(F + \lambda)' = F' = f$

إذن : $F + \lambda$ هي أيضـا دالة أصلية للدالة f على I .

ومنه : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هــي $F + \lambda$.

3- خـاصيــة :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على I.

ليكن x_0 من I و y_0 عنصر حقيقي $y_0 \in \mathbb{R}$.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I .

حيث : $F(x_0) = y_0$

أمـثلـــة :

حدد الدالة الأصلية للدالة f والتي تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$.

-1 $f(x) = x + 1$ $\quad$ $F(2) = 1$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$

وبما أن : $F(2) = 1$

فإن : $\frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$

$2 + 2 + C = 1$

ومنه : $C = -3$

-2 $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ $\quad$ $F(0) = 0$

لدينا : $F(x) = 2\ Arc\tan x + C$

وبما أن : $F(0) = 0$

فإن : $C = 0$

إذن : $F(x) = 2\ Arc\tan x$

-3 $f(x) = \cos 2x$ $\quad$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

وبما أن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

فإن : $C = 0$

R

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

4- خـاصيــة :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I .
و G دالة أصلية للدالة g على I .
فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

5- خـاصيــة :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية .

ملاحظـة وخـاصيــة :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I ، فإنه يوجد عدد حقيقي λ
حيث : $F - G = \lambda$

6- جـدول الـدوال الأصليـة الاعتياديـة :

ملاحظـات	الدالـة F (الأصليـة)	الدالـة f
$C \in \mathbb{R}$	$x+C$	1
	$\frac{1}{2}x^2+C$	x
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	x^n
$r \in \mathbb{Q}-\{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$	x^r
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	$u^n \cdot u'$
$r \in \mathbb{Q}-\{-1\}$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+C$	$u^r \cdot u'$
	$Arc\tan x + C$	$\frac{1}{x^2+1}$
	$\sin x + C$	$\cos x$
	$-\cos x + C$	$\sin x$
$a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\cos(ax+b)$
$a \neq 0$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\sin(ax+b)$
$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$\tan x + C$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

R

تطبيقـــات :

حدد دالة أصلية للدالة f في الحالات التالية :

-1 $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + 1} + 1$$

إذن : $$F(x) = x - 2\,Arc\tan x + C$$

-2 $$f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + 1}$$

لدينا : $$f(x) = \frac{1}{2}\,2x\sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}(2x)$$

ومنه : $$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}+1}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{8}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{4}{3}}$$

إذن : $$F(x) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2 + 1}^{\,4}$$

-3 $$f(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 3}$$

$$= \left(x^2 + x + 3\right)^{\frac{1}{2}}(2x + 1)$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 + x + 3\right)^{\frac{3}{2}}$$

-4 $$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$$

$$F(x) = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x$$

-5 لدينا : $$f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2 + 1\right)^2}\,x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{2}{3}} 2x$$

إذن :

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{10}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{3}} + C$$

R

تمارين حول الاشتقاق & الـــدوال الأصليـــة

تمرين 1

A - أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x+1)^2}$ 2- $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$ 3- $f(x)=\cos(x^3-6x)$ 4- $f(x)=x\sqrt{x^2-4}$

5- $f(x)=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$ 6- $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}^2$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

1- حدد تقريبا للدالة f بدالة تالفية بجوار 0

2- أعط قيمة مقربة لكل من $\sqrt[3]{1,003}$ و $\sqrt[3]{0,998}$

تمرين 3

حدد مجموعة الدوال الأصلية ومجالات تعريفها لكل دالة من الدوال التالية

1- $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}-5$ 2- $f(x)=\dfrac{2x+2}{(x+1)^3}$

3- $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ 4- $f(x)=(x^2-2x)\sqrt{x}$

5- $f(x)=x\cos(x^2+3)$ 6- $f(x)=(\cos x)^3$

7- $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+1}}$

تمرين4

لتكن f دالة عددية معرفة ب $\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & x\geq 1 \\ f(x)=3x-2 & x<1 \end{cases}$

1- بين أن f تقبل دالة أصلية على $[0;2]$

2- حدد مجموعة الدوال الأصلية لـ f على $[0;2]$

تمرين5

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أن نهاية f' عند 0 غير موجودة

تمرين6

لتكن f و F دالتين عدديتين معرفتين بـ

$$\begin{cases} f(x)=2x\sin x-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن f غير متصلة في 0

2- بين أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

تمرين7

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$

بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل ثلاث حلول مختلفة في $\mathbb{R}$

R

الــــدوال اللوغـاريـتـمـيـــة

I- دالــة اللـوغـاريتــم النبيـــري :

1- تمهيـــد :

نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I ، تقبل دالة أصلية على المجال I.
ونعلم ان الدالة الأصلية للدالة $\left(x \mapsto x^{r}\right)$ على المجال $\mathbb{R}_{+}^{*}$ بحيث $r \in Q-\{-1\}$ هي الدالة :
$\left(x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C\right)$.

ولدينا : الدالة $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$ متصلة على $\mathbb{R}_{+}^{*}$ إذن هذه الدالة تقبل دالة أصلية.

وبما أن : $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$

فإن : $r = -1$

فإنه لايمكن استعمال التقنية السابقة لتحديد دالة أصلية لهذه الدالة .

2- تعريــف :

الدالة الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$ على $\mathbb{R}_{+}^{*}$ والتي تنعدم في **1** تسمى دالة اللـوغـاريتــم النبــري ونرمز لها بــ $\ln$ أو (Log).

استنتاج :

-1 $\ln(1) = 0$

-2 $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*} \quad ; \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

-3 دالة اللوغاريتم النبري متصلة على $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

-4 دالة اللوغاريتم النبري تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

-5 $\forall x, y \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$x \succ y \Leftrightarrow \ln x \succ \ln y$$

-6 لدينا : $\ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln x$	‖	0 ↗	

R

إذن : $\ln x \succ 0 \Leftrightarrow 1 \prec x$

$\ln x \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$

تطبيـق :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية :

-1 $f(x) = \ln(x-1) + \ln(3-x)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x-1 \succ 0 \quad \text{و} \quad 3-x \succ 0\}$$

إذن :

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 1 \quad \text{و} \quad x \prec 3\}$$

$$D_f =]1 \, , \, 3[$$

-2 $f(x) = \ln(1-x)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1-x \succ 0\}$$
$$=]-\infty \, , \, 1[$$

-3 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

إذن : $D_f =]-\infty \, , \, 0[\ \cup \ ]1 \, , \, +\infty[$

-3 خاصيـات :

1-3 : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \ ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

برهـان :

نضع : $y = a$

و u دالة حيث : $u(x) = \ln(ax)$

لدينا : $u'(x) = a \ \ln'(ax)$

$$= \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

وبما أن : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

فإن : u و $\ln x$ دالتين أصليتين للدالة $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$

إذن : يوجد عدد حقيقي C بحيث : $u(x) = \ln x + C$

R

إذن : $u(x) = \ln(ax) = \ln x + C$

وبما أن : $u(1) = \ln a = 0 + C$

فإن : $\ln a = C$

إذن : $u(ax) = \ln a + \ln x$

ومنه : $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y}$

2-3 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$

برهـان :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} 0 &= \ln 1 = \ln \frac{x}{x} \\ &= \ln \left(x \times \frac{1}{x} \right) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{x} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x}$

3-3 :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y}$$

4-3 : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln x^n = n \ln x$

برهـان :

من أجل $n = 0$

$$\begin{aligned} \ln x^0 &= \ln 1 = 0 \\ &= 0 \ln x \end{aligned}$$

من أجل $n = 1$

$$\ln x^1 = 1 \ln x$$

من أجل $n = 2$

$$\begin{aligned} \ln x^2 &= \ln x + \ln x \\ &= 2 \ln x \end{aligned}$$

نفترض أن : $\ln x^n = n \ln x$

ونبين أن : $\ln x^{n+1} = (n+1) \ln x$

لدينا :

$$\begin{aligned} \ln x^{n+1} &= \ln x^n \times x \\ &= \ln x^n + \ln x \\ &= n \ln x + \ln x \end{aligned}$$

R

$$= (n+1)\ \ln x$$

وبالتالي : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ,\ \forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*} \quad ; \quad \ln x^{n} = n\ \ln x}$

5-3 : $\forall r \in \mathbb{Q} ,\ \forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*} \quad ; \quad \ln x^{r} = r\ \ln x$

برهــان :

نضع : $r = \dfrac{p}{q}$

و : $y = x^{r}$

إذن : $y = x^{\frac{p}{q}}$

إذن : $y^{q} = x^{p}$

$$\ln y^{q} = \ln x^{p}$$

$$q\ \ln y = p\ \ln x$$

$$\ln y = \frac{p}{q}\ \ln x$$

إذن : $\boxed{\ln x^{r} = r\ \ln x}$

حــالات خــاصــة :

لكل x من $\mathbb{R}_{+}^{*}$:

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2}\ \ln x$$

$$\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\ \ln x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ \ln x$$

4- دراسة الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln x$

1-4 : مجموعة التعريـف :

$$D_f =]0 ,\ +\infty[= \mathbb{R}_{+}^{*}$$

2-4 : النهــايــات :

تمهيــد :

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \ln 2^{n} = n\ \ln 2$

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n} = +\infty$$

و : $\ln 2 \succ 0$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} n\ \ln 2 = +\infty$

ومنه :

R

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

- لنحسب $\lim_{x \to 0^+} \ln x$

نضع : $x = \frac{1}{t}$

$$\left(x \to 0^+\right) \Leftrightarrow \left(t \to +\infty\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to 0^+} \ln \frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} -\ln t = -\infty$$

إذن :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

3-4 : الفرعين الانهائيين :

لدينا : $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن : محور الأراتيب مقرب لـ ℓ_f.

ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- لنحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

لتكن : u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ : $u(x) = x - \ln x$

لدينا : $u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$u(1) = 1$$

إذن : $u(x) \geq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $u(x) \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $x - \ln x \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $x \succ \ln x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\sqrt{x} \succ \ln \sqrt{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\frac{1}{2} \ln x \prec \sqrt{x} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\frac{2\sqrt{x}}{x} \prec \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\frac{2}{\sqrt{x}} \prec \frac{\ln x}{x} \prec 0 \; ; \quad \forall x \in [1,+\infty[$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل.

4-4 : الرتابــة :

لدينا : $\ln'(x) = \frac{1}{x} \succ 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

وبما أن : $1 \in \mathbb{R}$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}_+^*$ ونرمز له بـ e حيث $\ln e = 1$.

بحيث : $e \simeq 2,718$

جـدول التغيـرات f :

x	0	1	e	$+\infty$
$u'(x)$		$+$		
$u(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

5-4 : التقعــر :

لدينا : $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $f''(x) \prec 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : (ℓ_f) مقعــر.

6-4 : معادلــة المماــس في النقطــة 1 .

لدينا : $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

إذن : $\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

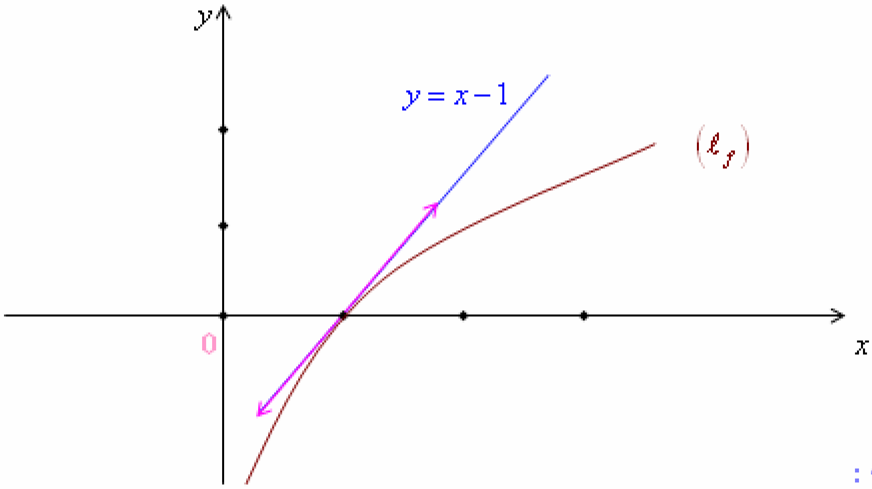
إذن : معادلة المماس لـ ℓ_f في **1** هــي :

$$y = 1\,(x-1) + 0$$

$$y = x - 1$$

R

7- : التمثيل البياني .



5- نهايات مهمة :

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$	-1
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	-2
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	-3
$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	-4
$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	-5
$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$	-6
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	-7
$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$	-8

بالنسبة لـ 5- نضع : $x = t - 1$

$$(x \to 0) \Leftrightarrow (t \to 1)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$$

بالنسبة لـ 6- نضع : $x = \frac{1}{t}$

$$(x \to 0^+) \Leftrightarrow (t \to +\infty)$$

بالنسبة لـ 7- من أجل $n = 2$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{\ln X}{X} = 0$$

بالنسبة لـ 8- نضع : $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1}(x \ln x)$

$$= 0$$

R

إذن :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ \ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ \ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0$$

5- تعميــم :

نعتبر الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \ln(U(x))$

مجموعة تعريف الدالة f :

$$D_f = \{x\in D_f \ \ / \ \ U(x)\succ 0\}$$

النهايـات :

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} U(x) = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to x_0} \ln U(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\ln U(x)}{U(x)} = 0 \end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} U(x) = 0^+ \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to x_0} \ln(U(x)) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} U(x)\ \ln U(x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+U(x))}{U(x)} = 1 \end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} U(x) = 1 \Rightarrow \left\{ \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(U(x))}{U(x)-1} = 1 \right.$

مشتقة الدالة f :

إذا كانت U قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا على I.

$$\forall x\in I \ ; \ f'(x) = \ln'\ (U(x))^3 \times U'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

مثـال : 1- $f(x) = \ln(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

-2 $f(x) = \ln\sqrt{x}$

ط1 $\quad f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}$

R

$$= \frac{1}{2x}$$

ط2

لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

-3

$$f(x) = \ln\left(\sqrt[4]{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(x^2+1\right)$$

إذن :

$$f'(x) = \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}$$

تعريـف :

u دالة قابلة للاشتقاق على u ولا تنعدم.

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على I.

استنتــاج :

الدوال الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$ هــي الـدوال $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ $C \in \mathbb{R}$

ملاحظــة :

$$u(x) \succ 0 \quad \Rightarrow f(x) = \ln u(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$u(x) \prec 0 \quad \Rightarrow f(x) = \ln |-u(x)|$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

إذن : إذا كانــت :

$$f(x) = \ln |u(x)|$$

فإن :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

R

مثــال :

$$f(x) = \ln\left|x^2-3x+1\right|$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+1}$$

تطبيقــات :

تمريـــن 1 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التاليــة :

-1 $f(x) = \ln(2x-1)$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} \ / \ 2x-1 \succ 0\}$$
$$= \left\{x\in\mathbb{R} \ / \ x \succ \frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f = \left]\frac{1}{2} \ , \ +\infty\right[$$

-2 $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} \ / \ x\succ 0 \text{ و } \ln x\neq 0\}$$
$$= \{x\in\mathbb{R} \ / \ x\succ 0 \text{ و } x\neq 1\}$$

إذن : $D_f =]0 \ , 1[\ \cup \ ]1 \ , \ +\infty[$

-3 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} \ / \ x\succ 0 \text{ و } \ln x \geq 0\}$$
$$= \{x\in\mathbb{R} \ / \ x\succ 0 \text{ و } x\geq 1\}$$

$$D_f = [1 \ , \ +\infty[$$

-4 $f(x) = \sqrt{1-\ln^2 x}$

ملاحظــة :

لدينــا : $\ln e = 1$

إذن : لكل a مــن $\mathbb{R}$.

$$a \ \ln e = a$$

إذن : $\ln e^a = a$

لدينــا : $D_f = \{x\in\mathbb{R}_+^* \ / \ 1-\ln^2 x \geq 0\}$

ولدينا : $(1-\ln^2 x) = (1-\ln x)(1+\ln x)$

$$1-\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 = \ln e$$
$$\Leftrightarrow \quad x = e$$

$$1+\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 = \ln e^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-\ln^2 x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$D_f = \left[\frac{1}{e} , e\right]$$

-5 $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}}$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

إذن : $D_f = \left]0 , \frac{1}{e}\right] \cup \left]e , +\infty\right[$

تمريـــن 2 :

-1 $\ln x + \ln(x+1) = \ln 6$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \quad \text{و} \quad x \succ -1\}$$
$$= \left]0 , +\infty\right[$$

$$\forall x \in D_f \ ; \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x \times (x+1)) = \ln 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

لدينا : $\Delta = 25$

إذن : $x_1 = -3$ و $x_2 = 2$

وبما أن : $x \succ 0$

فإن : $S = \{2\}$

-2 $\ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$

لدينا : $D_f = \left]0 , +\infty\right[$

نضع : $X = \ln x$

إذن : $(E_2) \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 3X + 2 = 0$

R

لدينا : $\Delta = 9 - 8 = 1$

إذن : $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ أو $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

إذن : $\ln x = 1$ أو $\ln x = 2$

إذن : $x = e$ أو $x = e^2$

إذن : $S = \{e \, , \, e^2\}$

-3 $(E_3) \; : \; \ln x + \sqrt{\ln x} - 2 = 0$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}_+^* \; / \; \ln x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* \; / \; x \geq 1\} \\ &= [1 \, , \, +\infty[\end{aligned}$$

نضع : $\sqrt{\ln x} = X$ حيث $X \geq 0$

إذن : $X^2 + X - 2 = 0$

لدينا : $\Delta = 1 + 8 = 9$

إذن : $X = \frac{-1+3}{2}$ أو $X = \frac{-1-3}{2}$

$X = 1$ أو $X = -2$

وبما أن : $-2 \prec 0$

فإن : $X = 1$

إذن : $\sqrt{\ln x} = 1$

$\ln x = 1$

أي : $x = \mathrm{e}$

إذن : $S = \{e\}$

تمريـــن 3 :

لنحسب النهايـات :

-1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} 2\,\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

-2 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} \cdot \frac{x+1}{x}$$

نضع : $X = x+1$

إذن : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

و : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = 1$$

إذن : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

: -3 $$\lim_{x\to 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\ \ln x\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\ \ln \sqrt{x}^2\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2^2 \left(\sqrt{x}\ \ln \sqrt{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 4 \left(\sqrt{x}\ \ln \sqrt{x}\right)^2$$

$$= 0$$

: -4 $n \in \mathbb{N}$ ، $$\lim_{x\to 0^+} x \ln^n(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt[n]{x}\ \ln \sqrt[n]{x}^n\right)^n$$

نضع : $\sqrt[n]{x} = X$

إذن : $$\lim_{x\to 0^+} x \ln^n(x) = n^n \left(X \ \ln X\right)^n$$
$$= 0$$

مثـال :

لنحسب : $\lim_{x\to 0^+} x \ln^3 x$

نضع : $X = \sqrt[3]{x}$

إذن : $x = X^3$

لدينا : $$\lim_{x\to 0^+} x \ln^3 x = \lim_{X\to 0^+} X^3 \ln^3 X^3$$

$$= \lim_{X\to 0^+} X^3 \left(3 \ln^3 X\right)^3$$

$$= \lim_{X\to 0^+} 27 \left(X \ \ln X\right)^3$$

$$= 0$$

R

-5

$$\lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(x^2+1\right)$$

ط1 :

$$\lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(x^2+1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1-2\,\frac{\ln(-x)}{-x}\right)$$

نضع : $-x = t$

$$= \lim_{x\to-\infty} -t\left(1-2\,\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

$$= -\infty$$

ط2 :

$$\lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(x^2+1\right) = \lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x+\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{\ln x^2}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1-2\,\frac{\ln(-x)}{-x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\infty$$

تمريـــن 4 :

تذكيـــر :

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln U(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$f(x) = \ln\left|U(x)\right| \Rightarrow f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

-1 $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$

R

$$D_f = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

ط1 :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

ط2 :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1|$$

إذن :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1) - (x-1)}{x^2-1}$$

$$= \frac{2}{x^2-1}$$

-2 $$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)'x - (\ln x + 1)x'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-\ln x}{x^2}$$

-3 $$f(x) = \ln|\ln x|$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \ \text{و} \ \ln x \neq 0\}$$

$$= \left]0\,,\,1\right[\cup \left]1\,,\,+\infty\right[$$

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

R

$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{x \ln x}$$

-4 $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \qquad x^2+1 \succ x^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \qquad \sqrt{x^2+1} \succ |x|$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \qquad \sqrt{x^2+1} + x \succ 0$

ومنه : $D_f = \mathbb{R}$

ولدينا : $\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

تمريــــن 5 :

$$f(x) = \frac{2 \ln|x|}{x^2}$$

-1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} \; / \; x \neq 0$ أو $|x| \succ 0\}$

$$= \mathbb{R}^*$$

* $\forall x \in D_f \quad ; \quad -x \in D_f$

و : $f(-x) = \dfrac{2 \ln|-x|}{(-x)^2}$

$$= \frac{2 \ln|x|}{x^2}$$

ومنه : $f(-x) = f(x)$

وبالتالي : f دالة زوجيـة.

-2 أ-

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \frac{2 \ln(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \frac{2}{x^2} \cdot \ln(x)$$

$$= (+\infty)\;(-\infty)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ \ln(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}\ \frac{\ln x}{x}$$

$$= 0$$

ب- * $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$

$$f'(x) = \left(\frac{2\ \ln|x|}{x^2}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(2\ \ln x)'x^2 - (x^2)'(2\ \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x - 2x\ (2\ \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x\ (1 - 2\ \ln x)}{x^4}$$

ومنه : $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\ ;\quad f'(x) = \dfrac{2\ (1 - 2\ \ln x)}{x^3}$

* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ;\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ \ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

ومنه :

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$1/e$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$1/e$	↘	0

3- أ- لدينا : $f(1) = 0$

وبما أن : $f'(1) = 2$

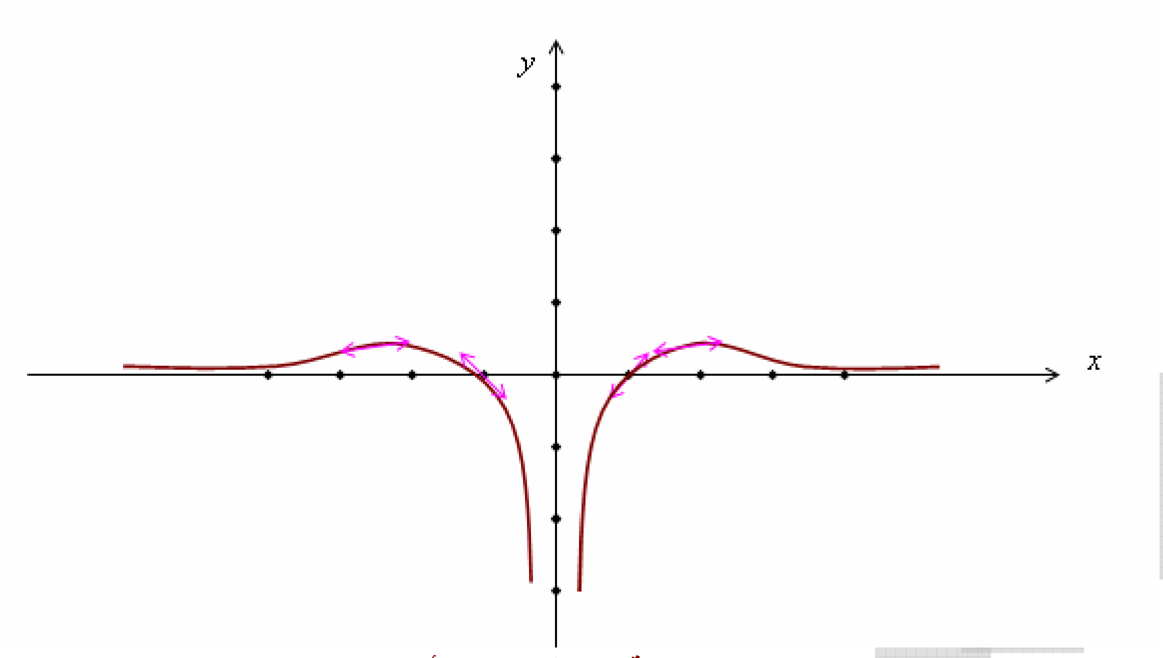
$$y = f'(x)(x-1) + f(1)$$

فإن : $y = 2\ (x-1)$

$$y = 2x - 2$$

هـي معادلـة ديكارتيـة للممـاس للمنحنى (ℓ_f) فـي النقطة A ذات الأفصول 1 .

R



دالــة اللـوغـاريتـم للأســاس a :

تعريــــف :

لتكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا ومخالفا للعدد 1.

$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

الدالة $\left(x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a} \right)$ تسمى دالـة اللـوغـاريتـم للأســاس a. ونرمز لها بـ $\log_a$.

أي أن : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

مثــال :

-1 $\log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

-2 $\log_e(x) = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

-3 $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

ملاحظــة :

$\log_a(a) = 1$

خاصيـات :

-1 لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

-2 لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

ولكل n من $\mathbb{N}$ ،

ولكل r من $\mathbb{Q}$ ،

R

$$\log_a\left(x^n\right) = n \log_a(x)$$
$$\log_a\left(x^r\right) = r \log_a(x)$$

دراسة الدالــــة $\log_a$

لتكن f_a الدالة المعرفة بـ : $f_a(x) = \log_a(x)$

مجموعة التعريــف :

$$D_a = \left]0\, ,\, +\infty\right[$$

النهايــات :

الحالة 1 : $a \succ 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty$$

الحالة 2 : $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = +\infty$$

التغيــرات :

لكل x مــن $\mathbb{R}_+^*$

$$\left(\log_a(x)\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ \ln a}$$

الحالة 1 : $a \succ 1$

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الحالة 2 : $0 \prec a \prec 1$

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

R

الفـروع اللانـهـائيــة :

لدينا : $\left|\lim_{x\to0^+} \log_a(x)\right| = +\infty$

إذن : $(x=0)$ مقــارب لــ (ℓ_f).

