ملخصات مركزة لدروس مادة:

الرياضيات

السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة العلوم التجريبية
  - مسلك علوم حياة و الأرض
  - مسلك العلوم الفيزيائية
  - مسلك العلوم الزراعية
- شعبة العلوم و التكنولوجيات الصناعية
  - مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية
  - مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

من إعداد: الأستاذ محمد الكيال


وقل رب زدني علما

الــــفـــــهـــــرس

إشارة حدانية

إشارة و تعميل ثلاثية الحدود (محمد الكيال)

➥ إشارة الحدانية: $ax+b$ $(a \neq 0)$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a} \quad$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	إشارة a

➥ إشارة و تعمل ثلاثية الحدود: ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

نضع : $P(x) = ax^2+bx+c$

المميز		حل المعادلة: $x \in \mathbb{R}$ $P(x)=0$	إشارة $P(x)$	تعميل $P(x)$
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$S = \phi$	x: $-\infty$ … $+\infty$ ؛ $P(x)$: إشارة a	غير ممكن بواسطة حدانيتين
	$\Delta = 0$	$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ $\quad \frac{-b}{2a} \quad$ $+\infty$ ؛ $P(x)$: إشارة a | إشارة a	$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
	$\Delta > 0$	$S = \{x_1, x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ $\quad x_1 \quad x_2 \quad$ $+\infty$ ؛ $P(x)$: إشارة a | عكس إشارة a | إشارة a	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$

فإن: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ و $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

متطابقات هامة
مجموعة تعريف دالة عددية (محمد الكيال)

↩متطابقات هامة.

لكل عددين حقيقيين a وb

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

↩مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:	مجموعة تعريف الدالة f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0$ و $Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\right.$ و $\left.Q(x) \neq 0\right\}$

(محمد الكيال) **النهايات**

↩ نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذا كان n عددا زوجيا فإن:	إذا كان n عددا فرديا فإن:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

↩ نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة	نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

↩ نهايات الدوال المثلثة:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

↩ نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	⇐	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$		$\sqrt{\ell}$
$+\infty$		$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

↩ النهايات و الترتيب:

$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x) - \ell \rvert \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$
$\left.\begin{array}{l} u(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

↩ العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش ع م

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\times g(x)]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش ع م

نهاية خارج دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش ع م	ش ع م

ملاحظة عامة

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال

(محمد الكيال)

الاتصال في نقطة:

تعريف

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:

$$f \text{ متصلة على يمين } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصلة على يسار } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

f متصلة على يمين و على يسار x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة في x_0

الاتصال على مجال:

تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$

تكون f متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f+g$, $f \times g$, kf متصلة على المجال I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$
فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	المجال $f(I)$	
	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$\left[f(a);f(b)\right]$	$\left[f(b);f(a)\right]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

مبرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a)\times f(b)<0$
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

إذا كان: $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$	إذا كان: $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$
فإن: $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α	فإن: $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'(x_0)$

معادلة المماس لمنحنى دالة- الدالة التآلفية المماسة لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

- معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 و هي تقريب للدالة f بجوار x_0

قابلية الاشتقاق على اليمين- قابلية الاشتقاق على اليمين :

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يمين x_0 و يرمز له بالرمز: $f'_d(x_0)$

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يسار x_0 و يرمز له بالرمز: $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و
$f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k\in\mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$(r\in\mathbb{Q}^*-\{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

⬅العمليات على الدوال المشتقة:

$(u+v)'=u'+v'$	$(u-v)'=u'-v'$	$(k\in\mathbb{R})\quad (ku)'=k(u)'$
$(uv)'=u'v+uv'$		$\left(u^n\right)'=nu'.u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$		$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

⬅مشتقة مركب دالتين- مشتقة دالة الجذر:

$(u\circ v)'=\left[u'\circ v\right]\times v'$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

⬅الاشتقاق و تغيرات دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ ⟺ f تزايدية على المجال I
- $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in I$ ⟺ f تناقصية على المجال I
- $f'(x)=0 \quad \forall x\in I$ ⟺ f ثابتة على المجال I

⬅الاشتقاق و التأويل الهندسي:

النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي المنحنى(Cf) يقبل:
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a \quad (a\neq 0)$	f قابلة للاشتقاق في x_0	مماسا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a \quad (a\neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ ؛ معامل الموجه لحامله هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a \quad (a\neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ ؛ معامل الموجه لحامله هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل

محور التماثل – مركز التماثل
نقطة الانعطاف

(محمد الكيال)

محور التماثل:

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

- $(2a - x) \in D_f \qquad \forall x \in D_f$
- $f(2a - x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$

حالة خاصة: إذا كانت $a = 0$ فإن f دالة زوجية

مركز التماثل:

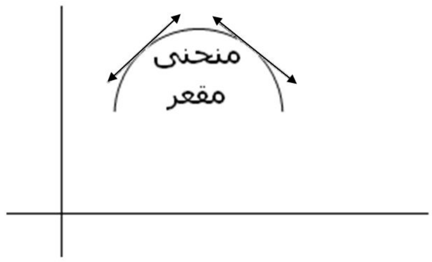
يكون النقطة $I(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

- $(2a - x) \in D_f \qquad \forall x \in D_f$
- $f(2a - x) + f(x) = 2b \qquad \forall x \in D_f$