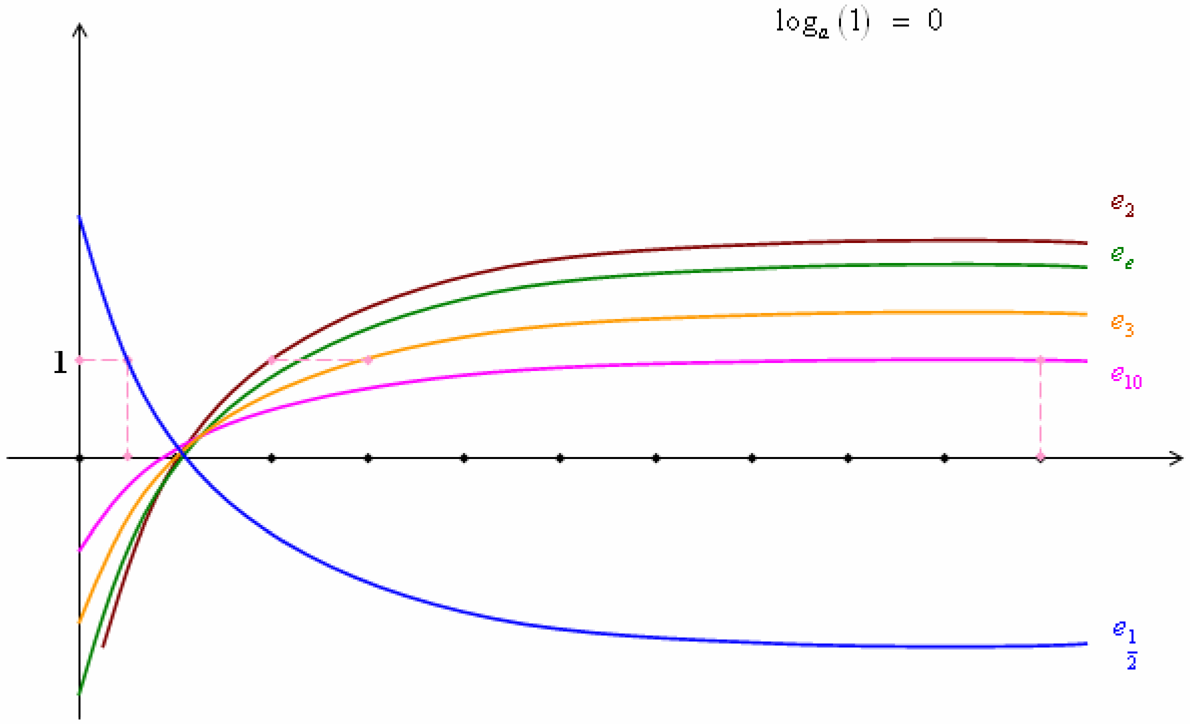
ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{\ln a} = 0$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

التمثيـل المبيانــي :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \; ; \; \log_a(a) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$



حـالـة خـاصـة :

إذا كانت $a = 10$

فإن الدالة $\log_{10}$ تسمى دالـة اللوغـاريتـم العشـري، ونرمز لها بـ $\log$.

استنتــاج :

-1 $\log_{10} = 1$

-2 $\log_{10^x} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

-3 $\log(xy) = \log x + \log y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \; ;$

-4 $\log\frac{x}{y} = \log x - \log y$

ملاحظـة :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\log x = y \iff x = 10^y$$

R

تمارين حول الدوال اللوغاريتمية

تمرين 1

-1 حدد $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3$; $\lim_{x\to-\infty} x+\ln(x^2+1)$ $\qquad \lim_{x\to0^+}(\sin x)\ln x$

-2 أدرس قابلية الاشتقاق و حدد $f'(x)$

a) $f(x)=\ln\left(2x-\sqrt{x+1}\right)$ $\qquad$ b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-(\ln x)^2}$

-3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين

a) $(\ln x)^3-2(\ln x)^2+3\ln x=0$ $\qquad$ b) $Log_2\left(\sqrt{x}+2\right)+Log_4(x+3)=\dfrac{3}{2}$

تمرين 2

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية

a) $f(x)=\dfrac{3x}{1-\ln x}$ $\qquad$ b) $f(x)=\ln\left(2x^2-x+3\right)$ $\qquad$ c) $f(x)=\ln(\ln x)$ $\qquad$ d) $f(x)=\sqrt{1-(\ln x)^2}$

تمرين 3

-1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$\ln(2x-3)+\ln(x+1)=\ln 3$ $\qquad \ln(2x-3)(x+1)=\ln 3$

$\ln|2x-3|+\ln|x+1|=\ln 3$ $\qquad 2\ln(2x-1)-3\ln(1-x)=0$

-2 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\succ 0$ $\qquad \ln\left(-3x^2+x+2\right)\geq 0$, $\qquad \ln|x+1|\prec-\ln|3x+5|$

-3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\qquad Log_2 x=\dfrac{1}{2}+Log_4(2x+5)+Log_4 2$

-4 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة

$$\begin{cases} Log_x e+Log_y e=\dfrac{3}{2} \\ \ln xy=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

تمرين 4

أحسب النهايات التاليات

$\lim_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2-2x}{x^2+3}$; $n\in\mathbb{N}^*$ $\quad \lim_{x\to0^+}x(\ln x)^n$ $\quad \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x-3}{x}\right)$ $\quad \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^2-x$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+2\right)}{x+2}$

تمرين 5

حدد مشتقة الدالة f في الحالات التالية

a) $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{4-x}$; b) $f(x)=\ln(1-\ln x)$ $\qquad$ c) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x} & x\succ 0 \\ f(x)=x-1 & x\leq 0\end{cases}$

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$

-1 حدد D_f أحسب $\lim_{x\to1}f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

-2 أحسب $f'(x)$ لكل x من $D_f-\{0\}$ و أعط جدول تغيرات الدالة f

-3 أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

-4 أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

-5 بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف A تحديد إحداثيتيها و أحسب معادلة المماس عند النقطة A

-6 حدد نقطة تقاطع المنحنى C_f و محور الأفاصيل التي تختلف عن الأصل

-7 أنشئ C_f نأخذ $\ln 2\simeq 0,7$

R

الأعداد العقدية

I- تمهيـــــد :

1- حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $x+3=0$

لدينا : $x=-3\notin\mathbb{N}$

إذن : $S=\varnothing$.

وفي $\mathbb{Z}$ حل هذه المعادلة هو : $S=\{-3\}$.

2- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $2x-1=0$

لدينا : $x=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

إذن : $S=\varnothing$

وفي $\mathbb{Q}$ الحل هو : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3- حل في $\mathbb{Q}$ المعادلة : $x^2-2=0$

لدينا : $x=-\sqrt{2}$ أو $x=\sqrt{2}$

إذن : $S=\varnothing$

وفي $\mathbb{R}$ الحل هو : $S=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+1=0$

لدينا : $x^2=-1$

إذن : $S=\varnothing$

في البداية كتب حل المعادلة : $x^2+1=0$

على شكل : $S=\{-\sqrt{-1},\sqrt{-1}\}$

ولتفادي هذه التناقضات وضع الرياضي **Euler** الرمز i.

للتعبير عن العدد غير الحقيقي الذي يحقق : $i^2=-1$.

فأصبح في $\mathbb{C}$ الحل هو : $S=\{-i,i\}$

وبعده جاء العالمان الرياضيان **Gauss** و **Gauchy** لوضع

5-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^3=15x+4$ في البداية وضع الرياضي بومبلي العدد الغير عادي $4=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ وبدلك بين أن 4 حل لهدة المعادلة بين ذلك ؟

II- عموميـــــات :

1- تعريـف :

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ وتحقق ما يلي :

1- المجموعة $\mathbb{C}$ تحتوي على عنصر غير حقيقي i ويحقق $i^2=-1$.

2- كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل وحيد : $a+ib$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$.

3- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع والضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.

R

2- تعاريـف ومصطلحـات :

1- مجموعة الأعداد العقدية هي المجموعة $\mathbb{C}$.

حيث : $\mathbb{C} = \{a+ib \ / \ a\in\mathbb{R} \ ; \ b\in\mathbb{R}\}$

2- الشكل الجبري لعدد عقدي :

ليكن z عددا عقديا.

الكتابة $z=a+ib$ حيث $a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R}$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z.

3- الجزء الحقيقي – الجزء التخيلي :

ليكن z عددا عقديا حيث $z=a+ib$ ، $b\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد العقدي z.

ونكتب رمزه كالتالي : $a=\Re e(z)$

والعدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد العقدي z.

ونرمز له بـ : $b=Im(z)$

استنتـاج

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C} \ ; \quad z = \Re e\,(z) + i\ \mathrm{Im}(z)}$$

4- تساوي عددين عقدييـن :

نعتبر العددين z_1 و z_2.

حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $z_1=a+ib$

و $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ و $z_2=c+id$

$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c$ و $b=d$

استنتـاج

$$\boxed{z_1=z_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\Re e\,(z_1) = \Re e\,(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)\end{cases}}$$

5- العمليات في $\mathbb{C}$:

a- الجمـع :

عملية الجمع في $\mathbb{C}$ عملية :

- تبادلية : $z_1+z_2 = z_2+z_1 \qquad \forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}_+^2$
- تجميعية .
- لكل عنصر مقابل.
- العنصر المحايد هو 0 .

b- الضـرب :

عملية الضرب في $\mathbb{C}$ عملية :

- تبادلية :
- تجميعية .
- لكل عنصر مقابل.
- العنصر المحايد هو 1 .

R

c- مقلوب عدد عقدي غير منعدم :

ليكن : $\begin{cases} z \neq 0 \quad ; \quad z = a+ib \\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

لدينا : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a-ib}$

$$= \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$$

مثال :

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

-1 $\frac{1+2i}{3+i}$

$$\frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{3+6i-i-2i^2}{9-i^2}$$

$$= \frac{5+5i}{10}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

-2 $\frac{2-i}{1+2i}$

ط 1 :

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{1+4} = \frac{2-2-4i-i}{5} = -i$$

ط 2 :

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{2-i}{-i^2+2i} = \frac{2-i}{i(2-i)} = \frac{1}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

3- التمثيل الهندسي لعدد عقـدي :

1- صورة عدد عقدي لحق نقطة Affixe d'un point

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

نعتبر التطبيق :

$$f : \mathbb{C} \to P$$
$$z = a + ib \to M(a,b)$$

التطبيق f تقابل من $\mathbb{C}$ نحو P.

تعريـف :

النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد العقدي $z = a+ib$.

والعدد العقدي $z = a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق النقطة $M(a,b)$.

ويكتب $aff(M) = z$

-2 لحق متجهـة :

نعتبر تطبيق g المعرف من $\mathbb{C}$ نحو المستوى المتجهي V_2.

$$g : \mathbb{C} \to V_2$$
$$z = a + ib \to \vec{u}(a,b)$$

لدينا : g تقابل من $\mathbb{C}$ نحو V_2.

-a تعريـف :

المتجهة $\vec{u}(a,b)$ تسمى صورة العدد العقدي $z = a+ib$ ،

والعدد العقدي $z = a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$.

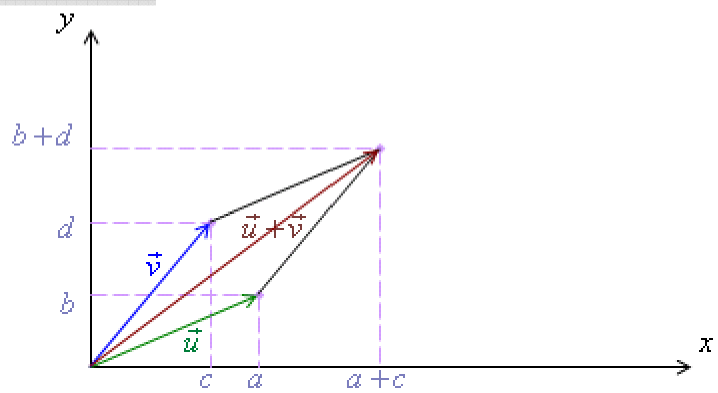
ونكتب : $aff(\vec{u}) = z$

-b لحق مجموع متجهتين :

نعتبر المتجهتين $\vec{u}(a,b)$ ، $\vec{v}(c,d)$.

لدينا : $aff(\vec{u}) = a + ib$

و : $aff(\vec{v}) = c + id$



لدينا :
$$aff(\vec{u}+\vec{v}) = (a+c) + (b+d)$$
$$= (a+ib) + (c+id)$$
$$= aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

وبالتالي :

R

$$\boxed{aff(\vec{u}+\vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})}$$

c- لحق جداء المتجهة في عدد حقيقي :

نعتبر المتجهة $\vec{u}(a,b)$ و $\lambda\in\mathbb{R}$.

لدينا : إحداثيتي $\lambda\vec{u}$ هما $(\lambda a,\lambda b)$.

إذن :
$$\begin{aligned} aff(\lambda\vec{u}) &= \lambda a + i\,\lambda b \\ &= \lambda\,(a+ib) \\ &= \lambda\ aff(\vec{u}) \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\boxed{aff(\lambda\vec{u}) = \lambda\, aff(\vec{u})}$$

d- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$:

لتكن : $aff(A) = x_A + i\,y_A$

و : $aff(B) = x_B + i\,y_B$

لدينا :
$$\begin{aligned} aff(\overrightarrow{AB}) &= aff(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \\ &= aff(-\overrightarrow{OA}) + aff(\overrightarrow{OB}) \\ &= -aff(\overrightarrow{OA}) + aff(\overrightarrow{OB}) \\ &= -x_A + i\,y_A + x_B + i\,y_B \\ &= (x_B - x_A) + i\,(y_B - y_A) \end{aligned}$$

وبالتالي :
$$\boxed{aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)}$$

e- لحق منتصف قطعة :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما z_A و z_B على التوالي .

و I منتصف القطعة $[AB]$ لحقها z_I.

لدينا : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

إذن : $aff(\overrightarrow{AI}) = aff(\overrightarrow{IB})$

إذن :
$$z_I - z_A = z_B - z_I$$
$$2\,z_I = z_A + z_B$$

ومنه :

$$\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$$

R

خاصيـــة :

لحق منتصف قطعة $[AB]$ هــو $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

استقامية ثلاث نقط

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي : z_A و z_B و z_C .

لدينا : A و B و C ثلاث نقط مستقيمية.

$$\Leftrightarrow \quad (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \ / \ \overrightarrow{AC} = \alpha \ \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \ / \ aff\left(\overrightarrow{AC}\right) = \alpha \ aff\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \ / \ \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

خلاصة وخاصيـــة :

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها z_A و z_B و z_C على التوالي حيث $z_A \neq z_B$.

تكون النقط A ، B ، C مستقيمية إذا وفق إذا كان العدد $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقيــا.

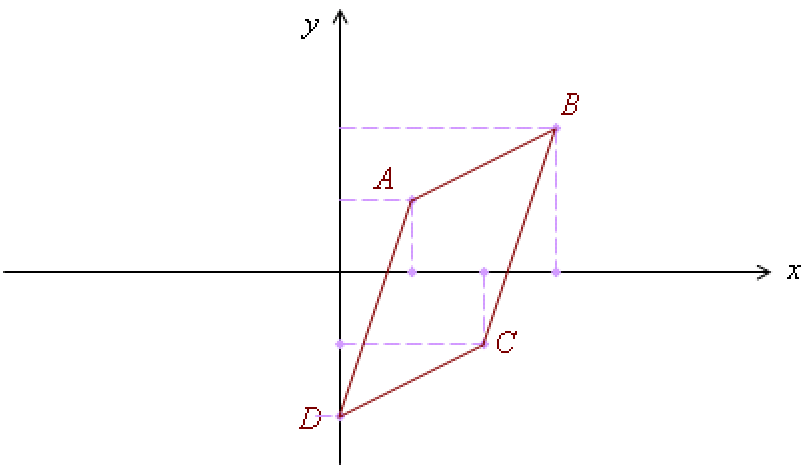
تطبيقـــات :

1- أنشئ النقط A ، B ، C و D التي ألحاقها على التوالي : $z_A = 1+i$ ، $z_B = 3+2i$

$z_C = 2-i$ ،

و $z_D = -2i$.

تحقق أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



لدينا :
$$aff\left(\overrightarrow{DC}\right) = z_C - z_D$$
$$= 2-i + 2i$$

و :
$$aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$$
$$= 3+2i - 1-i$$

إذن :
$$aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = aff\left(\overrightarrow{DC}\right)$$

R

إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

-2 لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها على التوالي هــي : **1** ، z و $iz+1$.

حدد E مجموعة النقط $B(z)$ من المستوى بحيث تكون النقط A ، B و C مستقيمية .

الجــواب :

الحالة ① $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow z = 1$$

إذن : $A \in E$

الحالة ② $A = C$

لدينا : $iz + 1 = 1$

$i z = 0$

إذن : $z = 0$

إذن : $O \in E$

الحالة ③ $B = C$

لدينا : $z = iz + 1$

إذن : $(1-i)\, z = 1$

إذن : $z = \dfrac{1}{1 - i}$

إذن : $z = \dfrac{1 + i}{2}$

ومنه : $B\left(\dfrac{1}{2} , \dfrac{1}{2}\right) \in E$

الحالة ④

النقط A ، B و C مختلفة مثنى مثنى.

لدينا : A ، B و C مستقيمية.

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - 1}{i z} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i z - i}{- z} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i - i z}{z} \in \mathbb{R}$$

نضع : $z = x + i y$

$$\Leftrightarrow \frac{i - i\,(x + iy)}{x + i y} \in \mathbb{R}$$

R

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y+i(1-x)}{x+iy} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y+i(1-x))(x-iy)}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(xy+(1-x)y)+i(x-x^2-y^2)}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$$

إذن : $x - x^2 - y^2 = 0$

$$x^2 - 2\frac{1}{2}x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

إذن : $E = \ell\left(\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right) ; \frac{1}{2}\right)$

النقط المتداورة

خاصية

في المستوى العقدي نعتبر النقط D,C,B,A التي ألحاقها على التوالي هي d,c,b,a

تكون النقط D,C,B,A متداورة اذا وفقط اذا كان $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{b-c}{d-c} \in \mathbb{R}$

ملاحظة و تذكير

اذا كانت ℓ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و D نقطة من المستوى العقدي فان

$$M \in \ell \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) \text{ أو } \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = \pi$$

مثال

أثبت أن النقط D,C,B,A التي ألحاقها على التوالي a = -2 و b=2 و c = -1+i و d=1-3i متداورة

III- مرافـق عـدد عقـــدي :

1- تعريـف :

مرافق العدد العقدي $z = a+ib$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$M \in \ell \Leftrightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$

هو العدد العقدي الذي يرمز له بـ $\overline{z}$ والمعرف بـ $\overline{z} = a - ib$

أي : $\overline{a+ib} = a - ib$

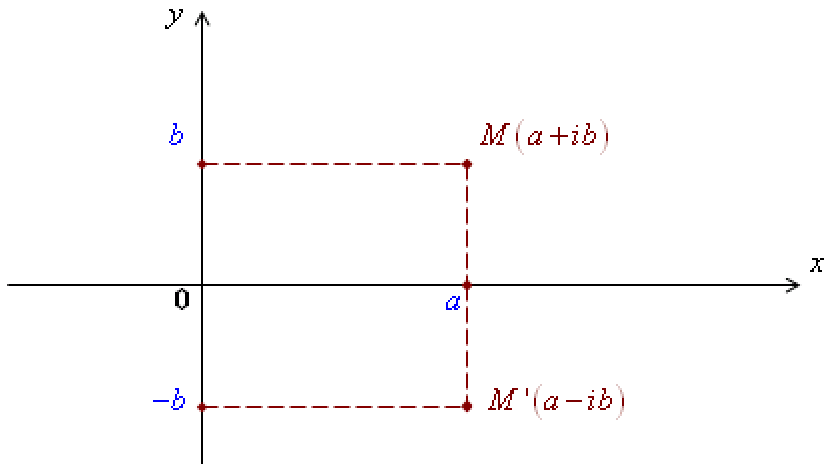
ملاحظـات :

1) لكل z من $\mathbb{C}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

2) إذا كانت $z = a+ib$

فإن : $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$

3) النقطتان $M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلتان بالنسبة لمحور الأفاصيل.



خاصيـــات :

1- إذا كانت $z = a + ib$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

فإن :

$$z + \overline{z} = 2a$$
$$z - \overline{z} = 2ib$$

استنتـــاج :

$$\forall z \in \mathbb{C}$$
$$z + \overline{z} = 2\,\Re e(z)$$
$$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

2- ليكن z عددا عقديا.

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow$ z تخيلي صرف

3- ليكن z_1 و z_2 عددان عقديان.

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad / \quad z_2 \neq 0$
- لكل z من $\mathbb{C}$ ولكل α من $\mathbb{R}$.

$$\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$$

4- لكل z من $\mathbb{C}$ ولكل n من $\mathbb{N}$.

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

5- $\forall z_1, z_2, \ldots z_n \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots\ldots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots\ldots \overline{z_n}$$

$$\boxed{\overline{\underset{k=1}{\overset{n}{\pi}} z_k} = \underset{k=1}{\overset{n}{\pi}} \overline{z_k}}$$

تطبيـــق :

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلـــة :

$$(E_1) : \frac{z + 2i}{i\overline{z} - 1} = 3i$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ i\,\overline{z} - 1 \neq 0\}$$

$$i\,\overline{z} - 1 \neq 0 \iff \overline{z} \neq \frac{1}{i}$$

$$\iff \overline{z} \neq -i$$

$$\iff z \neq i$$

إذن : $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq i\}$

لدينا : $\forall\, z \in \mathbb{C}$

$$(E_1) \iff z + 2i = (i\,\overline{z} - 1)\,3i$$

$$\iff z + 2i = -3\overline{z} - 3i$$

$$\iff z + 3\overline{z} - 5i = 0$$

نضع : $z = x + iy$

إذن : $(E_1) \iff (x + iy) + 3(x - iy) + 5i = 0$

$$\iff (x + 3x) + i(y - 3y + 5) = 0$$

$$\iff 4x + i(5 - 2y) = 0$$

$$\iff 4x = 5 - 2y = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ و } y = \frac{5}{2}$$

ومنه : $z = \frac{5}{2}i$

وعليه : $S = \left\{\frac{5}{2}i\right\}$

-2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلـة : $(E_2) : z^2 + 4\overline{z} - 5 = 0$

نضع : $z = x + iy$

لدينا : $(E_2) \iff (x + iy)^2 + 4(x - iy) - 5 = 0$

$$\iff x^2 + 2ixy - y^2 + 4x - 4iy - 5 = 0$$

$$\iff (x^2 - y^2 + 4x - 5) + i(2xy - 4y) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 5 = 0 \\ 2y(x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \text{ أو } x = 2 \end{cases}$$

- إذا كانت : $y = 0$

فإن : $x^2 + 4x - 5 = 0$

إذن : $\Delta = 6^2 \Rightarrow x_1 = -5$ و $x_2 = 1$

ومنه : $S_1 = \{-5 ; 1\}$

- إذا كانت : $x = 2$

فإن : $4 - y^2 + 4\times 2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4 - y^2 + 8 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -y^2 = -7$

$\Leftrightarrow y^2 = 7$

$y = \sqrt{7}$ أو $y = -\sqrt{7}$

ومنه : $S_2 = \{2 - i\sqrt{7} \; ; \; 2 + i\sqrt{7}\}$

وبالتالي : $S = \{-5 \; ; \; 1 \; ; \; 2 - i\sqrt{7} \; ; \; 2 + i\sqrt{7}\}$

IV- معيــار عــدد عقــدي Module d'un nombre complexe

ليكن z عددا عقديا حيث :

$$z = a + ib \quad / \quad (a , b) \in \mathbb{R}^2$$

لدينا : $\overline{z} = a - i\,b$

إذن : $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$

إذن : $\forall z \in \mathbb{C} \; ; \; z\,\overline{z} \geq 0$

1- تعريــف :

العدد الحقيقي $\sqrt{z\,\overline{z}}$ يسمى **معيــار العدد العقدي** z .

ونرمز له بــ $|z|$.

$$z = a + ib \quad / \quad (a , b) \in \mathbb{R}^2$$

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أمثـــال :

$$|2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$|2 - 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

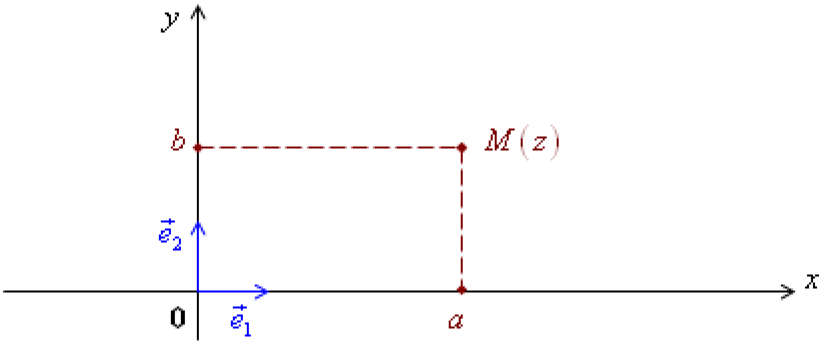
ملاحظـة :

$$\forall z \in \mathbb{C} \; ; \quad |z| = |-z| = |\overline{z}|$$

2- التمثيل الهندسي لمعيــار عدد عقــدي :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

لتكن $M(a,b)$ صورة العدد العقدي $z = a + ib$.



لدينا : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ولدينا : $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

إذن : $|z| = OM$

خاصيــة :

ليكن z عددا عقديا صورته M وصورته المتجهية $\vec{u}$.

لدينا : $|z| = OM = \|\vec{u}\|$

3- مسافة نقطتين في المستـوى العقـدي :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما z_A و z_B على التوالي .

لدينا : $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$

إذن : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

خاصيــة :

> لتكن A و B نقطتان لحقاهما z_A و z_B .
>
> $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

تطبيقــات :

A و B نقطتان حيث : $z_A = 1 + i$ و $z_B = -3 + 2i$

أحسب المسافة : AB

لدينا : $AB = |z_B - z_A|$

$= |-3+2i - 1-i|$

$= |-4 + i| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

R

4- خاصيــات :

1- $\forall z \in \mathbb{C} \;;\quad \lvert z\rvert = 0 \iff z = 0$
2- لكل z من $\mathbb{C}$: $\Re e(z) \le \lvert z\rvert$ $\operatorname{Im}(z) \le \lvert z\rvert$
3- لكل z_1 و z_2 من $\mathbb{C}$: $\lvert z_1 + z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
4- لكل z_1 و z_2 من $\mathbb{C}$: $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$
5- لكل z من $\mathbb{C}$ ولكل n من $\mathbb{N}^*$: $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
6- لكل z_1 من $\mathbb{C}$ ولكل z_2 من $\mathbb{C}^*$: $\left\lvert \frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$
7- لكل z من $\mathbb{C}^*$: $\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$

تطبيــق :

حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي لحقها z يحقق ما يلي :

1- $\lvert z\rvert = \lvert z - i\rvert$

2- $\lvert z\rvert = 2\,\lvert z - i\rvert$

الجــواب :

ط1 : 1- لتكن A النقطة ذات اللحق i .

إذن : $\lvert z\rvert = \lvert z - i\rvert \iff OM = AM$

إذن : مجموعة النقط M هــي واسط القطعــة $[OA]$.

ط2 : نضع : $z = x + iy$

إذن :
$$\lvert z\rvert = \lvert z - i\rvert \iff \lvert x + i\,y\rvert^2 = \lvert x + i\,(y-1)\rvert^2$$
$$\iff x^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$\iff y^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$\iff 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

-2 لدينا : $\quad |z| = 2\,|z - i|$

نضع : $\quad z = x + iy$

إذن : $$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{\left(x^2 + (y-1)^2\right)}$$

$$x^2 + y^2 = 4\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

إذن : $$4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 - x^2 - y^2 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{4}{3}y + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} + \frac{4}{3} = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

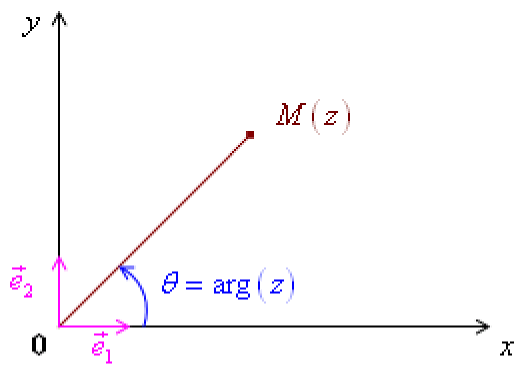
وبالتالي مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(0\,,\,\frac{4}{3}\right)$ وشعاعها $r = \frac{2}{3}$.

V- عمـدة عدد عقـدي غير منعــدم.

L'argument d'un nombre complexe non nul.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

لتكن M نقطة لحقها z.



1- تعريـف :

لتكن M صورة العدد العقدي غير المنعدم z.

عمـدة العدد العقدي z هو كل قياس الزاوية الموجهة $\left(\vec{e}_1,\widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$، ونرمز لـه بـ $\arg(z)$.

ملاحظـة :

-1 إذا كان θ هو عمدة العقدي z ، فإن كل عدد يكتب على شكل $\theta + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}$ هو أيضا عمدة العدد العقدي z.

ونكتب : $\arg(z) = \theta + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

أو : $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$

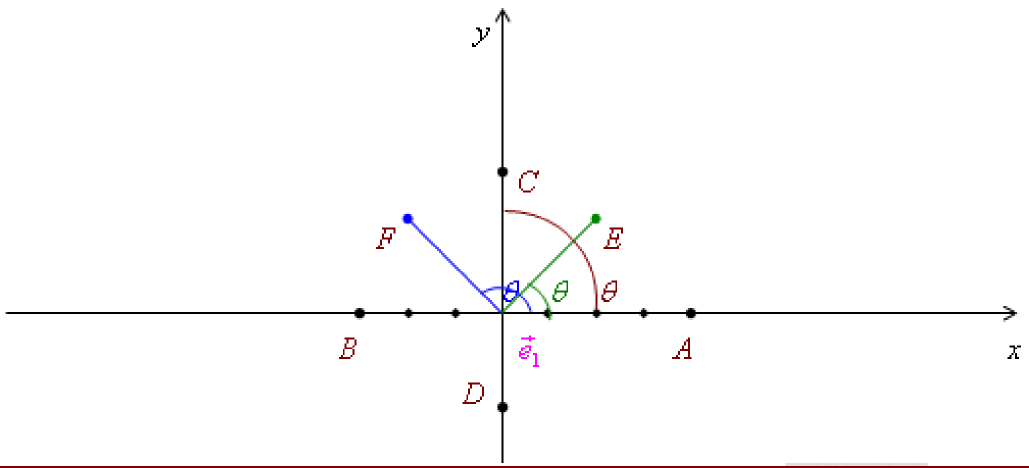
-2 العدد 0 لا عمدة لــه.

أمثـلـة :

أنشئ النقط التي ألحاقها :

$z_A = 4$ ، $z_B = -3$ ، $z_C = 3\,i$ ، $z_D = -2\,i$ ، $z_E = 2 + 2\,i$

و $z_F = -2 + 2\,i$



استنتـــاج :

- $Arg\ (z_A) = 0\ [2\pi]$

- $Arg\ (z_B) = \pi\ [2\pi]$

- $Arg\ (z_C) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

- $Arg\ (z_D) = \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

- $Arg\ (z_E) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- $Arg\ (z_F) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

-2 الشكـل المثلثي لعدد عقدي غير منعـدم.

تمهيـد :

لدينا :

$$\begin{aligned} z_E &= 2 + 2\,i \\ &= \sqrt{8} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

هذه الكتابة تسمـى الشكـل المثلثـي للعدد العقدي $z_E = 2 + 2\,i$.

تعريف وخاصية :

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $z = |z|\ (\cos\theta + \sin\theta)$

حيث : $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$

وتسمى هذه الكتابة بـالشكل المثلثي للعدد العقدي z.

ونكتب كذلك : $z = [r\ ,\ \theta]$

حيث : $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$ و $r = |z|$

مثال :

$$z = \left[3\ ,\ \frac{-\pi}{6}\right] = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\ \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\ \frac{\pi}{6} - i\ \sin\ \frac{\pi}{6}\right)$$

لدينا :

$$\overline{z} = 3\left(\cos\ \frac{\pi}{6} + i\ \sin\ \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left[3\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]$$

ليكن z عددا عقديا معياره يساوي **1** .

حيث : $z = [1\ ,\ \theta] = \cos\theta + i\ \sin\theta$

$$\overline{z} = \cos\theta - i\ \sin\theta$$

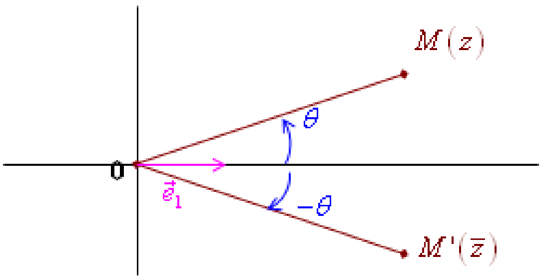
$$= \cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta)$$

$$= [1\ ,\ -\theta]$$

استنتاج :

لكل z من $\mathbb{C}^*$.

$$\arg\ \overline{z} = -\arg(z)\ [2\pi]$$



3- تحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z = a + i\ b \quad \leftrightarrow \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

لدينا : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إذن : $z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

ليكن θ من $]-\pi\ ,\ \pi]$.

R

حيث : $$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

حيث : $$r = |z|$$

$$\theta \equiv \arg z\ [2\pi]$$

تطبيـق :

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

-1 $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

لدينا : $$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

إذن : $$z = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \left[2\,,\ \frac{\pi}{3}\right]$$

-2 $z_2 = \sqrt{3} - i$

$$z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \left[2\ ;\ \frac{-\pi}{6}\right]$$

-3 $z_3 = 2 + 2i$

لدينا : $$|z_3| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

إذن : $$z_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$$

-4 $z_4 = -\sqrt{3} - i$

R

$$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right) \quad = \left[2\ ,\ \frac{-5\pi}{6}\right]$$

خاصيـــات :

-1 $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad , \quad \arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$

نضع : $z = [1\ ,\ \theta]$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\theta + i\,\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - i\,\sin\theta}{1}$$

$$= \cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)$$

$$= [1\ ,\ -\theta]$$

إذن : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad , \quad \arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$

-2- لكل z_1 و z_2 من $\mathbb{C}^*$:

$$\arg z_1 \cdot z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2\ [2\pi]$$

برهـان :

نضع : $z_1 = [1\ ,\ \theta]$

$z_2 = [1\ ,\ \alpha]$

لدينا : $z_1 \cdot z_2 = (\cos\theta + i\,\sin\theta)\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$

$$= (\cos\theta\ \cos\alpha - \sin\theta\ \sin\alpha) + i\,(\cos\theta\,\sin\alpha + \sin\theta\ \cos\alpha)$$

$$= \cos(\theta+\alpha) + i\ \sin(\theta+\alpha)$$

$$= [1\ ,\ \theta+\alpha]$$

إذن : $\arg z_1 \cdot z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2\ [2\pi]$

3- لكل z_1 و z_2 من $\mathbb{C}^*$:

$$\arg\frac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2\ [2\pi]$$

برهـان :

لدينا : $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right)$

$$= \arg z_1 + \arg\frac{1}{z_2}\ [2\pi]$$

R

إذن : $$\arg \frac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \ [2\pi]$$

-4 لكل n من $\mathbb{N}$ ولكل z من $\mathbb{C}^*$

$$\arg z^n = n \arg(z) \ [2\pi]$$

برهـان :

البرهـان بالترجع .

خلاصـة :

$$\frac{1}{[R\,,\,\theta]} = \left[\frac{1}{R}\,,\,-\theta\right]$$

$$[R\,,\,\theta]\cdot[r\,,\,\alpha] = [R\times r\,;\,\theta+\alpha]$$

$$\frac{[R\,,\,\theta]}{[r\,,\,\alpha]} = \left[\frac{R}{r}\,;\,\theta-\alpha\right]$$

$$[R\,,\,\theta]^n = [R^n\,;\,n\,\alpha]$$

تطبيـــق :

أكتب على الشكل المثلثي وعلى الشكل الجبري العدد : $Z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

ثم استنتج قيمتي $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

الجـــواب :

لدينا : $$Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\left[\sqrt{2}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2\,,\,\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{-\pi}{12}\right]$$

$$Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

إذن : $$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

أي : $$\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

إذن : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

-4 زاوية متجهتين وعمدة عدد عقدي :

-1 عمدة لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي P لحقاهما z_A و z_B على التوالي .

R

ولتكن M نقطة من المستوى حيث : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

$$\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right)$$

إذن : $\boxed{\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg z_B - z_A \; [2\pi]}$

حالة خاصة :

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OA}\right) &\equiv \arg z_A \; [2\pi] \\ \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right) &\equiv \arg z_M \; [2\pi] \end{aligned}}$$

2- زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها z_A ، z_B ، z_C على التوالي .

لدينا :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \vec{e}_1\right) + \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\arg\left(z_B - z_A\right) + \arg\left(z_C - z_A\right) \\ &= \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \end{aligned}$$

خاصية :

لتكن A ، B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوى العقدي ، ألحاقها z_A ، z_B ، z_C على التوالي .

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \; [2\pi]$$

استنتاج :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \; [2\pi]}$$

تمرين 7 لدينا : $a = 2 - 2i$ ، $b = -4 - 2i$

$c = +4 + 2i$ ، $e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

إذن :

$$\frac{c - e}{a - e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{7 - i}{3 - 9i}$$

$$= \frac{(7 - i)(3 + 9i)}{9 + 81}$$

$$= \frac{21 + 9 + i(63 - 3)}{90}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} i$$

ولدينا :

$$\frac{a - e}{b - e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} i}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2} i}{\frac{-9}{2} - \frac{9}{2} i}$$

$$= \frac{3 - 9i}{-9 - 9i} = \frac{1 - 3i}{-3 - 3i}$$

$$= \frac{-1 + 3i}{3 + 3i}$$

$$= \frac{(-1 + 3i)(3 - 3i)}{18}$$

$$= \frac{-3 + 3i + 9i + 9}{18} = \frac{6 + 12i}{18}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} i$$

إذن :

$$\frac{c - e}{a - e} = \frac{a - e}{b - e}$$

إذن :

$$\left(\overrightarrow{EA} ; \overrightarrow{EC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{EB} ; \overrightarrow{EA}\right) [2\pi]$$

ملاحظـة مهمـة :

إذا كانت z_A ، z_B ، z_C ألحاق النقط A ، B و C على التوالي ،

فإن : • المثلث ABC متســاوي الساقيــن وقائـم الـزاويـــة $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 , \frac{\pm\pi}{2}\right]$

• المثلث ABC متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 , \frac{\pm\pi}{3}\right]$

R

التمثيل العقدي للإزاحة

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م م

نعتبر الازاحة t ذات المنجهة $\vec{u}(z_0)$

لدينا $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

اذن $aff\,\overrightarrow{MM'} = aff\,\vec{u}$

ومنه $z' - z = z_0$

خاصية

التمثيل العقدي للازاحة ذات المتجهة $z_0 \in \mathbb{C} / \vec{u}_{(z_0)}$

هو $z' = z + z_0$

التمثيل العقدي للتحاكي

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م م

نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(z_0)$ ونسبته k

لدينا $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

اذن $aff\,\overrightarrow{\Omega M'} = k.aff\,\overrightarrow{\Omega M}$

ومنه $z' - z_0 = k(z - z_0)$

خاصية

التمثيل العقدي للتحاكي الذي مركزه $\Omega(z_0)$ ونسبته k

هو $z' - z_0 = k(z - z_0)$

تمارين

تمرين1:

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين:

$$(z+2-4i)(5+i)=5+7i$$

$$2z-\overline{z}=4-5i$$

2- حل في $\mathbb{C}^2$ النظمة التالية:

$$\begin{cases}3z+z'=2-5i\\ z-z'=-2+i\end{cases}$$

3 – حدد الشكل الجبري للأعداد التالية:

$$\frac{1}{3-4i},\ \frac{3-2i}{2+i},\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{27}$$

4- برهن أن: $z=(1+i)^n+(1-i)^n$ عدد حقيقي و ذلك لكل n من $\mathbb{N}$.

تمرين2:

نضع $\quad \forall z\in\mathbb{C}-\{-1+i\}: f(z)=\dfrac{2z-i}{z+1-i}$

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ نعتبر النقط $A(-1+i)$ و $B\left(\frac{1}{2}i\right)$ و $M(z)$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\overline{f(z)}=i$

2) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $|f(z)|=2$

3) نضع $z=x+iy$ بحيث : $(x.y)\in\mathbb{R}^2$

أ) برهن أن:

$$f(z)=\frac{2x^2+2y^2+2x-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\,\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

ب) حدد في المستوى مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $f(z)$ عدد حقيقي

ج) حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $f(z)\in i\mathbb{R}$

تمرين3:

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة:

1- $|z-1+i|=3$

2- $|z-2|=|z+2i|$

3- $|z-1-2i|\le 2$

4- $z+\overline{z}+z\overline{z}=0$

تمرين4:

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية:

$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$3+i\sqrt{3}$ ، $1-i\sqrt{3}$ ، $(1-i\sqrt{3})^{24}$ ، $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$

$$z=a\frac{(1+itg\theta)^2}{1+tg^2\theta},a\succ 0\quad et\quad \theta\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$z=\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta},\quad \pi\prec\theta\prec 2\pi$$

$$z=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sin\theta+i\cos\theta)}{(2-2i)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$z=1+t+t^2\ /\ Arg(t)\equiv\alpha[2\pi]\ et\ |t|=1$$

تمرين5:

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط: A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $\sqrt{2}(1+i)$ و $\sqrt{2}(-1+i)$ و $2i\sqrt{2}$.

1- تأكد أن: $AC=BC$

2-حدد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

3- استنتج طبيعة المثلث: ABC

4- أوجد لحق النقطة D لكي يكون الرباعي $ADBC$ مربعا.

تمرين6:

نعتبر العددين : $u=2-2i$ و $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

1- حدد الشكل المتلثي ل u و v.

2- حدد الكتابة الجبرية والمثلثية للعقدي: $\frac{u}{v}$.

3-استنتج قيم $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$.

تمرين7:

نضع $z_1=2i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$ و $z_3=\sqrt{2}(1+i)$

1- حدد الشكل المثلثي ل z_1 و z_2

2- تحقق أن: $z_1^{12}=z_2^{12}$

3-حدد الشكل المثلثي و الجبري للعدد: $\frac{z_3}{z_2}$.

4- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

5- لتكن A و B و C صور z_1 و z_2 و z_3 على التوالي:

أ) بين أن o هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

ب) حدد قياسا للزاوية : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$

تمرين8:

لتكن a و b و c 3 أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى و A و B و C صورها على التوالي في المستوى العقدي

1- برهن أن: ABC قائم الزاوية في $A \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0$

2- برهن أن: ABC متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$.

الـــــدوال الأسيـــــة
Fonctions exponentielles

I- الدالــة الأسيـــة النبـريـــة :

تمهيـد :

نعلم أن دالة اللوغاريتم النبري $\ln$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

إذن الدالة $\ln$ تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

إذن : تقبل دالة عكسية معرفة من $\mathbb{R}$ نحـو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريـف :

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبري هي الدالة الأسيـة النبريـة والتي نرمز لها بـ $\exp$.

استنتـاج :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \;;\; \forall y\in\mathbb{R}$$
$$\ln x = y \Leftrightarrow x = \exp y$$

ملاحظة :

$$\forall x\in\mathbb{R} \;;\; \exp(x) = e^x$$

خاصيـات :

-1
$$\exp(1) = e^1 = e$$
$$\exp(0) = e^0 = 1$$

-2
- $\forall x\in\mathbb{R} \;;\; e^x \succ 0$
- $\forall x\in\mathbb{R} \;;\; \ln e^x = x$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \;;\; e^{\ln x} = x$

-3 الدالة $\exp$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;;\; e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

-4
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;;\; e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

R

5- نهايــات مهمــة :

-a
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

برهــان :

نضع : $X = e^x$

إذن : $\ln X = x$ $\quad (x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

-b
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0}$$

برهــان :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$

نضع : $X = -x$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim_{X\to+\infty} \frac{-X}{e^X}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{-1}{\frac{e^X}{X}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

-c
$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$$

برهــان :

نضع : $e^x = X$

إذن : $(x \to 0) \Leftrightarrow (X \to 1)$

ومنه : $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{X\to1} \frac{X-1}{\ln X}$

$$= \lim_{X\to1} \frac{1}{\frac{\ln X}{X-1}} = 1$$

-d
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0}$$

-e
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

R

برهــان :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{2 \times \frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

نضع : $X = \frac{x}{2}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^X}{X}\right)^2$$

$$= +\infty$$

$$x \geq 2 \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\ \frac{x}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

نضع : $X = \frac{x}{n}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n$$

$$= +\infty$$

تطبيــق :

أحســب :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2-x} \cdot \frac{x^2-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2-x} \cdot (x-1)$$

$$= 1 \cdot (0-1) = -1$$

لأن : $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} = \lim_{X\to0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

(وضعنا : $X = x^2 - x$)

6- مشتقة الدالة الأسية النبرية :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \quad Log\ e^{x} = x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \quad \left(Log\ e^{x}\right)' = 1$

أي : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \quad Log'\left(e^{x}\right) \times \left(e^{x}\right)' = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \quad \frac{\left(e^{x}\right)'}{e^{x}} = 1$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \quad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

تعميم :

لتكن f دالة عددية معرفة بـ : $f(x) = e^{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

فإن : f قابلة للاشتقاق على المجال I.

$$\forall x \in I \ ; \quad f(x)' = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

تطبيق :

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

-1 $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x + 1}$

$$f'(x) = \frac{e^{x}(x-1) - \left(e^{x}-1\right)}{(x+1)^{2}}$$
$$= \frac{x\,e^{x} + 1}{(x+1)^{2}}$$

-2 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}}\right)'$$
$$= \left(\sqrt{x}\right)' \times e^{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

-3 $f(x) = x\,e^{\left(x^{2}-1\right)}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\left(x^{2}-1\right)} + x\,(2x)\,e^{\left(x^{2}-1\right)}$$
$$= \left(1 + 2x^{2}\right) e^{\left(x^{2}-1\right)}$$

تمارين تطبيقية :

أحسب النهايات :

1-

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نضع : $X = 2x$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{X}{e^{X}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

2-

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{X\to0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1$$

3-

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+1}{e^{x}+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+3e^{-x}} = 1$$

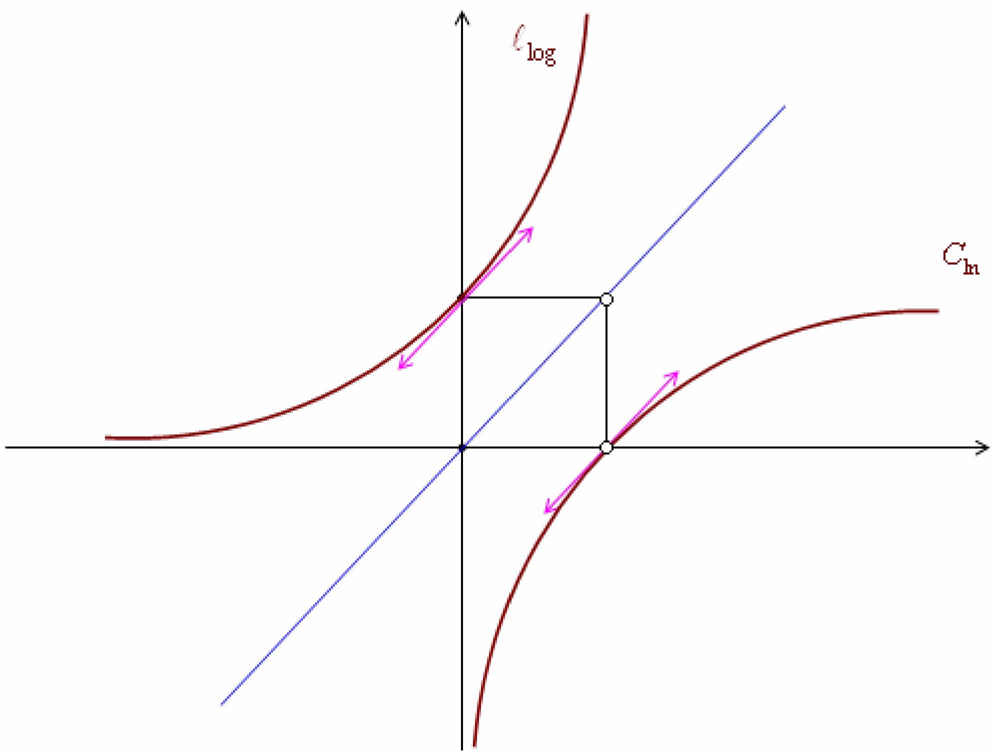
7- **التقعـــر :**

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad \left(e^{x}\right)'' = \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

وبما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad e^{x} \succ 0$

فإن : ℓ المنحنى الممثل للدالة الأسيـة النبريـــة (محدب).



R

تطبيـــق 4 :

$$f(x) = (x-1)\cdot e^{x}$$

- مجموعة التعريف :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ,\ +\infty[$$

- النهـايـــات :

• $$\lim_{x\to+\infty} (x-1)\cdot e^{x} = +\infty$$

• $$\lim_{x\to-\infty} (x-1)\cdot e^{x} = -1\cdot 0 \qquad (F.I)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$$

- التغيـــرات :

لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-1)\cdot e^{x}$$

إذن :

$$f'(x) = 1\cdot e^{x} + (x-1)\,e^{x}$$

$$= x\,e^{x}$$

- جـدول التغيــرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

- الفـروع اللانهـائيـــة :

لدينا :

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

نحسب :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x-1}{x}\cdot e^{x}$$

$$= 1\times(+\infty) = +\infty$$

إذن : $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

- التقعـــر ونقـط الانـعطـاف :

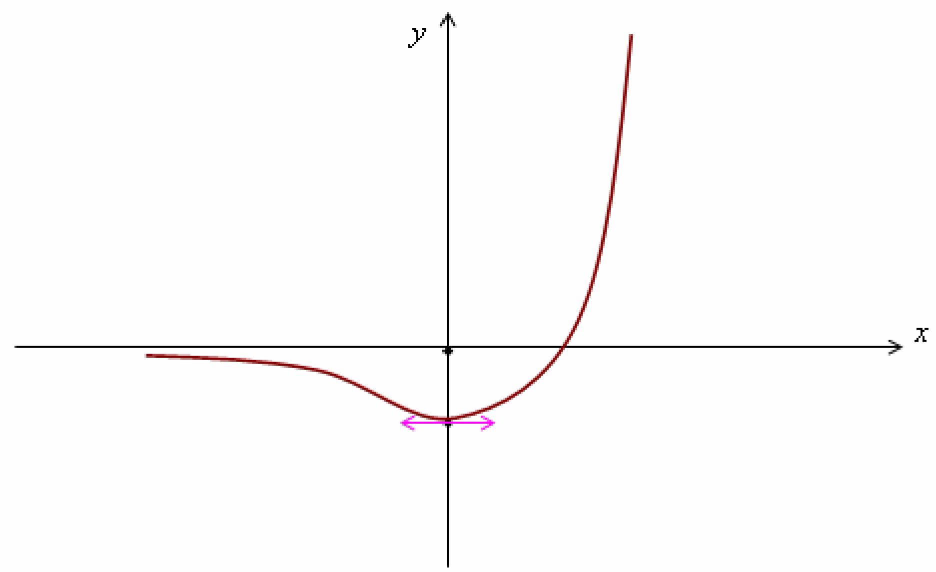
لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ; \qquad f'(x) = x\,e^{x}$$

$$f''(x) = 1\,e^{x} + x\,e^{x}$$

$$= (1+x)\cdot e^{x}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
التقعــر			$\frac{-2}{e}$		



تطبيــق 5 :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

- **مجموعة التعريف :**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ e^x \neq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

- **النهـايـــات :**

- $$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$
- $$\lim_{-\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$
- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
- $$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- **التغيــرات :**

لدينا :

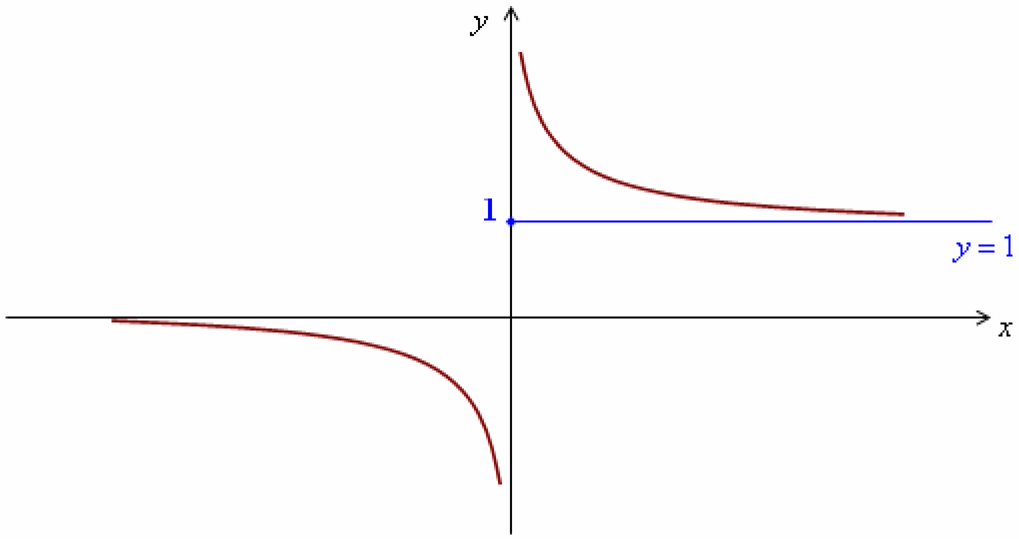
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \qquad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (e^x - 1)' - e^x (e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}} \prec 0$$

• جـدول التغيـــرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$		1



الـدالـة الأسيــة للأســـاس a

تـمـهـيـد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : هي تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريـف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى الدالة الأسية للأساس a، ونرمز لها بـ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتـاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp_a(y)$$

ملاحظـة :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exp_a(x) = a^x$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 1^x = 1$

4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x \succ 0$

دراسـة الـدالــة $f\left(x \mapsto a^x\right)$

1- مجموعـة التعريـف :

$$D = \mathbb{R} = \left]-\infty \,,\, +\infty\right[$$

2- النهـايــات :

- **الحـالة 1 :** $a \succ 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x \ln a} = 0$$

- **الحـالة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{+\infty} a^x = 0$$
$$\lim_{-\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيــرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$

R

ومنه إشارة $(a^x)'$ هي إشارة $\ln a$.

ملاحظة :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad (a^x)'' = (\ln a \cdot a^x)'$

$$= \ln^2 a \cdot a^x \succ 0$$

- **الحالة 1 :** $a \succ 1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- **الحالة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(a^x)'$	$-$
a^x	$+\infty \searrow 0$

تطبيقات :

أحسب النهايات التالية :

(1
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

نضع : $X = \dfrac{1}{x}$

$$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to 0)$$

إذن : $\lim_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e^1 = e$

(2
$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^1 = e$$

(3
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

حدد مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

R

(1 $\quad f(x) = 4^x$

$$f(x) = e^{x \ln 4}$$

إذن :
$$f'(x) = (\ln 4) \cdot e^{x \ln 4} = (\ln 4) \cdot 4^x$$

(2 $\quad f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

$$f(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{x}$$

إذن :
$$f'(x) = \frac{(\ln 2) \times 2^x \times x - 2^x}{x^2} = \frac{(x \ln 2 - 1)\, 2^x}{x^2}$$

(3 $\quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

إذن :
$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$

(4 $\quad f(x) = 3^{1-x}$

لدينا :
$$f(x) = e^{(1-x) \ln 3}$$

إذن :
$$f'(x) = \big((1-x) \cdot \ln 3\big)' \cdot 3^{1-x} = -\ln 3 \cdot 3^{1-x}$$

(5 $\quad f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

لدينا :
$$f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

إذن :
$$f'(x) = \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}}\right) \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}\right) \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

R

تمارين حول الدوال الأسية

تمرين1

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$ $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

تمرين2

أدرس و مثل مبيانيا الدالة f حيث $\begin{cases} f(x)=x^{2x} \\ f(0)=1 \end{cases}$

تمرين3

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$e^{x^2-3x-3}=e \quad ; \quad e^{4x-3}=2$$

$$3e^{3x}-2e^{2x}-e^x=0$$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات $3^{2x}-3^x-6\succ 0$ $\quad 2e^{2x}-3e^x+1\prec 0 \quad ; \quad e^x-2e^{-x}+1\succ 0$

3- حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2^x=3^y \end{cases}$

تمرين4

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}x^2e^x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x^3}$ $\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-3e^x+2}$

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}^x-1}{x-1}$$

تمرين5

I- نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي $f(x)=2e^{2x}-3e^x+1$

1-أ- حدد D_f ونهايات f عند محدات D_f

ب- أدرس تغيرات f

2- أ- حدد نقطة تقاطع C_f و محور الأفاصيل

ب- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول 0

ج- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

د- أنشئ C_f

II- نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x)=\ln\left(2e^{2x}-3e^x+1\right)$

1- أ- حدد D_g و نهايات g عند محدات D_g

ب- أدرس تغيرات g

2- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g ثم أنشئ C_g

تمرين6

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=|2x(1-\ln x)| & x\succ 0 \\ f(x)=e^x-1-2\sqrt{1-e^x} & x\le 0 \end{cases}$$

R

1- أدرس اشتقاق و اتصال f عند النقطتين 0 و e
و أعط التأويل الهندسي للنتائج المحصل عليها
2- أحسب نهايات f عند محدات D_f ثم أدرس الفروع للانهائية لـ C_f
3- أدرس تغيرات f و أنشئ C_f $\quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$
4- بين أن g قصور الدالة f على $]-\infty;0]$ تقابل من $]-\infty;0]$ نحو مجال J يجيب تحديده
أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين7

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 2x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

1- حدد D_f و نهايات f عند محدات D_f
2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها
3- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى f
4- بين أن $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f
5- أنشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م
6- لتكن $m \in \mathbb{R}$. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$

تمرين8

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $D = [0;1[\cup]1;+\infty[$ بحيث $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1} + \ln\left|x^2 - 1\right|$

1- أحسب نهايات f عند محدات D.
2- بين أن $f'(x) = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ لكل x من D و أعط جدول تغيرات f
3 - استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ لكل x من D

II- لتكن g الدالة المعرفة على D بـ $g(x) = x\ln\left|x^2-1\right|$

1- أ- أحسب نهايات g عند محدات D.
ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.
2- بين لكل x من D $g'(x) = f(x)$ و أعط جدول تغيرات g.
3- أ- استنتج من دراسة الدالة f إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى C_g
ب- حل في D المعادلة $g(x) = 0$
ج- أنشئ C_g

تمرين9

الجزء الأول

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين لكل x من $\mathbb{R}$ $f(x) = xe^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{4}{e^x} + \dfrac{4}{xe^x} - \dfrac{2}{xe^{2x}}\right)$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

R

2- أدرس تغيرات f

3- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

ب- بين أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة x_0 تنتمي إلى $[-2;-1]$

$$\left(e^4 \simeq \frac{225}{4}; \quad e^2 \simeq \frac{15}{2}; \quad e \simeq \frac{11}{4}\right)$$

ج- أنشئ C_f $\quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

<u>الجزء الثاني</u>

لتكن g الدالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & x \succ 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1- بين أن $g(x) = f(\ln x)$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$

2- أدرس اتصال و اشتقاق g في يمين 0

3- أدرس تغيرات g

4- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g

ب- أستنتج من 2- ب- في الجزء الأول , تأطيرا لأفصول نقطة تقاطع C_g ومحور الأفاصيل

ج- حدد نصف المماس لـ C_g في النقطة ذات الأفصول 0 ثم أنشئ C_g

R

التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.

العدد الحقيقيF(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b

ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=........$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x\to\frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x\to\ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^2=\ln 2$

* أحسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$; $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

$$*\int_a^a f(x)dx=0 \qquad * \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

$$*\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I=\int_{-1}^1 |x|dx$

$$\int_{-1}^1 |x|dx=\int_{-1}^1 |x|dx=\int_{-1}^0 -xdx+\int_0^1 xdx=\left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

R

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\varphi(x)=F(x)-F(a)$ $\forall x\in I$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi'=f$ $\varphi(a)=0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.

الدالة المعرفة على I بما يلي $x\to\int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x\to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x\to\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad \ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$ $\forall x\in]0;+\infty[$

ج)- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

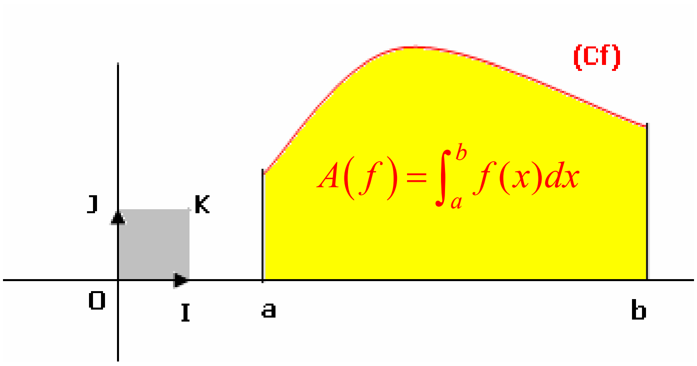
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b(\lambda f(x))dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2-3x+1)dx$; $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

أحسب $I+J$ $I-J$ و استنتج I ; J

د التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a\prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x=a$ و $x=b$ هي $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{x^2}$

R

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\| = 1cm \quad \|\vec{j}\| = 2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1 \quad ; \quad x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e = \frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1} = 2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل $-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx = \left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1 = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين 1- حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a وb وc حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2+1} \quad \forall x \neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+5}dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ $\left(\frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x \in [a;b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a;b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x \quad ; \quad v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x \quad ; \quad v'(x)=1$

R

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

تمرين

أحسب $I = \int_1^e \ln x dx$; $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

الحل

$$K = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = ...$$

تمرين 1- أحسب $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ $\int_0^3 (x-1)e^{2x} dx$ $\int_0^1 x\sqrt{x+3}dx$ $\int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|dx$

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب $I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt$ (يمكن اعتبار $J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt$)

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

a) لتكن f دالة متصلة على [a;b] و F دالة أصلية لـ f على [a;b]

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ $\forall x \in [a;b] \quad F'(x) = f(x)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان F تزايدية على $[a;b]$

وحيث أن $a \le b$ فان $F(a) \le F(b)$ اذن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت $f \le g$ على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

مثال

نؤ طر $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

لدينا $1 \le 1+x \le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \le \frac{x^2}{1+x} \le x^2$ $\forall x \in [0;1]$ ومنه $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le I \le \int_0^1 x^2 dx$

إذن $\frac{1}{6} \le I \le \frac{1}{3}$

c) خاصيات

R

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

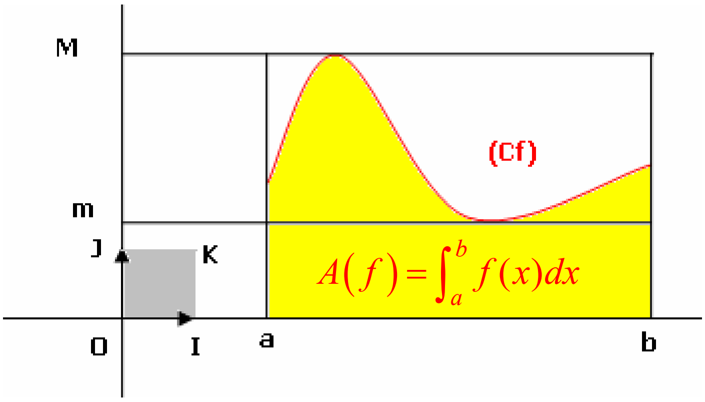
ب- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ج- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ و المستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ نبين أن $0 \le I \le \sqrt{2}$

الدالة $x \to \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0;+\infty[$ ومنه $\sup_{x\in[1;3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0 \le I \le (3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \prec b)$ و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

إذن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a;b]$

حيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \ne b)$

العدد الحقيقي $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$.

يوجد على الأقل c في $[a;b]$ حيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل

الذي بعداه $(b-a)$ و $f(c)$.

R

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

(a $f(x)=(x-1)e^{x}$ $I=[-1;0]$; (b $f(x)=\dfrac{x^{3}+5x^{2}+x+3}{x+1}$ $I=[0;1]$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\arctan x$

الجواب عن السؤال2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^{2}}$ $\forall x\in[0;1]$ و منه

$\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq 1$ $\forall x\in[0;1]$ اذن $\int_0^x \dfrac{1}{2}dt\leq\int_0^x f'(t)dt\leq\int_0^x dt$ $\forall x\in[0;1]$ $\dfrac{x}{2}\leq f(x)\leq x$

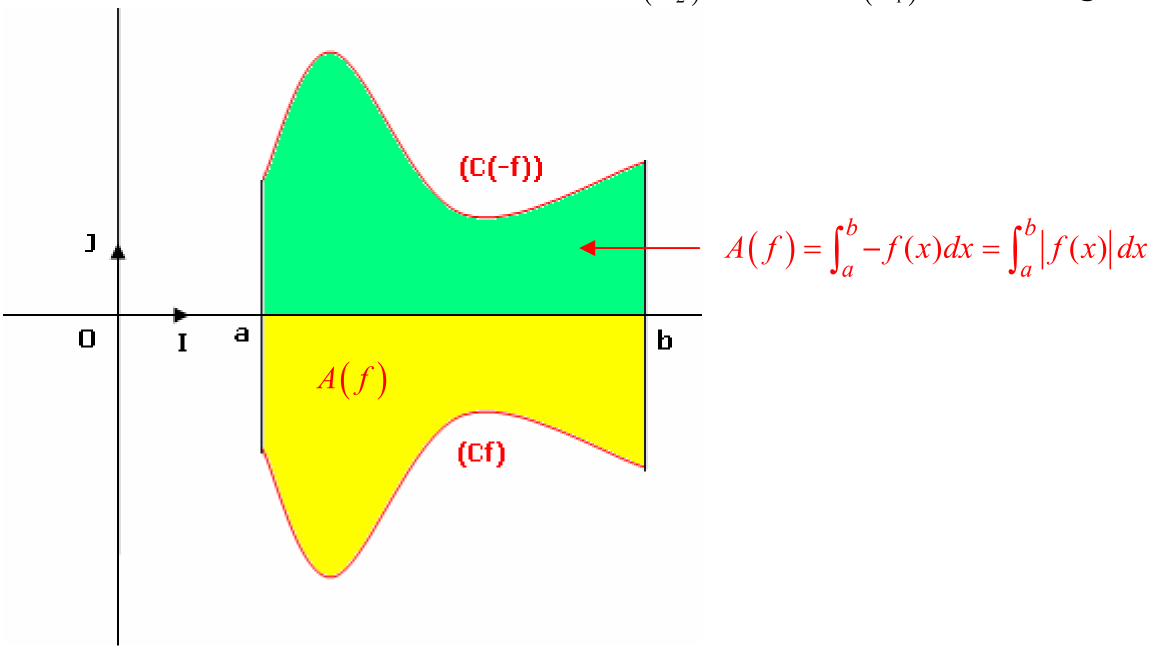
IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل

و المستقيمين $(\Delta_1):x=a$ $(\Delta_2):x=b$



*إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

*إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f)=\int_a^b -f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a;b]$ مثلا يوجد c من $[a;b]$ حيث f موجبة على $[a;c]$ و سالبة على $[c;b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a;b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a;c]$ و $\Delta(f)$ على $[c;b]$

$$A(f)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل

R

و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)|dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

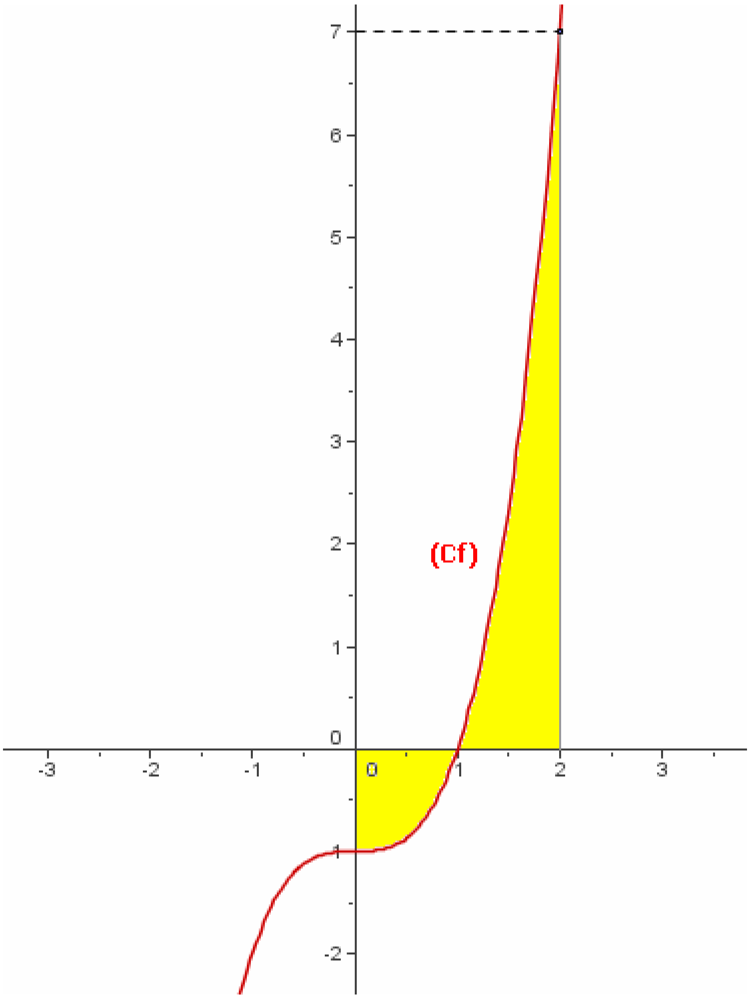
العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 1$

حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

$x = 2 \quad ; \quad x = 0$



$$A = \int_0^2 |f(x)|dx$$

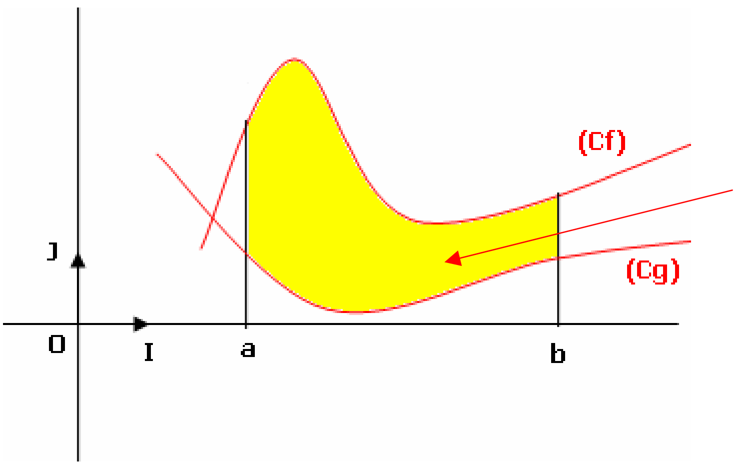
$$A = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - 1)dx$$

$$A = \frac{7}{2}u \qquad \left(u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\right)$$

2- مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$ في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$



$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

R

إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و بإتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

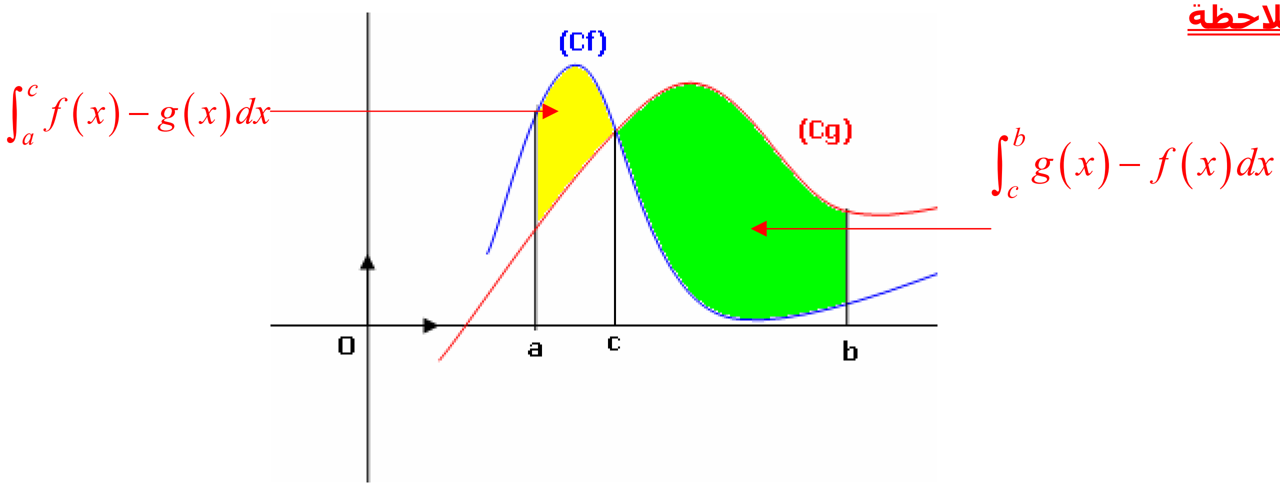
خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$

هي $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

V- حساب الحجوم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه $\|\vec{i}\|$

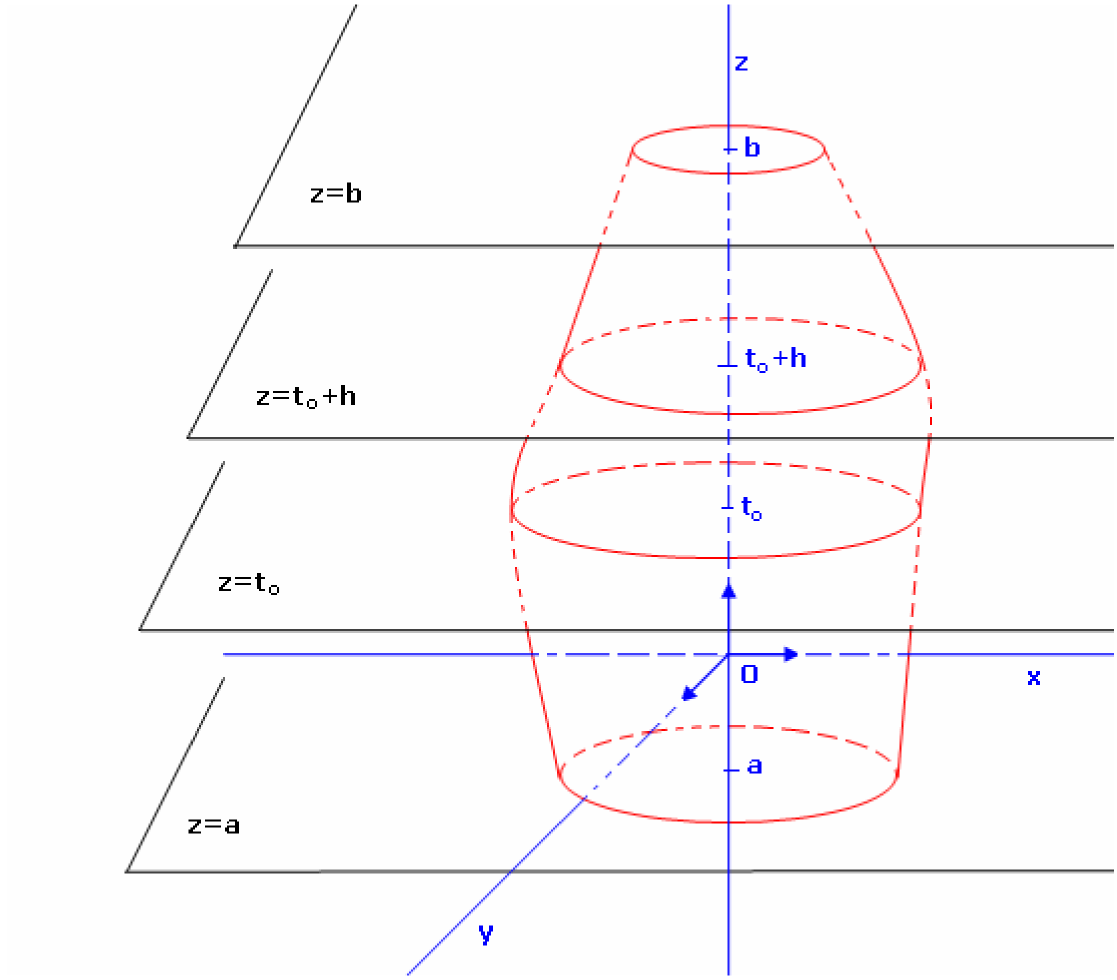
1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$

نرمز بـ$S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z = t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z = a$; $z = t$

ليكن t_0 من $[a;b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0 + h \in [a;b]$

R



حجم مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S المحصورة بين $z=t_0$ و $z=t_0+h$ هو $V(t_0+h)-V(t_0)$
ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0+h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0)\le S(t_0+h)$ فان $h\cdot S(t_0)\le V(t_0+h)-V(t_0)\le h\cdot S(t_0+h)$

و منه $S(t_0)\le \dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}\le S(t_0+h)$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t\to S(t)$ متصل على $[a;b]$ فان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=S(t_0)$

إذن الدالة $t\to V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ و $V'(t)=S(t)\quad \forall t\in[a;b]$

أي أن الدالة $t\to V(t)$ دالة أصلية للدالة $t\to S(t)$ على $[a;b]$

و بما أن $V(a)=0$ فان $V(t)=\int_a^t S(x)dx\quad \forall t\in[a;b]$

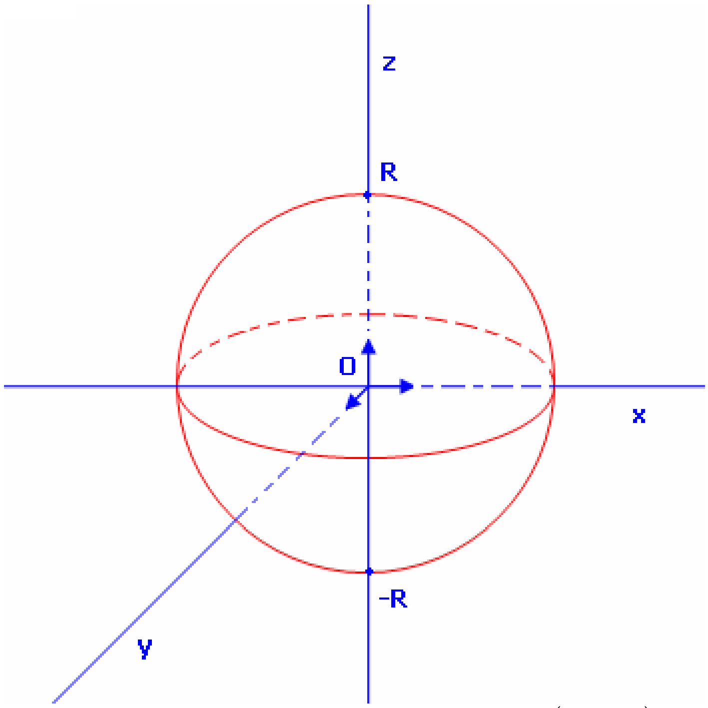
إذن حجم المجسم S هو $V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$ وحدة قياس الحجم .

<u>خاصية</u>

الفضاء منسوب إلى معلم م.م
ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$
نرمز بـ$S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$

إذا كان أن التطبيق $t\to S(t)$ متصلا على $[a;b]$ فان حجم المجسم S هـو $V=\int_a^b S(z)dz$ وحدة قياس الحجم.

R



تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O.

الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي

بالمعادلتين $z = R \quad ; \quad z = -R$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفلكة حيث $z = t$

$-R \leq t \leq R$ هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$

و مساحته $S(t) = \pi\left(R^2 - t^2\right)$

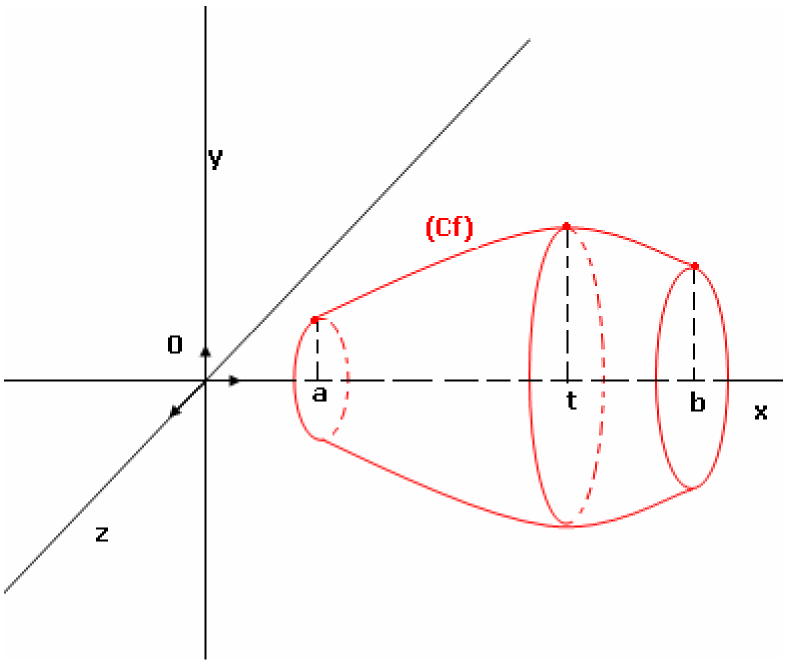
بما أن التطبيق $t \to \pi\left(R^2 - t^2\right)$ متصلة على $[-R;R]$

فان $V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - t^2\right)dt = \frac{4}{3}\pi R^3$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O;\vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$S(t) = \pi f^2(t)$

التطبيق $t \to \pi f^2(t)$ متصلة على $[a;b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a;b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

بوحدة قياس الحجم .

R

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{2}x\ln x$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1;e]$

R

تمارين و حلول

تمرين1

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

ب/ أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$

أحسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{t+2-t}{t(t+2)}=\frac{1}{t(t+2)}$$

ب/ نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_1^2=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

2- نحسب $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$$A=\left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx=\left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=.........$$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$

نحسب $I+J$

$$J+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

نحسب $I-J$

R

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

اذن $I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $\quad I-J=\frac{-\pi}{4}$

نستنتج I و J

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

1- حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و أنشئ C_f

3- حدد المساحة A_k المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$; $x=k$ حيث k عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار $t=e^x$)

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

4- نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(1-e^x\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ;$$

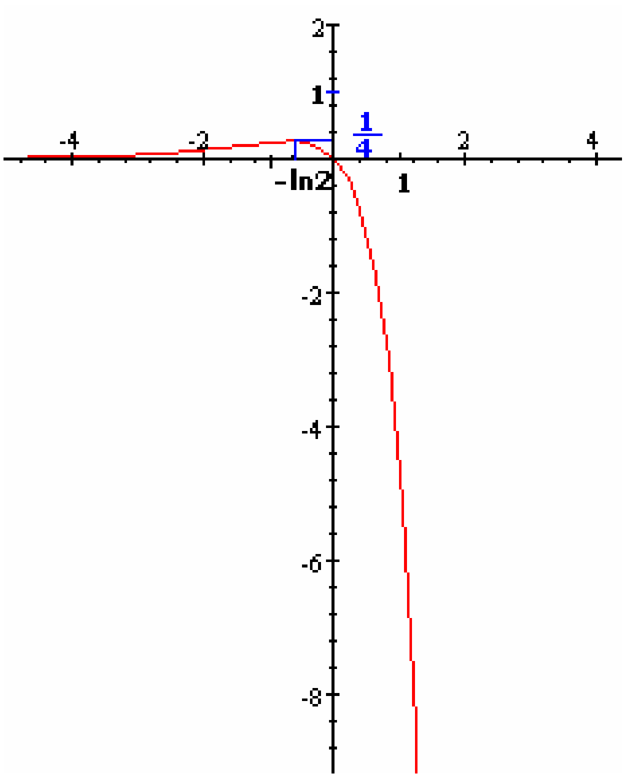
5- أنسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f و أنشئ C_f

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

جدول التغيرات

R

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$



6- نحدد المساحة A_k

$$A_k=\int_k^0 f(x)\,dx=\int_k^0 e^x-e^{2x}dx$$

$$A_k=\left[e^x-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_k^0=\frac{1}{2}-e^k+\frac{1}{2}e^{2k}$$

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$\lim_{k\to-\infty} A_k=\lim_{k\to-\infty}\frac{1}{2}-e^k+\frac{1}{2}e^{2k}=\frac{1}{2}$$

R

تمارين

تمرين1

-1 حدد c ; b ; a حيث $\frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$

أحسب $\int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}dx$

-2 أحسب $\int_0^1 \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

-3 بين أن $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أحسب $\int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}dt$

تمرين2

-1 باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$; $\int_0^1 x^2\ln(x^2+1)dx$ $\int_0^{\ln 2}(x+2)e^{2x}dx$

و $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

-2 حدد الدالة الأصلية لـ $x\to\sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$

-1 أحسب I_1

-2 بين $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

-3 أحسب I_2 I_3

-4 أستنتج $\int_0^1 (x^3+2x^2-2x)e^x dx$

تمرين4

-1 بين أن $1-x\le\frac{1}{1+x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

-2 استنتج $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

-3 استنتج تأطيرا لـ $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ إلى 0,1.

تمرين9

-1 تحقق أن $\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

-2 نعتبر $k\in[0;1]$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k=\int_k^1 \frac{2x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

حدد $\lim A_k$

R

تمرين10

1- أ- تأكد أن $\dfrac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}dt$

2- أحسب $\displaystyle\int_0^1\left(3x^2+2x+1\right)\ln\left(x+1\right)dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

1- تأكد أن $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

2- أحسب $I\left(\alpha\right)=\displaystyle\int_\alpha^1\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha\in\left]0;1\right[$

3- أحسب $\lim\limits_{\alpha\to0^+}I\left(\alpha\right)$

تمرين12

نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ و $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$; $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$

1- أحسب I_1 و استنتج I_3 ; I_5

2- أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x dx$ و استنتج $I_{n+2}-I_n$ بدلالة n.

3- أ- بين أن الدالة $x\to\ln\left[tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ دالة أصلية للدالة $x\to\dfrac{1}{\cos x}$ على $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم I_2 ; I_4

R

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها

المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u , z , f ....)

حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هده المعادلة , و مجموعة هده الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هده المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y'=0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x)=1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y'=0$.

ب) $y'=x^2-1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x)=x^2-1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x\to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\frac{1}{3}x^2-x+k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II – حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

1/ المعادلة التفاضلية y´=ay

* اذا كان $a=0$ فان $y'=0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$

* اذا كان $a\neq 0$

نعلم أن $\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ادن $x\to e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y'+ay=0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y'+ay=0$ نضع $y(x)=z(x)e^{ax}$

ومنه $y'(x)=z'(x)e^{ax}+az(x)e^{ax}$

أي $y'(x)=z'(x)e^{ax}+ay(x)$ و بالتالي $y'(x)-ay(x)=z'(x)e^{ax}=0$

و منه $z'(x)=0$ و بالتالي $z(x)=\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x)=\lambda e^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a=0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y'=ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to y_0e^{a(x-x_0)}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y'=2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

R

-2 نحل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$

حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

2/ حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

اذا كان $a=0$ فان $y'=b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x)=bx+c$

اذا كان $a\neq 0$ فان $y'=ay+b \Leftrightarrow y'=a\left(y+\frac{b}{a}\right)$

نضع $z=y+\frac{b}{a}$ و منه $z'=y'$

$$y'=ay+b \Leftrightarrow z'=az$$

$$\Leftrightarrow z(x)=\lambda e^{ax} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

وبالتالي $$\Leftrightarrow y(x)+\frac{b}{a}=\lambda e^{ax} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\lambda e^{ax}-\frac{b}{a} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a\neq 0$

المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}-\frac{b}{a}$

حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay+b$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y'=-3y+2$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=-3y+2$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{-3x}+\frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0

1- المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0 حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

-* اذا كان $a=b=0$ فان $y''=0$

$$y''=0\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \quad y'(x)=k \Leftrightarrow \exists(k;k')\in\mathbb{R}^2 \quad y(x)=kx+k'$$

الحل العام للمعادلة $y''=0$ هي مجموعة الدوال $x\to kx+k'$ بحيث $(k;k')\in\mathbb{R}^2$

-* اذا كان $b=0$ فان $y''+ay'=0$

$y''+ay'=0\Leftrightarrow (y')'+ay'=0$ ومنه y' حل للمعادلة $z'+az=0$

و بالتالي $y'(x)=\lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y''+ay'=0$ هي الدوال الأصلية $x\to\lambda e^{-ax}$

أي الدوال $x\to\frac{-\lambda}{a}e^{-ax}+\mu \qquad (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$

3 – حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \;;\; (a;b)\neq(0;0)$

R

a)- تذكير لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I

تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E و ليكن $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $E: \quad y''+ay'+by=0$ و كان $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ فان $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E.

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=0$ هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E.

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=0$ يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

d)– حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y: x \to e^{rx} \quad r \in \mathbb{R};$

y حل للمعادلة $E \Leftrightarrow r^2e^x + are^x + be^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

الحالة 1 اذا كان $a^2 - 4b \succ 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \to e^{r_1x} \quad ; \quad x \to e^{r_2x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \to e^{r_1x} \quad ; \quad x \to e^{r_2x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \to xe^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \to e^{rx}$ و $x \to xe^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \to x\dfrac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha + \beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2 - 4b \prec 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq \quad (q \neq 0)$

$$e^{r_1x} = e^{px}(\cos qx + i\sin qx) = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \to e^{px}\sin x \quad ; \quad x \to e^{px}\cos x$ حلين للمعادلة E.

لاحظ $\left(p = -\dfrac{a}{2} \quad ; \quad q = \dfrac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \right)$

و بما أن الدالتين $x \to e^{px}\sin x \quad ; \quad x \to e^{px}\cos x$ غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha\cos qx + \beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E: $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b \succ 0$ فان المعادلة المميزة لها جدرين مختلفين $r_1 \quad ; \quad r_2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha + \beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

R

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}\left(\alpha\cos qx + \beta sixqx\right)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y'_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y'_0$

الشرطان $y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha\cos qx + \beta\sin qx = k\left(\frac{\alpha}{k}\cos qx + \frac{\beta}{k}\sin qx\right) = k\left(\cos\varphi\cos qx + \sin\varphi\sin qx\right) = k\cos\left(qx - \varphi\right)$

بوضع $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{k} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{k}$

تستنتج اذا كان $a^2 - 4b \prec 0$ فان $x \to ke^{px}\cos\left(qx - \varphi\right)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1 \quad ; \quad y_1'(0) = -1$

2- حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$

3- حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الجواب

1- ليكن Δ مميز $r^2 + 2r - \frac{5}{4} = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$

$\Delta = 4 + 5 = 9$ ومنه $r_1 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ و $r_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال $x \to \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

لنحدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1 \quad ; \quad y_1'(0) = -1$

لدينا $y_1(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ ومنه $y'_1(x) = \frac{\alpha}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5\beta}{2}e^{-\frac{5}{2}x}$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 5\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

اذن $y_1(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x}\right)$

2- مميز $r^2 + 4r + 4 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$ منعدم ومنه $r = -2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha + \beta x)e^{-2x}$ حيث حيث α و β عددان اعتباطيان

3- مميز $r^2 + 2r + 5 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$ هو $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

ومنه $r_1 = -1 - 2i$ و $r_2 = -1 + 2i$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to e^{-x}\left(\alpha\cos 2x + \beta six2x\right)$ حيث حيث α و β عددان اعتباطيان

حالات خاصة

-* اذا كان $a \succ 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \alpha\cos\sqrt{a}x + \beta\sin\sqrt{a}x$ حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

-* اذا كان $a \prec 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y''+2y=0 \quad ; \quad y''-4y=0$

حلول المعادلة $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

حلول المعادلة $y''-4y=0$ $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

تمارين حول المعادلات التفاضلية

المعادلة	مجموعة الحلول
$y' = a\,y + b$ a و b عددان معلومان	$y(x) = k \cdot e^{(a \cdot x)} - \dfrac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.
$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ a و b عددان معلومان	المعادلة المميّزة: $r^2 + a \cdot r + b = 0$
	$\Delta > 0$ ليكن r_1 و r_2 جذري المعادلة المميّزة لدينا: $y(x) = \lambda \cdot e^{(r_1 \cdot x)} + \mu \cdot e^{(r_2 \cdot x)}$
	$\Delta = 0$ ليكن r جذر المعادلة المميزة لدينا: $y(x) = (A \cdot x + B) \cdot e^{(r \cdot x)}$.
	$\Delta < 0$ ليكن $p + iq$ و $p - iq$ الجذران العقديان للمعادلة المميزة، لدينا: $y(x) = e^{(p \cdot x)} \cdot (\lambda \cos(qx) + \mu \sin(qx))$

حالات خاصّة
مجموعة حلول: $y'' + ay' = 0$ تكتب على شكل: $y(x) = k_1 \cdot e^{-ax} + k_2$.
مجموعة حلول $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ هي على شكل $y(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)$
مجموعة حلول: $y'' - \omega^2 \cdot y = 0$ تكتب على شكل: $y(x) = k_1 \cdot e^{(\omega x)} + k_2 \cdot e^{(-\omega x)}$.

1

حدّد في كلّ حالة الدوال y التي تحقّق المعادلة التفاضلية التالية:

1) $y'' + \dfrac{1}{2} y = 0$.

2) $y'' + \dfrac{9}{4} y = 0$.

3) $y'' + 9y = 0$ و $y'(0) = 1$ و $y(0) = 1$.

4) $y'' + 4y = 0$ و $y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$ و $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 3$.

2

1) تحقّق أنّ $f(x) = \dfrac{x+2}{x} \cdot e^{(-\frac{x}{2})}$ حلّ لـ: $(*) : y'' - \dfrac{1}{4} y = \dfrac{2x+4}{x^3} e^{(-\frac{x}{2})}$

2) أ) بيّن أنّه إذا كان y حلاّ لـ $(*)$ فإنّ $(y - f)$ هي حل لـ $y'' - \dfrac{1}{4} y = 0$

ب) استنتج حلول $(*)$

3

1) أ) حدّد حلول المعادلة التّفاضلية: $(E): \quad y'' + \pi^2 y = 0$.

ب) حدّد الدالة Y التي تحقّق (E) و $Y(0) = 1$ و $Y(0,5) = 0,5$.

2) حدّد مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3) حدّد مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $y'' + 2y' - 3y = 0$.

4) حلّ المعادلة التفاضلية: $y' + 5y = 0$.

5) حدّد مجموعة حلول المعادلة التّفاضلية: $y'' + 11y' + 10y = 0$.

6) حدّد مجموعة حلول المعادلة التّفاضلية: $y'' - 4y' + 13y = 0$.

7) حدّد مجموعة حلول المعادلة التّفاضلية: $y'' - 2y' + 5y = 0$.

8) حلّ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 4$.

9) حلّ المعادلة التفاضلية: $3y' + y = 1$.

4

لتكن الدالة: $f(x) = 3e^{-2x} - 4$

حدّد معادلة تفاضلية من شكل $y' = ay + b$ تكون f حلاّ لها.

6

1) حدّد الدالة f حل المعادلة $3y' + y = 0$ بحيث $f(0) = -\dfrac{1}{3}$.

2) حدّد الحل g للمعادلة: $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

بحيث $g(0) = 1$ و $g'(0) = 0$.

7

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E): \; y' = -3y + 4e^{-2x}$

1) حدّد العدد الحقيقي λ بحيث تكون $g(x) = \lambda e^{-2x}$ حلاّ لـ (E) .

2) نضع $\lambda = 4$ و $h(x) = f(x) - g(x)$ حيث f حلّ لـ (E) .

تحقّق أنّ h حلّ للمعادلة $(E'): \; y' = -3y$.

3) حلّ (E') و استنتج حلول (E) .

8

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E): \; y' + 6y - 2 = 0$.

حدّد الدالة f حل (E) بحيث منحنى الدالة f يقبل عند النقطة

التي أفصولها 1 مماسّاً معامله الموجّه 2 .

9

1) حلّ المعادلة: $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2) حدّد الحل f بحيث $f(0) = 0$ و $f'(0) = 2$ و استنتج دالة أصلية لـ f

10

1) حدّد الحل y لـ: $y'' + \dfrac{9}{4} y = 0$ و $y(\dfrac{2\pi}{3}) = -1$ و $y'(\dfrac{4\pi}{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$

2) حدّد الأعداد A و α و φ بحيث: $y(x) = A \cdot \cos(\alpha x + \varphi)$.

R

الأعداد العقدية (تتمّة)

I- المعـادلات من الدرجـة الثانية فـي $\mathbb{C}$

1- الجذران المربعان لعدد حقيقي غير منعـدم :

a- تعريـف :

نقول أن العدد العقدي z جذرا مربعا للعدد الحقيقي Z إذا وفقط إذا كان : $z^2 = Z$.

b- تحديد الجدرين المربعين لعدد حقيقي غيـر منعـدم :

- حالـة 1 : $Z \in \mathbb{R}_+^*$

الجذران المربعان للعدد Z همـا $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$.

- حالـة 2 : $Z \in \mathbb{R}_-^*$

لدينا :
$$Z = -(-Z) = i^2\,(-Z) = \left(\sqrt{-Z}\; i\right)^2$$

إذن : الجذران المربعان للعدد Z همـا $-\sqrt{-Z}\; i$ و $\sqrt{-Z}\; i$

مثـال :
$$Z = -3 = 3\,i^2$$

إذن الجذران المربعان للعدد -3 همـا $\sqrt{3}\, i$ و $-\sqrt{3}\, i$.

خاصيـة :

لكل عدد حقيقي غير منعـدم جذران مربعـان مختلفـان ومتقابـلان .

2- المعـادلات من الدرجـة الثانيـة فـي $\mathbb{C}$

- **تعريـف :**

المعادلة التي تكتب على شكـل $a z^2 + b z + c = 0$
حيث : a ، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و z عدد عقدي مجهول ،
تسمـى معادلـة من الدرجـة الثانيـة فـي $\mathbb{C}$.

- **حـل المعـادلات من الدرجـة الثـانيـة $\mathbb{C}$:**

لتكن a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدينا :

$$(E)\ :\ a z^2 + b z + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff z^2 + 2\frac{b}{2a} z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ab^2}{4a^2}$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

نضع : $\Delta = b^2 - 4ac$

وليكن δ أحد الجذرين المربعين للمميز Δ.

إذن :
$$(E) : \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}$$

ومنه : حل المعادلة $(E) : az^2 + bz + c = 0$

هــو :
$$S = \left\{\frac{-b + \delta}{2a} \; ; \; \frac{-b - \delta}{2a}\right\}$$

خاصيـة :

حلي المعادلـة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ همــا :
$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

تطبيقــات :

حــل فــي $\mathbb{C}$ المعـادلات التـاليـة :

1) $z^2 + z + 1 = 0$

لدينا :
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \\ &= 3i^2 \\ &= \left(\sqrt{3}\, i\right)^2\end{aligned}$$

إذن : $S = \sqrt{3}\, i$

ومنه حلي المعادلة همـا :
$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$$

ومنه :
$$S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} \; ; \; \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}\right\}$$

2) $z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

حيث : $0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$

R

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$$

$$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2\theta}$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= -4\tan^2\theta$$

$$= (2i\tan\theta)^2$$

إذن : $\delta = 2i\tan\theta$

ومنه : الحلين هما :

$$z_1 = \frac{2 - 2i\tan\theta}{2} = 1 - i\tan\theta$$

$$z_2 = \frac{+2 + 2i\tan\theta}{2} = +1 + i\tan\theta$$

إذن : $S = \{1 - i\tan\theta \; ; \; 1 + i\tan\theta\}$

طريقــة 2 :

لدينا : $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos\theta} = 0$

أي : $z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

إذن : $(z-1)^2 = -\tan^2\theta$

$$(z-1)^2 = (i\tan\theta)^2$$

إذن : $z - 1 = -i\tan\theta$ أو $z - 1 = i\tan\theta$

$z = 1 - i\tan\theta$ أو $z = 1 + i\tan\theta$

إذن : $S = \{1 - i\tan\theta \; ; \; 1 + i\tan\theta\}$

أكتب الحليــن علـى الشكـل المثلثـي.

لدينا : $z_1 = 1 - i\tan\theta$

$$= 1 - i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

R

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta)\right)$$

لأن $\cos\theta \succ 0$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ -\theta\right]$$

ولدينا :

$$z_2 = 1 + i\ \tan\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ \theta\right]$$

ملاحظة :

إذا كانت : $\frac{\pi}{2} \prec \theta \prec \pi$

فإن : $\cos\ \theta \prec 0$

إذن :

$$z_1 = \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}(-1)\left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}[1\ ,\ \pi]\,[1\ ,\ \theta]$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}[1\ ,\ \pi+\theta]$$

$$= \left[\frac{-1}{\cos\theta}\ ,\ \pi+\theta\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} R\cdot[r\ ,\ \theta] &= R\left(r\ \left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)\right)\\ &= R\cdot r\ \left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)\\ &= [R\,r\ ,\ \theta]\end{aligned}}$$

II- صيغــة موافــر وصيغتــا أوليــر :

1. صيغــة Moivre

ليكن $u = [r\ ,\ \theta]$

نعلم أن $|u^n| = |u|^n = 1$

$$\arg\ u^n = n\ \theta\ [2\ \pi]$$

يعني أن : $\boxed{[1\ ,\ \theta]^m = [1\ ,\ m\ \theta]}$

$$\boxed{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\ n\ \theta + i\ \sin\ n\ \theta}$$

تسمى هذه المتساويـة بصيغـة موافـر.

تطبيقـات صيغـة موافر.

-1 أنشر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$

لدينا : $$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta \cdot \sin\theta + 2\,i\,\cos\theta\,\sin\theta$$

وبما أن : $$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\sin 2\,\theta$$

فإن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\,\sin\theta \end{array}}$$

-2 أنشر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\,\sin\theta - 3\cos\theta \cdot \sin^2\theta - i\,\sin^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

وبما أن : $$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \sin 3\theta$$

إذن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta \end{array}}$$

تعميـــم :

لدينا : $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\,\theta + i\,\sin n\,\theta$$

إذن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos n\,\theta = \Re e\left((\cos\theta + i\,\sin\theta)^n\right) \\ \sin n\,\theta = \operatorname{Im}\left((\cos\theta + i\,\sin\theta)^n\right) \end{array}}$$

.2 صيغـتـا أوليـر :

1-2 : الترمـيـز الأسـي لعـدد عقـدي غير منعـدم :

نرمز بالرمز $e^{i\,\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ للعدد العقدي الذي معياره 1 وعمدته θ.

أي :

$$\boxed{e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta = [1\,,\,\theta]}$$

أمثلـة :

-1 $$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2} = i$$

-2 $$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

R

ملاحظـة :

1- إذا كان : $z = [R\ ,\ \theta]$

فإن : $z = R \cdot e^{i\,\theta}$

2- إذا كان : $\arg z_1 \equiv \theta\ [2\pi]$; $\arg z_2 \equiv \alpha\ [2\pi]$

فإن : $\arg z_1 \times z_2 \equiv \theta + \alpha\ [2\pi]$; $\arg \dfrac{z_1}{z_2} \equiv \theta - \alpha$

$$\boxed{e^{i\,\theta} \cdot e^{i\,\alpha} = e^{i\,(\theta+\alpha)}} \ ; \ \boxed{\frac{e^{i\,\theta}}{e^{i\,\alpha}} = e^{i\,(\theta-\alpha)}}$$

3- $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\arg z^n = n \arg z\ [2\pi]$$

$$\left(e^{i\,\theta}\right)^n = e^{i\,n\,\theta}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{i\,\pi} = -1$$

2-2 : صيغتـا أوليــر :

لدينا :

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\,\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

إذن :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2\,i}}$$

نسمي هاتين المتساويتين بصيغتــي أوليــر.

ملاحظـة :

$$\boxed{\cos n\,\theta = \frac{e^{i\,n\,\theta} + e^{-i\,n\,\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\sin n\,\theta = \frac{e^{i\,n\,\theta} - e^{-i\,n\,\theta}}{2\,i}}$$

تطبيقـات صيغتـا أوليــر :

الاخطــاط **La linéarisation**

مثـــال :

1- أخطـط $\cos^2\theta$

R

لدينا :
$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^2\ \theta = \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2}{4}$$

إذن :
$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(2\cos\ 2\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\ 2\theta$$

-2 أخطط $\sin^2\theta$

لدينا :
$$\sin\ \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

إذن :
$$\sin^2\ \theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\cos\ 2\theta + \frac{1}{2}$$

-3 أخطط $\cos^3\theta$

$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^3\ \theta = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3\,e^{2i\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3\,e^{i\theta}\cdot e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(2\cos\ 3\theta + 6\cos\theta\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos\ 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

إذن :

$$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos\ 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

تعريـــف :

الإخطاط هو كتابة $\cos^n x$ و $\sin^n x$ بدلالـة $\cos\ k\,x$ و $\sin\ k\,x$.

الإخطـاط باستعمـال صيغـة Moivre

نضع : $z = \cos\theta + i\,\sin\theta$

$$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$z\bar{z} = 1$$

$$2\cos\theta = z + \bar{z} \quad \text{و} \quad 2i\sin\theta = z - \bar{z}$$

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\bar{z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$z^n \cdot \bar{z}^n = 1$$

$$2\cos n\theta = z^n + \bar{z}^n \quad \text{و} \quad 2i\sin n\theta = z^n - \bar{z}^n$$

أخطط $\cos^3\theta$

لدينا :

$$2\cos\theta = z + \bar{z}$$

$$8\cos^3\theta = (z + \bar{z})^3$$

$$= z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$$

$$= z^3 + \bar{z}^3 + 3(z + \bar{z})$$

$$= 2\cos 3\theta + 3\times 2\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

التمثيل العقدي للدوران

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م ح

نعتبر الدوران r الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

لدينا

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

ومنه $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

خاصية

التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

هو $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

تمارين حول الأعداد العقدية (تتمّة)

01

حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلات التّالية:

$E_1 : \; z^2 - z + 1 = 0$

$E_2 : \; z^2 - 2(\cos\alpha)z + 1 = 0 \;,\; \alpha \in [0,\pi]$

$E_3 : (5z - 3i)^2 + 1 = 0$

$E_4 : \; (iz+2)^2 - 6(iz+2) - 7 = 0$

$E_5 : z^2 - 6z + 13 = 0$

$E_6 : z^2 - 2(1-\cos\theta)z + 2(1-\cos\theta) = 0$

$E_7 : (z+1)^2 = z - 13$

$E_8 : \; z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

02

نعتبر الحدودية: $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

1) حدّد a و b بحيث: $P(z) = (z^2+1)(z^2+az+b)$.

2) أ) حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

ب) استنتج حلول المعادلة: $P(z) = 0$.

03

(الأسئلة مستقلّة فيما بينها)

1) أكتب على شكل أسّي الأعداد: $A = \dfrac{2-2i}{\sqrt{3}+i}$ و $B = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}-1}$ و $C = (-1+i)^{12}$

2) تحقّق أنّ: $D = (3e^{i\frac{\pi}{3}})^{2007}$ عدد حقيقي سالب.

3) أكتب على الشّكل الجبري الأعداد: $E = 5\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $F = 3\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

4) حدّد معيار و عمدة العدد العقدي: $G = 1 + e^{2i\theta}$.

5) أكتب التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه $\Omega(-1+i)$ و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

6) أخطط $\cos^3 x$ و $\sin^4 x$.

04

1) تحقّق أنّ $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2-i)(z+i)$ و استنتج حلول المعادلة: $z^4 = 1$.

2) حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(\dfrac{z-i}{z+1})^4 = 1$.

05

نعتبر المعادلة $z^2 - (1+i)\bar{z} = 0 \quad , \quad z \in \mathbb{C}^* \quad :(E)$

1) حدّد على الشّكل الجبري حلول المعادلة (E)

2) حدّد على الشّكل المثلّثي حلول المعادلة (E) . (من فرض منزلي 2006 / 2007)

3) استنتج $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ و $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.

06

لكلّ z من $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ نضع: $f(z) = \dfrac{iz^2}{z+1}$. (من بكالوريا 94/93)

نضع $z = [1;\theta]$, $\theta \in]0,\pi[$ بيّن أنّ: $f(z) = [\dfrac{1}{2\cos(\frac{\theta}{2})} \;,\; \dfrac{3\theta+\pi}{2}]$.

07

I) 1) حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$ ، z_1 و z_2 الحلاّن بحيث $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.

2) أكتب العدد $(z_1)^{2008}$ على الشّكل الأسي ثمّ على الشّكل الجبري.

II) 1) أثبت أنّ $A(1+i\sqrt{3})$ و $B(1-i\sqrt{3})$ تنتميان إلى الدّائرة التي مركزها O .

2) أنشئ الشّكل، الوحدة $2\ cm$.

3) أ) حدّد لحق O' صورة O بالدوران r_1 الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{-\pi}{2}$.

ب) حدّد لحق B' صورة B بالدوران r_2 الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

4) أ) لتكن I منتصف $[OB]$. حدّد لحق المتّجهة $\overrightarrow{AI}$.

ب) أثبت أنّ لحق المتّجهة $\overrightarrow{O'B'}$ هو $3\sqrt{3} - i$.

ج) ماذا يمثّل المستقيم (AI) بالنّسبة للمثلث $AO'B'$.

08

نعتبر: $g(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$ حيث $z = [1;\theta]$, $\theta \in]0,\pi[$.

1) بيّن أنّ: $g(z) = \dfrac{i}{2\sin\theta}$ و $z\cdot g(z) = [\dfrac{1}{2\sin\theta} \;;\; \theta + \dfrac{\pi}{2}]$. (من بكالوريا 96/95)

2) ليكن: $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، أكتب على الشّكل الجبري العدد: $(z_0 \cdot g(z_0))^6$.

10

نعتبر العددين العقديين: $a = [2 \,,\, \dfrac{2\pi}{3}]$ و $b = [2\sqrt{3} \,,\, -\dfrac{\pi}{6}]$.

1) نعتبر النّقط: $E(4\sqrt{3})$ و $F(ab)$ و $H(ab + 4\sqrt{3})$.

حدّد قياساً للزّاوية $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}})$ ثمّ بيّن أنّ الرباعي $OEHF$ مربّع.

2) أ) أكتب العدد $Z = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$ على الشّكل الجبري.

ب) أكتب العدد Z على الشّكل المثلّثي.

ج) استنتج $\cos(\dfrac{5\pi}{12})$ و $\sin(\dfrac{5\pi}{12})$. (من فرض محروس 2006/2005)

11

لكلّ z من $\mathbb{C}$ نضع: $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1) أحسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$.

2) حدّد a و b بحيث $P(z) = (z^2+3)(z^2+az+b)$.

3) أ) أنشئ النّقط $A(i\sqrt{3})$ و $B(-i\sqrt{3})$ و $C(3+2i\sqrt{3})$ و $D(3-2i\sqrt{3})$.

ب) بيّن أنّها تنتمي لدائرة محدّداً لحق مركزها و شعاعها.

4) لتكن E مماثلة D بالنّسبة لـ O ، بيّن أنّ $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و استنتج طبيعة BEC

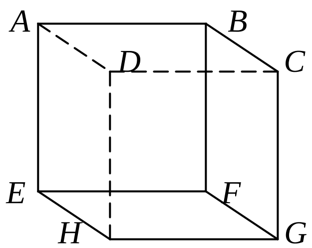
الجـداء السلـمي في V_3

I- الجداء السلمي

أنشطـة :

1- ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء ξ طول حرفه **1** ومركزه O.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EC}$ ، $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{HF}$.



$$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EC}=EG^2=EH^2+HG^2=2$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DF}=DH^2=1$$

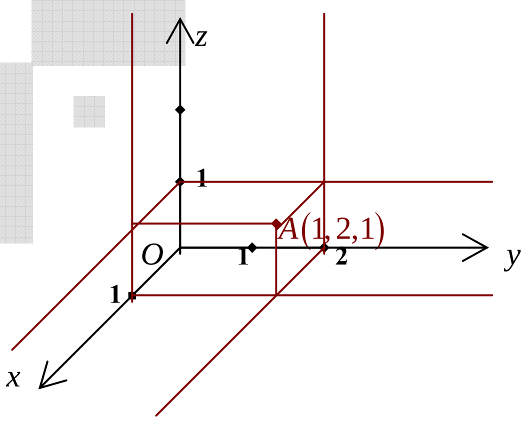
$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \quad \left(\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}\right)$$ لأن

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{HF}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HF}\\&=\frac{1}{2}HF^2\\&=1\end{aligned}$$

2- الفضاء ξ منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

أنشئ النقطة $A(1,2,1)$.



تذكيـر :

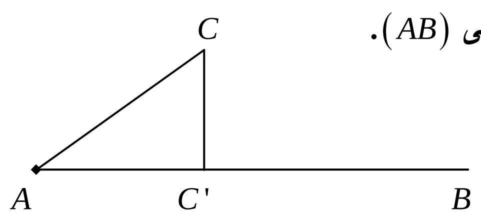
إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى المتجهي V_2 و A ، B ، C ثلاث نقط من المستوى P بحيث :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \vec{v}=\overrightarrow{AC}$$

فإن :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overline{AB}\cdot\overline{AC'}\end{aligned}$$

بحيث : C' هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB).



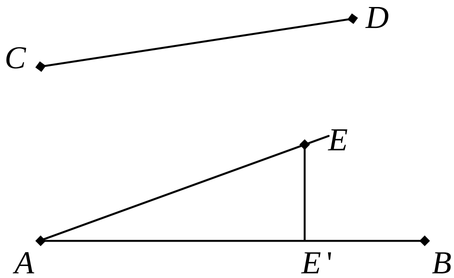
تعريف :

يمكن تحديد تعريف الجداء السلمي من المستوى إلى الفضاء وذلك كما يلي :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3 و A ، B ، C و D أربع نقط من الفضاء ξ بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ فإنه توجد نقطة وحيدة E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{AE}$. والجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{AE'}$$

بحيث E' هو المسقط العمودي للنقطة E على (AB).

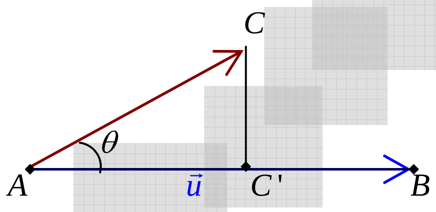


الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3 ، $\vec{u}\neq 0$ و $\vec{v}\neq 0$.

- A ، B و C ثلاث نقط من ξ حيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

وليكن θ قياسا للزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$.



$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overline{AB}\cdot\overline{AC'}\end{aligned}$$

الحالة① : $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$$\cos\theta=\frac{AC'}{AC}$$

إذن : $AC'=AC\cdot\cos\theta$

ومنه : $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC'$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC\cdot\cos\theta$

أو

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta}$$

الحالة② : $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\cdot AC'$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{AC'}{AC}$$

إذن : $AC'=AC\cos(\pi-\theta)$

إذن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\cdot AC\cdot\cos(\pi-\theta)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC\cdot\cos\theta$$

R

$$=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$$

خاصيــة :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء المتجهي V_3
و A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء ξ بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و θ قياس الزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$.
فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC\cdot\cos\theta$

خاصيات الجداء السلمي :

1- تعامد متجهتين :

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3.
$\vec{v}=\vec{0}$ أو $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{u}\perp\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

2- منظم متجهة :

لتكن $\vec{u}$ متجهة من V_3.
منظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الموجب $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$ ($\vec{u}^2$ هو المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$).

3- الأساس والمعلم المتعامدان :

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات من V_3 غير مستوائية.
نقول أن $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس متعامد في V_3.
إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى، وإذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ واحدية فإن الأساس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ متعامد وممنظم.

$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس متعامد وممنظم

$\Updownarrow$

-1 $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

-2 $\vec{j}\perp\vec{k}$ و $\vec{i}\perp\vec{k}$ و $\vec{i}\perp\vec{j}$

ونقول أن المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ متعامد وممنظم، إذا وفقط إذا كان الأساس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ متعامد وممنظم.

الصيغة التحليلية للجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء :

الفضاء المتجهي V_3 موزد بالأساس المتعامد والممنظم $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
نعتبر المتجهتين :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$
$$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$
$$=xx'+yy'+zz'$$

R

خاصيـة :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3.

حيث : $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{u}(x,y,z)$

لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

خاصيـة :

لتكن (x,y,z) و (x',y',z') هما مثلوثي إحداثيات المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس المتعامد والممنظم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx'+yy'+zz'=0$$

ملاحظة :

1- إذا كانت : $\vec{u}(x,y,z)$

فإن : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2- إذا كانت : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

فإن : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

II- تطبيقات الجداء السلمي :

تطبيق 1 :

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A حيث : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}+\vec{j}$

و $\vec{u}$ متجهة موجهة له حيث :

$$\vec{u} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

1- اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

2- اعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من O والذي يحقق : $(D)\perp(P)$

3- استنتج تمثيلا بارامتريا للمستوى (P).

الجواب :

1- الحالة العامة :

لدينا :

$$M\in D \quad \Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A+ta \\ y = y_A+tb \\ z = z_A+tc \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

الحالة الخاصة :

$$D \ : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

R

-2 $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{u}$

$\Leftrightarrow x-y+z=0$

ومنه معادلة : $(P) : x-y+z=0$

-3 لدينا : $x-y+z=0$

إذن : $x=y-z$

نضع : $y=\alpha$ و $z=\beta$

إذن : $\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \quad / \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

وهذا تمثيل بارامتري للمستوى (P).

<u>تطبيق 2</u> :

تحديد مستوى بنقطة ومتجهة منظمية.

حدد مجموعة النقط M من الفضاء ξ. بحيث : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ في الحالات التالية :

-a $k=0$ ، $A(1,1,1)$ و $\vec{u}(1,2,-1)$.

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1,y-1,z-1)$

و : $\vec{u}(1,2,-1)$

و : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

إذن : $1(x-1)+2(y-1)-1(z-1)=0$

إذن : مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ هي المستوى ذو المعادلة : $x+2y-z-2=0$

-b $k=2$ ، $A(1,0,1)$, $\vec{u}(1,1,2)$

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1,y,z-1)$

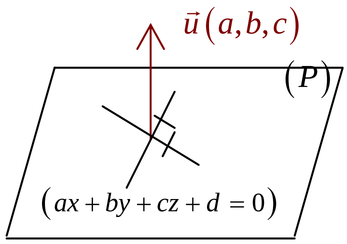
و : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=2$

$1(x-1)+y+2(z-1)=2$

$x+y+2-5=0$

<u>خاصيـة</u> :

- إذا كانت $\vec{n}(a,b,c)$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ منظمية على المستوى (P) ، فإن $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) حيث $d\in\mathbb{R}$.
- إذا كانت معادلة (P) تكتب على شكل $ax+by+cz=0$ فإن المتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ منظمية على (P).



R

تطبيق 3 :

نعتبر في الفضاء ξ المنسوب إلى م م م $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوى (P) الذي معادلته هي : $P\left(3x-y+2z-4=0\right)$

والنقطة $A\left(0,-2,1\right)$ من (P).

-1 حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) الذي يمر من A ويقبل $\vec{u}\left(1,-1,-2\right)$ متجهة موجهة له.

تحقق أن : $(D)\subset(P)$

-2 H و K هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطة $B\left(1,0,\frac{-41}{2}\right)$ على (P) و (D).

حدد إحداثيات كل من H و K.

-3 أحسب الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}$ واستنتج أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (BKH).

الجواب :

-1

$$D\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=1-2t \end{cases}$$

لنتحقق أن : $(D)\subset(P)$

$$3t\left(-2-t\right)+2\left(1-2t\right)-4=3t+2+t+2-4t-4$$
$$=0$$

إذن : $(D)\subset(P)$

-2 لدينا : $H\in(\Delta)\cap(P)$

حيث : (Δ) هو المستقيم المار من B والعمودي على (P).

ولدينا :

$$(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \qquad\qquad / \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\frac{-41}{2}+2t \end{cases}$$

و : $(P)\ :\ 3x-y+2z-4=0$

إذن :

$$3\left(1+3t\right)-\left(-t\right)+2\left(\frac{-41}{2}+2t\right)-4=0$$
$$3+9t+t-41+4t-4=0$$
$$14t=42$$
$$t=3$$

ومنه : $H\left(10,-3,\frac{-29}{2}\right)$

-3 لنحسب : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}$

لدينا : $\vec{u}\left(1,-1,-2\right)$

$$\overrightarrow{KH}\left(3,6,\frac{-3}{2}\right)$$

إذن : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}=3-6+3=0$

وبما أن : $\overrightarrow{BK}\ \perp\ \vec{u}$

و : $\overrightarrow{KH}\ \perp\ \vec{u}$

فإن : $(D)\ \perp\ (BKH)$

خاصية وتذكير :

> لتكن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) . و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان موجهتان للمستوى (P).
>
> - يكون $(P)\perp(D)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\perp\vec{n}$ و $\vec{v}\perp\vec{n}$.
> - يكون $(P)\perp(D)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (P).

تطبيق 4 : تعامد مستويين.

① أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطتين $A(-1,2,0)$ و $B(3,1,-2)$ وعمودي على المستوى (Q) ذوالمعادلة $3x-7y+2z=0$.

لدينا :

$$\overrightarrow{AB}(4,-1,-2)$$

$$\vec{n}(3,-7,2)$$

$$M\in(P)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{n},\overrightarrow{AB}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

ط1 :

$$(x+1)\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$16(x+1)+14(y-2)+25z=0$$

$$16x+14y+25z-12=0$$

ط2 :

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -7 \\ z & 2 \end{matrix}$$

$$14(x+1)-3z+8(y-2)+28z+2(x+1)+6(y-2)=0$$

$$16x+14y+25z-12=0$$

② أدرس تعامد المستويين (P) و (Q) في الحالتين التاليتين :

a- $(P):2x-5y-z=0$

$(Q):x+2z-3=0$

لدينا : $\vec{n}_1(2,-5,-1)$ منظمية على (P).

ولدينا : $\vec{n}_2(1,0,2)$ منظمية على (Q).

و : $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2-2=0$

إذن : $(P)\perp(Q)$

b- $(P):3x-y-2z-5=0$

$(Q):x+4y-3z+2=0$

لدينا : $(3\times1)+(-1\times4)+(-2\times-3)=3-4+6$

$= 5 \neq 0$

ومنه : (P) و (Q) غير متعامدان.

خلاصة :

يكون المستويين $P(ax+by+cz+d=0)$ و $Q(a'x+b'y+c'z+d'=0)$

متعامدين إذا وفقط إذا كان :

$$aa'+bb'+cc'=0$$

تطبيق 5 : تعامد مستقيمين.

أدرس تعامد المستقيمين (D) و (Δ) في الحالات التالية :

-a $D(A,\vec{u})$

حيث : $A(0,1,-1)$

$\vec{u}(1,1,1)$

و : $\Delta = \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases} \quad / \quad (t\in\mathbb{R})$

لدينا : $\vec{u}(1,1,1)$ موجهة لـ (D).

و : $\vec{v}(1,-2,1)$ موجهة لـ (Δ).

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1-2+1=0$

ومنه : $(\Delta)\perp(D)$

-b $(D)=(A,\overrightarrow{AB})$ حيث $A(0,1,-1)$ و $B(1,0,1)$.

و (Δ) يمر من أصل المعلم ومتجهته الموجهة هي : $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$

و $\vec{v}(1,1,0)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=1-1+0=0$

ومنه : $(D)\perp(\Delta)$

خلاصة :

يكون المستقيمين $D(A,\vec{u})$ و $\Delta(B,\vec{v})$ متعامدين

إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

تطبيق 6 : مسافة نقطة عن مستوى.

ليكن (P) مستوى و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه ، و M نقطة من الفضاء ε.

-1 بين أن لكل B من (P) : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$

حيث : H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\vec{n}$$

$$=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$$

$$\left(\overrightarrow{HB}\perp\vec{n}\right)$$

R

-2 بين أن : $AH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$

$\pm\overrightarrow{AH}\cdot\|\vec{n}\|=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$

إذن : $AH\cdot\|\vec{n}\|=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|$

إذن : $AH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$

-3 لتكن $(x+y+z+1=0)$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) و $A(1,0,1)$ نقطة من ξ.

- أحسب مسافة A عن المستوى (P). $d(A,(P))$

لدينا : $B(1,1,-3)\in(P)$

إذن : $d(A,(P))=AH$

حيث : H هو المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$AH=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\overrightarrow{AB}(0,1,-4)$$

$$\vec{n}(1,1,1)$$

إذن : $$AH=\frac{\left|(0\times1)+(1\times1)+(-4\times1)\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

-4 لتكن $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P).

و : $(ax+by+cz+d=0)$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).

و : $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء ξ.

لدينا : $d(A,(P))=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}\,/\,B(x_B,y_B,z_B)$

$$d(A,(P))=\frac{\left|a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)+c(z_B-z_A)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|-ax_A-by_A-cz_A-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خلاصة وخاصية :

ليكن : $(P):ax+by+cz+d=0$

و : $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من ξ .

$$d(A,(P))=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تمارين

تمرين 1

-1 حدد متجهة $\vec{w}$ واحدية وعمودية على $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-2;0)$

- 2 حدد متجهة $\vec{w}$ عمودية على $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;1)$ و $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

تمرين 2

نعتبر $A\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ و $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$ و $C\left(-1;-1;-\sqrt{2}\right)$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

تمرين 3

في الفضاء المنسوب إلى معلم .م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوى

(P) الذي معادلته ax-2y+z-2=0 و المستقيم (D) تمثيله بارامتري $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \qquad t \in IR \\ z = -2 + bt \end{cases}$

-1 حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)

-2 حدد a وb لكي يكون $(D)\perp(P)$

تمرين 4

نعتبر (P) : 2x-y+3z+1=0 $\qquad (D):\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

-1 حدد متجهة $\vec{u}$ منظمية على (P) ونقطة منه.

-2 حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و$\vec{n}(1,2,1)$ منظمية عليه.

-3 حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A' (2;0;3) والعمودي على (D)

-4 حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و الموازي لـ (P)

تمرين 5

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 و (D) المستقيم الممثل

بارا متريا بـ $\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

-1 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)

-2 أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))

-3 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

نعتبر المستوى(P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0 و (D) المستقيم المعرف بـ

$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$

-1 حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)

R

La sphère الفلكـــة

I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء ξ و R عدد حقيقي.
الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث : $AM = R$.
ونرمز لها بـ : $S(A,R)$

$$S(A,R)=\{M\in\xi \,/\, AM=R\}$$

معادلة فلكة :

1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن : $S(\Omega,R)$ فلكة مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعها R حيث $R\succ 0$.

لدينا : $M(x,y,z)\in S(\Omega,R)\Leftrightarrow \Omega M=R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega,R)$

أمثلـة :

1) $\Omega(3,0,1)$, $R=2$

$S_1:(x-3)^2+(y)^2+(z-1)^2=4$

2) $\Omega(1,2,-3)$, $R=1$

$S_2:(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$

3) $(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=2$

S_1 هي فلكة مركزها $\Omega\left(-\sqrt{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$.

4) $\Omega(0,0,0)$ و $R=1$

$S_4:x^2+y^2+z^2=1$

2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ξ.
توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.
لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M\in S\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$

لتكن : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$
و : $M(x,y,z)$.

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

R

لدينا : $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

إذا كان $[AB]$ قطر للفلكة S فإن منتصف $[AB]$ هو مركزها وشعاعها هو : $\frac{AB}{2}$.

3) دراسة المعادلة : $(E): x+y+z-2ax-2by-2cz+d=0$

لدينا : $(E) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2+b^2+c^2-d$

الحالة① : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$

$S = \varnothing$

الحالة② : $a^2+b^2+c^2-d = 0$

$S = \{\Omega(a,b,c)\}$

الحالة③ : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$

نضع : $R^2 = a^2+b^2+c^2-d$ حيث $R \succ 0$

$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

$S = S(\Omega(a,b,c),R)$

مثال :

$$(E): x^2+y^2+z^2-2y+z-3=0$$

ط1 :

لدينا :

$a=0$

$b=1$

$c=-\frac{1}{2}$

$d=-3$

إذن : $a^2+b^2+c^2-d = 1+\frac{1}{4}+3=\frac{17}{4} \succ 0$

إذن : S فلكة مركزها $\Omega\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

ط2 :

لدينا : $(E): x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{4}+3$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$S = S\left(\Omega\left(0,1,\frac{-1}{2}\right),\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

R

II- تقاطع فلكة ومستوى :

الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R.
لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S،
نحسب المسافة d بين (P) و Ω. $\qquad d=d(\Omega,(P))$

الحالة① : $d(\Omega,(P))\succ R$

$$S\cap P=\varnothing$$

الحالة② : $d(\Omega,(P))=R$

$$(S)\cap(P)=\{H\}$$

بحيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P).
في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S).

الحالة③ : $d(\Omega,(P))\prec R$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H.
(حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)). وشعاعها r حيث : $\qquad r=\sqrt{R^2-d^2}$.

علما أن : $\qquad d=d(\Omega,(P))=\Omega H$

مثـال :

$$(P):2x-y+z+1=0$$

و : $\qquad S\{\Omega,2\}$

حيث : $\qquad \Omega(1,-1,1)$

لدينا : $\qquad d(\Omega,(P))=\dfrac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}}$

$$=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}\succ 2$$

إذن : $\qquad S\cap P=\varnothing$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R.
وليكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $\qquad M\in P\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

ملاحظة :

$\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية على (P).

مثـال :

(S) فلكة معادلتها : $\qquad x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$

و : $\qquad A(1,1,0)$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $\qquad A\in S$

إذن : $\qquad M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

وبمـأن : $\qquad \Omega(1,-,1,0)$

$$A(1,1,0)$$

$$M(x,y,z)$$

R

فإن : $\overrightarrow{A\Omega}(0,-2,0)$

$\overrightarrow{AM}(x-1,y-1,z)$

إذن : $-2(y-1)=0$

ومنه : $y=1$ هي معادلة المستوى المماس للفلكة S في النقطة A.

III- تقاطع فلكة ومستقيم :

مثـال 1 :

أدرس تقاطع الفلكة S والمستقيم (D).

حيث : $(S): x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0$

و : $$(D):\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

لدراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D)،

نحل النظمة : $$(t\in\mathbb{R}) \quad \begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \\ x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0 \end{cases}$$

الجـواب :

$$t^2+(t+1)^2+4-3t+2(t+1)-8-5=0$$

$$2t^2+t-6=0$$

لنحل المعادلة : $$\Delta=1-4(2)\times(-6)$$

$$=49\succ 0$$

إذن : $$t_1=\frac{-1-7}{4}=-2$$

$$t_2=\frac{-1+7}{4}=\frac{3}{2}$$

ومنه تقاطع الفلكة S والمستقيم (D) هي النقطتين : $A(-2,-1,2)$

و : $B\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2\right)$.

مثـال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والفلكة (S).

حيث : $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=-4$

$$(D):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \quad / \quad (t\in\mathbb{R})$$

الجـواب :

$$(1+t-1)^2+(-1+2t+1)^2+t^2=-4$$

$$t^2+4t^2+t^2=-4$$

$$6t^2=-4$$

$$6t^2+4=0$$

$$\Delta=-96\prec 0$$

ومنه : $(S)\cap(D)=\varnothing$

تمارين

تمرين في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;i\,;j\,;k\right)$، نعتبر S_1 الفلكة التي معادلتها
$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ و S_2 الفلكة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2 , و (P) المستوى الذي معادلته $x-2y+z+1=0$ و (P´) المستوى الذي معادلته $2x-y-2z-1=0$.

1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.
2- أدرس تقاطع (P´) و S_2 .
3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S_1 عند النقطة $A(1;1;3)$

إجابة

-1 $S_1 : (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ اذن $S_1 = S(\Omega_1;3)$ حيث $\Omega_1(2;-1;1)$

$$d(\Omega_1;(P))=\frac{|2+2+1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}\prec 3$$

(P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة مركزها B مسقط العمودي لـ Ω_1 على (P) و شعاعها $\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$
B هو تقاطع المستوى (P) و المستقيم (D) المار من Ω_1 و العمودي على (P)
لدينا $\vec{n}(1;-2;1)$ منظمية على (P) و منه موجهة لـ (D) و بالتالي التمثيل البارامتري لـ (D) هو

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$B\in(P)\cap(D)\Leftrightarrow\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=1+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=-1 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

اذن تقاطع (P) و S_1 هو الدائرة $C\left(B;\sqrt{3}\right)$ حيث $B(1;1;0)$

2- لدينا $d(\Omega_2;(P´))=2$ ومنه تقاطع S_2 و (P´) هو النقطة C باتباع نفس الخطوات السابقة نحدد النقطة C

3- لدينا $A\in S_1$ ليكن (P´´) مماس لـ S_1 عند A
$M\left(x\,;y\,;z\right)\in\left(P''\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}\Leftrightarrow$ ....

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$
نعتبر $A(1;0;1)$ و $B(0;0;1)$ و $C(0;-1;1)$ و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$

1- بين أن مجموعة النقط M حيث $MA=MB=MC$ مستقيم وحدد تمثيلا بارا متريا له
2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C
3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من Aو B و المماسة لـ (D) في C

تمرين2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ نعتبر $A(0;3;-5)$ و $B(0;7;-3)$ و $C(1;5;-3)$

1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منظمية عليه
3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة $x+y+z=0$
أ- تأكد أن (P)و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D)
ب- حدد تمثيلا بارا متريا لـ (D)
4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ $\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$
أ- حدد معادلة للفكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)
ب حدد تقاطع S و (AC)

R

تمرين3

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 (D) المستقيم الممثل بارا متريا بـ

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)
2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
3- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))
4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0

و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

تمرين5

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة x+y+z+1=0
و المستوى (Q) ذا المعادلة 2x-2y-5=0
و (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$
1- بين أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها
2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعهما
3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A(0;1;2) و العمودي على (P)
4- تحقق أن $(P) \perp (Q)$ و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D´)تقاطع (P) و(Q)

تمرين6

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطة A(-2;3;4)
المستوى (P) ذا المعادلة x+2y-2z+15=0 (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التيتحقق
$x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$ و (C) الدائرة التي معادلتها

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

1- بين أن (S) فلكة محددا عناصرها المميزة
2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حددها
3- حدد معادلتي المستوين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)
4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

الجـداء المتجـهــي
Produit vectoriel

توجيه الفضاء

1- المعلم الموجه في الفضاء.
Repère orienté dans l'espace

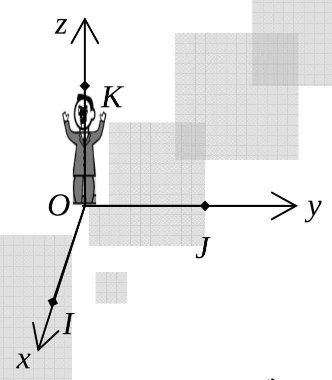
ليكن $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء $\mathcal{E}$، ولتكن I ، J و K ثلاث نقط من $\mathcal{E}$.

بحيث : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$

رجل أمبير هو رجل خيالي، رجلاه في O ورأسه في K وينظر في اتجاه النقطة I.

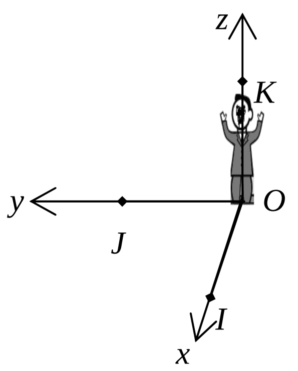
إذن لدينا حالتين :

الحالة 1



النقطة J توجد على يسار رجل أمبير

الحالة 2



النقطة I توجد على يمين رجل أمبير.

إذا كانت J على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشرا.

وإذا كانت J على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ غير مباشر.

أمثلة :

نفترض أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر.

إذن : المعلم $(O,\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ مباشر.

المعلم $(O,\vec{k},\vec{i},\vec{j})$ مباشر.

المعلم $(O,\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ غير مباشر.

ملاحظة :

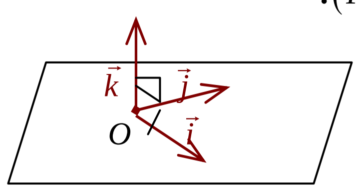
إذا كان المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر.

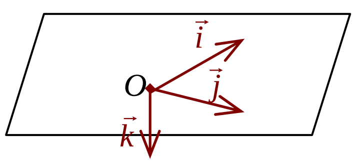
فإن : الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر.

2- توجيه مستوى في الفضاء.

ليكن (P) مستوى في الفضاء $\mathcal{E}$ و $\vec{k}$ متجهة واحدية منظمية على (P).

لتكن O نقطة من (P).





يمكن إنشاء معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر، بحيث $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهتان موجهتان للمستوى (P).

ملاحظة :
يتم توجيه المستوى بتوجيه متجهة منظمية عليه.

II- الجداء المتجهي.

تعريف :
لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3. و A و B نقطتان من ξ بحيث : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من هذا الترتيب هو المتجهة التي نرمز لها بـ : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ والمعرفة كما يلي :

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين :
  - المتجهة $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ تحقق $\vec{w}\perp\vec{v}$ و $\vec{w}\perp\vec{u}$
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس مباشر.
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\theta$ / حيث θ قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$

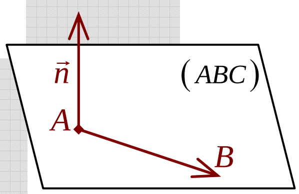
أمثلة :
نفترض أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا.

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j} \qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

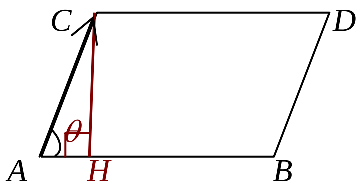
تطبيق :
بين أن : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$

لدينا : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\sin^2\theta+\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\cos^2\theta$
$=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$

خاصيات :
1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط غير مستقيمية فإن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).



2) ليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



لدينا : $\sin\theta=\dfrac{CH}{AC}$
إذن : $CH=AC\sin\theta$
إذن : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB\cdot CH$

استنتاج :
العدد $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

خاصية :
مساحة المثلث ABC هي العدد : $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

R

3) يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

4) الجداء المتجهي والعمليات :

لتكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات و α عدد حقيقي.

- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\alpha\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

III- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في معلم متعامد ممنظم مباشر.

L'ex pression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct.

نعتبر المتجهتان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$.

لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-x'z)\vec{j}+(xy'-x'y)\vec{k}$$
$$=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

استنتاج :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

أمثلـة :

1) $\vec{u}(1,2,1)$ و $\vec{v}(-1,0,1)$

لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

2) $A(1,0,1)$ ، $B(0,1,1)$ ، $C(1,1,0)$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

إذن : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{3}$

ومنه : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (وحدة القياس) هي مساحة المثلث ABC.

IV- تطبيقات الجداء المتجهي.

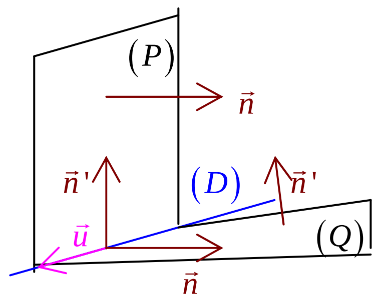
1- حساب مساحة المثلث.

2- معادلة مستوى معرف بـ 3 نقط غير مستقيمية.

المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

3- تقاطع مستويين.

لتكن $\vec{n}$ منظمية على (P) و $\vec{n}'$ منظمية على (Q).



إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مستقيميتين،

فإن المتجهة $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n}'$ هي متجهة موجهة للمستقيم (D) تقاطع (P) و (Q).

4- مسافة نقطة عن مستقيم.

ليكن : $D(A,\vec{u})$ مستقيما في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ولتكن B نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$، و H المسقط العمودي لـ B على (D).

لدينا :
$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\wedge\vec{u}$$
$$=\overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}$$

إذن :
$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}\right\|$$
$$=HB\cdot\|\vec{u}\|$$

إذن :
$$HB=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

إذن :
$$d\left(B,(D)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصيـة :

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم م.م.

مسافة النقطة B عن المستقيم $D(A,\vec{u})$ هي :

$$d\left(B,(D)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

مثـال :

$$A(2,1,0)$$

و
$$D\ :\ \begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=-t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

لنحسب $d\left(A,(D)\right)$

لدينا : $C(0,1,0)\in(D)$

و : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة موجهة لـ (D).

R

إذن : $d\left(A,(D)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

وبما أن : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

فإن : $\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

و : $=2\vec{j}+2\vec{k}$

إذن : $\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{8}$

و : $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$

إذن : $d\left(A,(D)\right)=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

تمرين تطبيقي :

تمرين 5 (سلسلة الهندسة الفضائية) :

1- a- لدينا : $A(-3,0,0)$ ، $B(-1,0,-1)$ ، $C(-1,1,0)$ و $\Omega(1,-1,0)$.

لنحسب : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

بماأن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}==\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

فإن معادلة المستوى (ABC) تكتب على شكل $x-2y+2z+d=0$.

b- وبما أن : $A\in(ABC)$

فإن : $-3+0+0+d=0$

إذن : $d=3$

ومنه : $x-2y+2z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2- a- لدينا :

$(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$

b- لدينا : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{|1+2+3|}{\sqrt{1+4+4}}$

$=2=R$

إذن : (ABC) مماس للفلكة (S).

3- a- لدينا : $(Q):2x+2y+z+3=0$

إذن : $d\left(\Omega,(Q)\right)=\dfrac{|2-2+3|}{\sqrt{4+4+1}}$

إذن : (Q) متقاطع مع (S) وفق دائرة.

b- لدينا : $(2\times1)+(2\times(-2))+(1\times2)=2-4+2=0$

R

إذن : $(ABC)\perp(Q)$

c- لدينا : (D) يمر من Ω و $(D)\perp(Q)$.

إذن : $(D)\ :\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

d- مركز الدائرة هو النقطة W تقاطع (D) و (Q).

لنحل النظمة :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \\ 2x+2y+z+3=0 \end{cases}$$

إذن : $2(1+2t)+2(-1+2t)+t+3=0$

$$9t+3=0$$

$$t=-\frac{1}{3}$$

ومنه : $W\left(\frac{1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-1}{3}\right)$ مركز الدائرة (ℓ).

وبما أن : $2^2=4=\Omega W^2+r^2$

فإن : $r^2=4-1$

$$r^2=3$$

إذن : $r=\sqrt{3}$

تمريـن :

لدينا : $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(1,2,1)$.

1- أحسب الجداء $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ واستنتج معادلة المستوى (ABC).

2- لتكن (S) فلكة حيث تقاطعها مع المستوى (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

a- بين أن O تنتمي إلى (S).

b- حدد معادلة الفلكة (S) علما أن : $H(0,0,3)\in(S)$

3- ليكن (P) المستوى المماس للفلكة (S) في H.

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

4- أحسب المسافة : $d(H,(AB))$.

تمارين

تمرين1

$\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

أحسب $\vec{i}\wedge 3\vec{j}$ $\qquad$ $\left(\vec{i}+2\vec{k}\right)\wedge\vec{j}$ $\qquad$ $\left(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)\wedge\vec{k}$ $\qquad$ $\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)\wedge\left(3\vec{i}+4\vec{j}\right)$

تمرين2

لتكن $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{d}$; $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{d}$

بين إن $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ مستقيميتان

تمرين 3

A(3;2;-1) $\qquad t\in\mathbb{R}\qquad (D):\begin{cases} x=2-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}\qquad d\left(A;(D)\right)=?$

تمرين 4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1)و B(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي

معادلته $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+3y-z-1=0 \end{cases}$

1- حدد $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S)التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

تمرين

A(3;2;-1) $\qquad t\in\mathbb{R}\qquad (D):\begin{cases} x=2-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}\qquad d\left(A;(D)\right)=?$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1)و B(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي

معادلته $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+3y-z-1=0 \end{cases}$

1- حدد $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S)التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

Dénombrement التعداد

I- مبدأ الجداء

تمهيد :

1) رمي قطعة نقدية :

a) اذا رمينا قطعة نقدية فاننا نحصل اما على الوجه F أو على الظهر P . P=pile , F=Face
في هذه الحالة نقول أن لنا امكانيتين .

b) و اذا رمينا القطعة النقدية مرتين فما هو عدد المكانيات الممكن الحصول عليها :

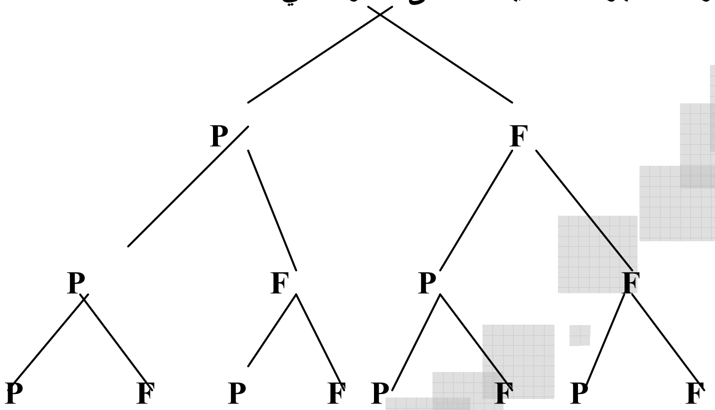
FF ; FP ; PF ; PP

c) و اذا رمينا القطعة النقدية ثلاث مرات فما هو عدد الامكانيات الممكن الحصول عليها:

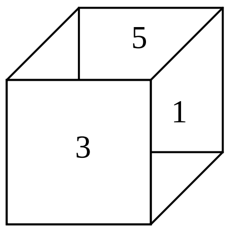
PPP ; PPF ; PFP ; FPP

FFP ; FPF ; PFF ; FFF

يمكن استعمال الشجرة " شجرة الامكانيات" على النحو التالي :



2) رمي النرد:



النرد هو مكعب عادة تكون وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6 .

a) إذا رمينا هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي النتائج الممكن المحصل عليها . الجواب : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.
لدينا إذا ستة إمكانيات .

b) اذا قمنا برمي النرد مرتين و كنا نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي مجموعة جميع الامكانيات المتوقعة ؟

الجواب : {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6).....}. يمكن إعطاء جدول للنتائج.

c) تظنن عدد جميع الإمكانيات إذا قمنا برمي النرد ثلاث مرات متتالية .

3) تكوين أعداد

a) لدينا 6 بيدقات تحمل الأرقام : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6

a_1) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

a_2) ما هو عدد الأعداد المكونة من ستة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

b) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام .

ملاحظة : لعدد oxy يعتبر عدد مكون من رقمين فقط .

R

خلاصة : مبدأ الجداء

نعتبر p اختبار

اذا كان : الاختبار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

الاختبار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

الاختبار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد الكيفيات التي تم بها هذا الاختبار هو : $n_1 \times n_2 \times \dots\dots\dots \times n_p$

تطبيقات:

-1 صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

a) نسحب من الصندوق 3 كرات واحدة تلو الأخرى و لا نعيد الكرة المسحوبة الى الصندوق

a_1) أعط عدد جميع السحبات الممكنة

a_2) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات بيضاء.

a_3) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات سوداء.

a_4) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات لها نفس اللون.

b) نفس الأسئلة علما أننا نعيد الكرة المسحوب إلى الصندوق قبل سحب الأخرى وهكذا.

-2 كيس يحتوي على 5 بيدقات تحمل الأرقام 0 – 1- 2 - 3- 4 . نسحب بيدقتين بالتتابع.

إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما فرديا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية

و إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما زوجيا لا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية

a) ما هو عدد جميع الإمكانيات

b) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما فرديا

c) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما زوجي

II- الترتيبات : Les arrangement

تمهيد :

-1 في قاعة انتظار إحدى العيادات يوجد 10 كراسي و 3 مرضى . بكم من طريقة يمكن للمرضى الثلاث أن يجلسوا.

-2 أربعة أطفال دخلوا إلى قاعة للمطالعة فوجدوا 5 طاولات. بكم من طريقة يمكن للأطفال أن يجلسوا (كل طاولة لا تسع إلا لطفل على الأكثر)

-3 قسم يحتوي على42 تلميذ . بكم من طريقة يمكن اختيار ثلاث تلاميذ واحد تلو الأخر من هذا القسم .

تعريف:

كل ترتيب ل p عنصر من بين n عنصر $(p\leq n)$ يسمى يسمى ترتيبه ل p عنصر من بين n

عدد الترتيبات :

تمهيد :

مجموعة تتكون من n عنصر .

نريد اختيار p عنصر من بين n بالتتابع

لاختيار العنصر الأول لدينا n طريقة

و لاختيار العنصر الثاني لدينا (n-1) طريقة

و لاختيار العنصر p^n لدينا (n-p+1) طريقة.

وحسب مبدأ الجداء لدينا : $n(n-1)\dots\dots.(n-p+1)$ طريقة مختلفة لاختيار p عنصر من بين n.

مبرهنة :

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n $p\leq n$ هو $n(n-1)\dots\dots\dots.(n-p+1)$ و نرمز له ب A_n^p

$$A_5^3 = n(n-1)\dots\dots(n-p+1)$$

مثال : A_5^1 , A_6^2 , A_5^3

III - التبديلات : les permutations

تعريف :

كل ترتيبة ل n عنصر من بين n تسمى تبديلة ل n عنصر

عدد التبديلات :

عدد التبديلات ل n عنصر هو العدد A_n^n

$$n(n-1)..............\times 2\times 1$$

و نرمز له ب: $n!$ و نقرأ n عاملي أو n factoriel .

$$n!=n(n-1)..............\times 2\times 1$$

اصطلاح : $0!=1$

مثال : $3!=6$ $5!=120$

ملاحظة هامة :

$$A_n^p=n(n-1).........(n-p+1)$$

$$=\frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p=n(n-1).........(n-p+1)$$

$$=\frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\boxed{A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}}$$

VI- التأليفات : Les combinaisons

تمهيد :

1- نعتبر المجموعة : $E=\{a,b,c,d\}$

جدد جميع أجزاء E

2- نريد اختيار شخصين ثآنيا من بين 5 أشخاص

ما هو عدد الطرق لإجراء هذا الاختبار.

تعريف :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر

كل جزء من E مكون من P عنصر (p≤n) يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n

عدد التآليفات :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و (p≤n)

إذا أردنا اختيار p عنصر بالتتابع و بدون إحلال من E فإن عدد جميع الإمكانيات هو A_n^p :

و ليكن N هو عدد التأليفات ل p عنصر من بين n

نلاحظ أنه بالنسبة للتأليفات الترتيب غير مهم

اذن لكل تأليفة ل p عنصر من بين n هناك ل p عنصر من بين n هناك $p!$ ترتيبة ل p عنصر من بين n و منه :

$$A_n^p=p!N \quad \text{أي} \quad N=\frac{A_n^p}{p!}$$

R

عدد التاليفات ل **p** عنصر من بين **n** **(p≤n)** هو العدد $\frac{A_n^p}{p!}$ و الذي نرمز له ب : C_n^p

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

تطبيقات:

1- أحسب : $C_n^0 \quad , \quad C_n^1 \quad , \quad C_3^1 \;,\; C_4^2$

2- بين أن : $C_n^p \; C_n^{n-p} =$

3- بين أن : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p \quad , \quad 1 \le p \le n$

4- مثلث باسكال

5- صيغة الجدائية : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

أمثلة : 1) أحسب : $(n+1)^5$

2) بين أن : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

استنتج عدد أجزاء مجموعة تحتوي على **n** عنصر

خاصية : عدد أجزاء مجموعة تحتوي على **n** عنصر هو 2^n

$$\boxed{cardP(E) = 2^{cardE}}$$

R

probabilités الاحتـمـــالات

1) التجربة العشوائية Expérience aléatoire

مثـــال -1- : يوجد في صندوق 8 كرات مرقمة من 1 إلى 8 .

a- نعتبر التجربة العشوائية التالية « سحب كرة واحدة من الصندوق».
هناك عدة إمكانيات Eventualités
مثلا يمكن سحب الكرة رقم 1 أو 2 أو ... أو 8
مجموعة الإمكانيات هي $\Omega = \{1,2,...,8\}$
وعدد الإمكانيات هو $card\Omega = C_8^1 = 8$

b- نعتبر التجربة العشوائية التالية « سحب كرتين من الصندوق».
مجموعة الإمكانيات Ω هي مجموعة الثنائيات : $\{i,j\}$ / $i \neq j$ و $1 \leq i \leq 8$ و $1 \leq j \leq 8$
عدد عناصر Ω هو $card\Omega = C_8^2 = 28$

ملاحظـــة : * النتيجة $\{3,4\}$ تحقق الحدث (Evénement) (مجموع النقط المحصل عليها 7).
ولدينا كذلك $\{1,6\}$ و $\{2,5\}$ نتائج تحقق نفس الحدث.
إذن من الممكن أن نمثل هذا الحدث بالجزء من Ω.
$A = \{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$
* النتيجة $\{7,6\}$ تحقق الحدث (مجموع النقط المحصل عليها أكبر من أو يساوي 13).
والجزء من Ω الممثل لهذا الحدث هو $B = \{\{6,7\},\{7,8\}\}$

تعريـــف : الحدث هو كل جزء من Ω.
و Ω يسمى كون الإمكانيات.

مثـــال -2- : " رمي قطعة نقدية في الهواء"
النتيجة المحصل عليها هي P أو F إذن $\Omega = \{P,F\}$
$card\Omega = 2$

2) مصطلحات وتعاريف.

1. كون الإمكانيات

- كون الإمكانيات هو مجموعة كل النتائج الممكنة (المحتملة). ونرمز له ب Ω.
- كل عنصر من Ω يسمى إمكانية (Eventualité)

2. الحـــدث

كل جزء من Ω يسمى حدث.

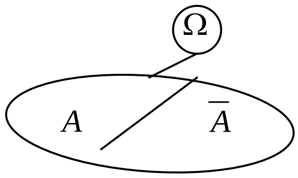
2-1. الحدث المستحيل : $\emptyset$. $\emptyset \subset \Omega$
$\emptyset$ لا تحتوي على أي نتيجة، أي $\emptyset$ لا يتحقق أبدا.
$\emptyset$ يسمى الحدث المستحيل.

2-2. الحدث الأكيـد : Ω . $\Omega \subset \Omega$
Ω يحتوي على كل النتائج الممكنة.
Ω هو الحدث الأكيد.

2-3. الحدث الإبتدائـي :

كل حدث مكون من عنصر واحد يسمى **حدثا إبتدائيا.**

2-4. الحدث المضـاد :



الحدث المضاد للحدث A هو $C_{\Omega}^{A} = \overline{A}$

حيث $A \cup \overline{A} = \Omega$ و $A \cap \overline{A} = \varnothing$

2-5. تقاطع حدثين :

- **تقاطع الحدثين** A و B هو الحدث $A \cap B$
- يتحقق الحدث $A \cap B$ إذا وفقط إذا تحقق الحدثين A و B معا.

2-6. اتحاد حدثين :

- **اتحاد الحدثين** A و B هو الحدث $A \cup B$.
- يتحقق الحدث $A \cup B$ إذا وفقط إذا تحقق الحدث A أو الحدث B.

2-7. انسجام حدثين :

نقول إن الحدثين A و B **غير منسجمين** إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \varnothing$.

مثــال -1- : صندوق يحتوي على **10** كرات مرقمة من **1** إلى **10.**

نعتبر التجربة العشوائية« سحب كرة واحدة من الصندوق».

لدينا $\Omega = \{\{i, j, k\} \ , i \neq j \text{ و } i \neq k \text{ و } j \neq k \text{ و } 1 \leq j \leq 10 \text{ و } 1 \leq i \leq 10 \text{ و } 1 \leq k \leq 10\}$

$$card\Omega = C_{10}^{3} = 120$$

نعتبر الحدث A « الكرات المسحوبة من بينها رقم **1**».

$$cardA = C_{1}^{1} C_{9}^{2} = 36$$

$$A = \{\{1, j, k\} \ / \ j \neq k \text{ و } 2 \leq j \leq 10 \text{ و } 2 \leq k \leq 10\}$$

$$\overline{A} = \{\{i, j, k\} \ / \ i \neq j \text{ و } i \neq k \text{ و } j \neq k \text{ و } 2 \leq i \leq 10 \text{ و } 2 \leq j \leq 10 \text{ و } 2 \leq k \leq 10\}$$

$$card\,\overline{A} = card\Omega - cardA = 120 - 36 = 84$$

نعتبر الحدث B « مجموع النقط المحصل عليها أكبر من أو يساوي **9**».

هل الحدثين A و B منسجمين ؟ (علل جوابك).

مثــال -2- : نرمي نرد وجوهه الستة مرقمة من **1** إلى **6.**

كون الإمكانيات هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

نعتبر الأحداث التالية :

A « الحصول على رقم قابل للقسمة على **5**».

B « الحصول على رقم قابل للقسمة على **3**».

C « الحصول على رقم زوجي ».

D « الحصول على رقم فردي ».

لدينا إذن $A = \{5\}$ و $B = \{3, 6\}$

و $C = \{2, 4, 6\}$ و $D = \{1, 3, 5\}$

- الحدث A حدث ابتدائي.
- $\overline{C} = D$ و $\overline{D} = C$
- $B \cap C = \{6\}$ إذن B و C منسجمين.
- $A \cap C = \varnothing$ إذن B و C غير منسجمين.

3) الفضاءات الاحتمالية المنتهية

1. تمهيد : نشاط-1- : صندوق يحتوي على **3** كرات حمراء وكرتين خضراوتين وكرة بيضاء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب كرتين بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق.
نعتبر الأحداث التالية :
A « الحصول على كرتين لهما نفس اللون».
B « الحصول على كرتين لهما لون مختلف».
- أحسب $cardA$ و $cardB$.
- أكتب A و B بتفصيل.
- ما هو الحدث الذي هو أوفر حظا في أن يتحقق ؟ A أو B ؟

نشاط-2- : نعتبر التجربة العشوائية التالية (سحب كرة واحدة من الصندوق).

تذكير :

التــردد = $\dfrac{\text{الحصيص}}{\text{الحصيص الإجمالي}}$

$f = \dfrac{n}{N}$

تردد الكرات الحمراء هو $\dfrac{3}{6}$

نقول أن احتمال الحصول على كرة حمراء هو $\dfrac{3}{6}$.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{\text{عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء}}{\text{عدد جميع الإمكانيات}}$$

تردد الكرات الخضراء هو $\dfrac{2}{6}$.

نقول أن احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$.

نعتبر الأحداث التالية :
R « الحصول على كرة حمراء».
V « الحصول على كرة خضراء».

احتمال الحدث R هو $\dfrac{3}{6} = \dfrac{\text{عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء}}{\text{عدد جميع الإمكانيات}}$

احتمال الحدث V هو $\dfrac{2}{6} = \dfrac{\text{عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء}}{\text{عدد جميع الإمكانيات}}$

2. احتمال على مجموعة

ملاحظة : نلاحظ من خلال هذه الأمثلة أن احتمال حدث هو عدد نقيس به حظ حدث في أن يتحقق وهو عدد محصور بين **0** و**1**.
حيث **0** هو احتمال الحدث المستحيل.
و **1** هو احتمال الحدث الأكيد.

تعريف : نعتبر كون الإمكانيات Ω بحيث : $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$
$\{e_i\}$ حدث ابتدائي لكل i من $\{1, 2, ..., n\}$
إذا ربطنا كل عنصر e_i بعدد p_i بحيث : $0 \le p_i \le 1$ و $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$
نقول أننا عرفنا احتمالا p على Ω.
ونقول احتمال الحدث الإبتدائي $\{e_i\}$ هو p_i.
ونكتب $p(\{e_i\}) = p_i$
(Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا.

R

ملاحظة : 1) كل احتمال p معرف على Ω هو تطبيق من $P(\Omega)$ نحو $[0,1]$.

2) إذا كان $A=\{e_1,e_2,....e_k\}$

فإن $P(A)=p(e_1)+p(e_2)+....+p(e_k)$

3. فرضية تساوي الاحتمالات

نفترض أن جميع الأحداث الإبتدائية لها نفس الاحتمال.

أي $p_1=p_2=............=p_n$

ونعلم أن $p_1+p_2+............+p_n=1$

إذن $p_i=\frac{1}{n}$ $\quad \forall i\in\{1,2,...,n\}$

ليكن الحدث A $\quad A=\{e_1,e_2,...,e_k\}$

$$P(A)=p_1+........+p_k=k\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{k}{n}$$

وبما أن $cardA=k$

و $card\Omega=n$

فإن $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{cardA}{card\Omega}$

خاصية :

إذا كانت جميع الأحداث الإبتدائية لها نفس الاحتمال فإن احتمال الحدث A هو	$P(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}$
$\dfrac{\text{عدد إمكانيات تحقق } A}{\text{عدد جميع الإمكانيات}}$ =	$P(A)$

تطبيقات : أنظر التمارين.

الاحتمال الشرطي Probabilité conditionnelle

تمهيد :

نرمي نردين D_1 و D_2 وجوه كل واحد منهما مرقمة من 1 الى 6

❖ نعتبر الحدث A >> الحصول على مجموع أصغر من أو يساوي 5 <<

لدينا : $A=\{(i,j)/1\le i\le 6 \text{ و } 1\le j\le 6 \text{ و } i+j\le 5\}$

$=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

لدينا : $card\Omega=36$ و $cardA=10$

إذن : $P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

❖ نفترض أن النرد D_2 عين رقم 5

في هذه الحالة الحدث A هو منعدم لأنه كيفما كان الرقم الذي عينه النرد D_1 فإن المجموع يكون أكبر قطعا من 5

ليكن الحدث B >> النرد D_2 عين رقم 5<<

نقول أن احتمال الحدث A علما أن الحدث B قد تحقق هو منعدم . و نكتب : $P_B(A)=0$ أو $P(A/B)=0$

ملاحظة :

لدينا : $B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$

إذن : $A\cap B=\varnothing$

❖ ليكن C الحدث >> النرد D_1 عين رقم 1<<

$$C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$$

لكي يتحقق الحدث A علما أن C محقق يكفي أن يعين النرد D_2 رقم من الأرقام 1- 2- 3 و4 .

إذن لدينا أربع حالات من بين ستة . ومنه : $P_A(C)=P(C/A)=\dfrac{4}{10}$

ملاحظة :

لدينا $A\cap C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

ادن $cardA\cap C=4$

ومنه $P_C(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{cardA\cap C}{cardC}=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}$

أذن : $P(A\cap C)=P(C)\cdot P_C(A)$

❖ نفترض أن الحدث A محقق يعني أن مجموع الرقمين المحصل عليهما هو أقل من أو يساوي 5

ما هو احتمال C ؟

لكي يتحقق C علما أن A محقق لدينا 4 حالات من 10 إذن : $P_A(C)=P(C/A)=\dfrac{4}{10}$

ومنه $P_A(C)=\dfrac{cardA\cap C}{cardA}=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)}$

تعريف :

ليكن A وB حدثين ضمن فضاء احتمالي منته حيث : $P(A)\neq 0$

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو : $P_A(B)=P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

استنتاج و خاصية " صيغة الاحتمالات المركبة "

إذا كان A وB حدثين احتمالاهما غير منعدمين فإن : $P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$

تطبيق 1 :

تحتوي شركة مغربية على 60% من الرجال 20% منهم أجانب و 40% من النساء% 10 منهن أجنبيات .

نختار بطريقة عشوائية شخص من الشركة

1- ماهو احتمال الأحداث التالية :

A_1 >> رجل أجنبي<< A_2 >> رجل مغربي<<

A_3 >> امرأة أجنبية<< A_4 >> امرأة أجنبية<<

2- الشخص المختار رجل ما هو الاحتمال لكي يكون أجنبي

تطبيق2 :

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرتين سوداويين

1- نسحب بالتتابع و بدون احلال كرتين من الصندوق .

ماهو احتمال الحدث A >> الكرة الأولى بيضاء و الثانية سوداء<<

2- نسحب بالتتابع و بدون احلال ثلاث كرات من الصندوق.

ماهو احتمال الحدث B >> لكرة الأولى بيضاء و الثانية سوداء و الثالثة بيضاء<<

Les probabilités totales الاحتمالات الكلية

تمهيد:

نعتبر صندوق يحتوي على كرة حمراء و كرة بيضاء و كرة خضراء .

نسحب كرتين من الصندوق بالتتابع و بدون احلال

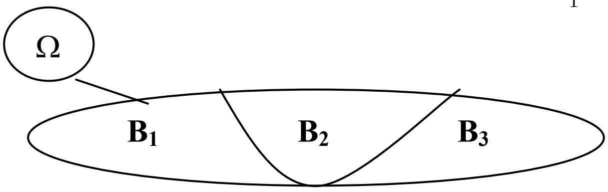
لدينا : $card\Omega=A_3^2=6$

نعتبر الأحداث : $B_1=\{(V,B)\}$

$$B_2 = \{(B,R),(V,R)\}$$
$$B_3 = \{(R,B),(R,V),(B,V)\}$$

لدينا : $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ و $B_1 \cap B_3 = \varnothing$ و $B_2 \cap B_3 = \varnothing$

و $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$



نقول أن الأحداث B وB و B تكون تجزيئا لكون الإمكانيات **partition d' un ensemble**

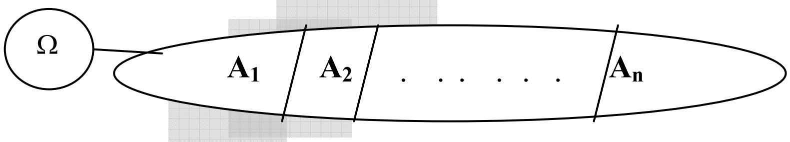
تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاء ا احتماليا منتهيا

نقول أن الأحداث A_1 و A_2 و......... A_n تكون تجزيئا لكون الإمكانيات Ω إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

أ-لكل i و j من $\{1,2,........,n\}$ حيث $i \neq j$. $A_i \cap A_j = \varnothing$

ب- $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$



ليكن B حدثا

لدينا : $B = B \cap \Omega = \Omega \cap B$

إذن : $B = (A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n) \cap B$

$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ...... \cup (A_n \cap B)$$

إذن : $p(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$

$$= p(A_1) \cdot p_{A_1}(B) + ... + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B)$$

خاصية :

لتكن A_1 و A_2 و.......و A_n تجزيئا ل Ω

نعتبر الحدث B

$$p(B) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(B) + ... + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B)$$

تطبيق :

لدينا ثلاث صناديق C_1 و C_2 و C_3

C_1 يحتوي على كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء

C_2 يحتوي على كرتين لونهما أبيض و كرتين لونهما أسود

C_3 يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرة سوداء

نختار بطريقة عشوائية صندوقا ثم نسحب منه كرة واحدة

أحسب الأحتمال الحصول على كرة بيضاء

ليكن الحدث B << الحصول على كرة بيضاء >>

لدينا الحدث C_1 << اختيار الصندوق C_1 >>

C_2 << اختيار الصندوق C_2 >>

R

C_3 <<اختيار الصندوق C_3>>

لدينا :

$$p(C_1)=p(C_2)=p(C_3)=\frac{1}{3}$$

و $\Omega=C_1\cup C_2\cup C_3$

اذن :

$$\begin{aligned}p(B)&=p(\Omega\cap B)\\&=p((C_1\cup C_2\cup C_3)\cap B)\\&=p(C_1\cap B)+p(C_2\cap B)+p(C_3\cap B)\\&=p(C_1)\cdot p_{C_1}(B)+p(C_2)\cdot p_{C_2}(B)+p(C_3)\cdot p_{C_3}(B)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

يمكن استعمال الشجرة

الاختيارات المتكررة

تمهيد:

1- عندما نقوم بتجربة عشوائية مكونة من إعادة نفس الاختبار n مرة . نقول إننا قمنا باختبارات متكررة . les épreuves repetees

مثال : 1) رمي نرد ثلاث مرات
2) رمي قطعة نقدية n مرة

2- ليكن D نردا وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6
نرمي النرد D؛ 5 مرات بالتتابع و نسجل الرقم المحصل عليه في كل رمية
ليكن C_k الحدث >> الحصول k مرة على الرقم 2<<
أحسب احتمال الحدث C_k حسب قيم k

خلاصة و خاصية :

ليكن A حدثا احتماله p في اختبار عشوائي
اذا أعيد هذا الاختبار n مرة فان احتمال وقوع الحدث A k مرة بالضبط هو : $\boxed{(k\le n)\ ,\ C_n^k(p)^k(1-p)^{n-k}}$

تطبيق :

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرتين سوداويين . نسحب 10 كرات بالتتابع و بإحلال
1- أحسب احتمال الحصول على 4 مرات بالضبط على كرة سوداء .
2- أحسب احتمال الحصول على 3 مرات بالضبط على كرة بيضاء.

المتغيرات العشوائية Les variables aléatoires

1) تمهيد:

1 - يحتوي صندوق على 8 كرات مرقمة من 1 إلى 8 . نسحب بالتتابع و بإحلال 4 كرات .
ليكن X هو عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا من بين الكرات الأربعة المسحوبة .
a) ماذا تعني الأحداث (X=0) ....(X=4)
b) أحسب احتمال كل من هذه الأحداث

2- صندوق يحتوي على كرتان لونهما أبيض و ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء . نسحب تأنيا ثلاث كرات .
و ليكن X هو عدد الألوان المحصل عليها .
a) حدد قيم X
b) ما هي الأحداث : (X=1) , (X=2) , (X=3) , (X=4) .
c) أحسب : P(X=1) , P(X=2) , P(X=3) .

2) تعريف:

ليكن (Ω,P) فضاءا احتماليا منتهيا . كل تطبيق من Ω نحو $\mathbb{R}$ يسمى متغيرا عشوائيا .

R

كتابة و ترميز :

- $X(\Omega)$ هي مجموعة الصور بالتطبيق **X**
- عادة نكتب $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....,x_k\}$ بحيث $x_1 \prec x_2 \prec ..... \prec x_k$

$(X=x_k)$ هو الحدث << **X** تأخذ القيمة x_k >>

$(X \le x_k)$ هو الحدث << **X** تأخذ قيمة أقل من أو تساوي x_k >>

3) قانون احتمال متغير عشوائي:

تمهيد :

استغلال التطبيق السابق .

x_i	1	2	3	4
P(X= x_i)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)	P(X=4)

تعريف :

قانون احتمال (أو توزيع) المتغير العشوائي **X** هو التطبيق f الذي يربط كل عنصر x_i من $X(\Omega)$ باحتمال الحدث ($X=x_i$) أي $f(x_i)=P(X=x_i)$

ملاحظة :

يتم تحديد قانون احتمال متغير عشوائي **X** بتحديد مجموعة قيم Ω $X(\Omega)$

$X(\Omega)=\{x_1,x_2,...x_k\}$

ثم حساب $P(X=x_i)=p_i$

ثم كتابة النتائج في جدول : يسمى جدول قانون احتمال المتغير العشوائي **X**

تطبيق : يونيو 1999 مراكش

تتكون فرقة مسرحية من 3 رجال و 3 نساء .

بعد انتهاء عرض المسرحي، يخرج جميع اعضاء الفرقة واحد تلو الأخر من وراء الستار و يبقون لتحية الجمهور .

ليكن **X** المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الرجال الذين ظهروا للجمهور قبل ظهور أول امرأة .

1- حدد قيم **X** .

2- بين أن : P(X=1)= 3/10 و P(X=2)=3/20

3- أعط قانون احتمال **X** .

4) الأمل الرياضي:

تعريف :

ليكن **X** متغيرا عشوائيا معرفا على فضاء احتمالي منته (Ω, P)

العدد الحقيقي $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$ يسمى الأمل الرياضي للمتغير **X** .

حيث : $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...x_n\}$ و $p_i=P(X=x_i)$

ملاحظة:

$$\boxed{E(X)=\bar{X}}$$

R

5) المغايرة و الانحراف الطرازي La variance et l'ecart-type

تعريف :

ليكن X متغيرا عشوائيا بحيث : $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...x_n\}$

و E(X) هو الأمل الرياضي للمتغير X .

العدد: $\boxed{V(X)=\sum_{i=1}^{n}p\left(x-E(X)\right)^2}$ يسمى مغايرة X

و العدد: $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$ يسمى الانحراف الطرازي ل X حيث $p_i=P(X=x_i)$ لكل $1\le i\le n$

ملاحظة 1 :

لدينا
$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}p\left(x-E(X)\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i^2-2x_iE(X)+E(X)\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2-2E(X)\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+E(X)^2\sum_{i=1}^{n}p_i$$
$$=E(X^2)-2(E(X))^2+(E(X))^2$$
$$=E(X)-(E(X))^2$$

اذن : $\boxed{V(X)=E(X)-(E(X))^2}$

ملاحظة 2 : $V(X)\ge 0$

6) دالة التجزيئ La fonction de répartition

تمهيد :

ليكن (Ω,P) فضاءا احتماليا منتهيا. و X متغير عشوائيا بحيث : $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...x_n\}$

بحيث: $x_1\prec x_2\prec....\prec x_n$

لدينا : $\mathbb{R}=]-\infty,x_1]\cup]x_1,x_2]\cup]x_2,x_3]\cup.....\cup]x_n,+\infty[$

ليكن x عددا حقيقيا :

الحالة 1:

اذا كانت : $x=x_i$ و $i\in\{1,2,....,n\}$

$$(X\prec x_i)=(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup....\cup(X=x_{i-1})$$

الحالة 2:

اذا كانت : $x_i\prec x\prec x_{i+1}$

$$(X\prec x_i)=(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup....\cup(X=x_i)$$

الحالة 3 : $x\le x_i$ $\qquad (X\prec x)=\varnothing$

الحالة 4 :

$x_n\prec x$ $\qquad (X\prec x)=\Omega$

إذا ربطنا كل عدد x باحتمال الحدث $(X\prec x)$

R

$$F \quad : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto P(X \prec x)$$

فإننا عرفنا دالة تسمى دالة التجزيئ للمتغير **X**

تعريف :

ليكن **X** متغيرا عشوائيا معرفا على فضاء احتمالي منته (Ω, P)

الدالة **F** المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $F(X) = P(X \prec x)$

تسمى دالة التجزيئ للمتغير العشوائي **X**

مثال : يكون المطلوب فيه هو تحديد دالة التجزيئ و تمثيلها مبيانيا .

7) التوزيع الحداني :

تذكير :

إذا كانت تجربة عشوائية تتكون من إعادة نفس الاختبار **n** مرة.و **A** حدثا من هذا الاختيار حيث : $P(A) = p$

فان احتمال أن يتحقق الحدث **A** **k** مرة بالضبط $(k \le n)$

هو : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

إذا اعتبرنا المتغير العشوائي المرتبط بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث **A**

فإن: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

هذا المتغير العشوائي يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا

و العددان **n** و **p** يسميان وسيطا المتغير الحداني **X**

خاصية:

ليكن **X** متغيراعشـــوائيا حدانيا و سيطاه **n** و **p** :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

ملاحظة :

المتغير العشوائي الحداني يسمى أيضا قانون حداني أو توزيع حداني

مبرهنة :

ليكن **X** متغيرا عشوائيا حدانيا و سيطاه **n** و **p** .

لدينا : $V(X) = np(1-p)$ و $E(X) = np$

تطبيقات:

أنظر السلسلة.

صندوق يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرتين لونهما أسود .

نسحب تانيا ثلاث كرات من الصندوق .

ليكن **X** المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات السوداء المسحوبة

1- حدد قيم **X** . أعط قانون احتمال **X** .

2- أحسب : **E(X)** و **V(X)** و **σ(X)**

تمارين حساب الاحتمالات

التمرين الاول
لتكن C,B,A احداث ضمن فضاء احتمالي منته.
اكتب الاحداث التالية
* الحدث A يتحقق بمفرده
* فقط B وC يتحققان
* الاحداث C,B,A تتحقق في نفس الوقت
* على الاقل حدث من C,B,A يتحقق
* حدثان و حدثان فقط من بين C,B,A يتحققان
* أي حدث من بين C,B,A لن يتحقق

التمرين الثاني
ليكن $\Omega=\{1.2.3\}$. و (Ω,p) فضاء احتمالي.
حيث $p(\{1,2\})=\frac{7}{12}$ و $p(\{2,3\})=\frac{3}{4}$
أ- احسب $p(2)$ ثم $p(1)$ و $p(3)$
ب- $p\left(\{2;3\}/\{1;2\}\right)$

التمرين الثالث
1- احسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون
2- احسب احتمال على كرة واحدة بيضاء على الاقل
3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 0 اذا حصلنا على كرتين من نفس اللون و يأخذ القيمة 1 اذا حصلنا على كرتين مختلفتي اللون
أ- حدد $X(\Omega)$
ب- اعط قانون احتمال X
ج- احسب $E(X)$ ثم $\sigma(X)$
د- حدد ثم انشئ دالة التجزيئ   ه- احسب $p(X\prec 1.5)$

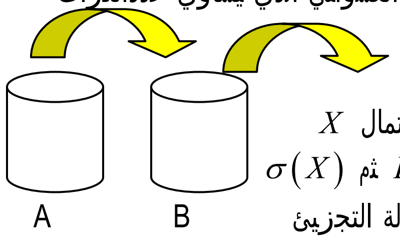
التمرين الرابع
نرمي نردين في الهواء مرة واحدة
1- احسب احتمال الاحداث التالية
A : الحصول على مجموع يساوي 7
B : الحصول على نفس الرقم
C : الحصول على مجموع اصغر من او يساوي 4
2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع الرقمين المحصل عليهما
أ-اعط قانون احتمال X

التمرين الخامس
يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون احلال 3 كرات
1- احسب احتمال الحصول على كرة واحدة بالظبط بيضاء
2- احسب احتمال الحصول كرة بيضاء خلال السحبة الثانية
3- احسب احتمال الحصول كرتين من نفس اللون خلال السحبتين الثانية و الثالثة علما ان الكرة الاولى بيضاء
4- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة
أ- حدد $X(\Omega)$ ب- اعط قانون احتمال X
ج- احسب $p\left(\frac{1}{2}\prec X\prec\frac{5}{2}\right)$

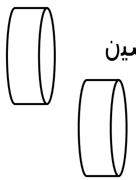
التمرين السادس
اجب على نفس اسئلة التمرين 5 اذا كان السحب باحلال

التمرين السابع
نعتبرمجتمعامكونا من 44% من الرجال و 56% من النساء
10% من الرجال لا يدخنون 20% من النساء لا يدخن
اخذنا و بكيفية عشوائية احد الاشخاص
1- احسب احتمال ان يكون هذا الشخص رجلا يدخن
2- احسب احتمال ان يكون هذا الشخص امرأة تدخن
3- احسب احتمال ان يكون هذا الشخص يدخن
4- احسب احتمال ان يكون هذا الشخص رجلا علما انه يدخن

التمرين الثامن
يحتوي صندوق Aعلى 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء
و صندوق B على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من A نضعها في B ثم
نسحب عشوائيا كرة واحدة من B
1- احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين
2- احسب احتمال الحصول على كرتين مختلفتي اللون
3-ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عددالكرات البيضاء المسحوبة
أ- حدد $X(\Omega)$
ب- اعط قانون احتمال X
ج- احسب $E(X)$ ثم $\sigma(X)$
د- حدد ثم انشئ دالة التجزيئ



التمرين التاسع
يحتوي صندوق على بيدقة تحمل مجهين ابيضين
و بيدقة تحمل وجها ابيضا وآخر اسودا.
نختار عشوائيا بيدقة ثم نرميها في الهواء
1- احسب احتمال ظهور وجه ابيض
2- علما انه ظهر وجه ابيض احسب احتمال ان يكون الوجه المخفي اسود



التمرين العاشر
نرمي نردا غير مغشوش في الهواء 5 مرات
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات الذي يظهر فيها العدد 5.
أ- حدد $X(\Omega)$ ب- اعط قانون احتمال X
ج- احسب $E(X)$ ثم $\sigma(X)$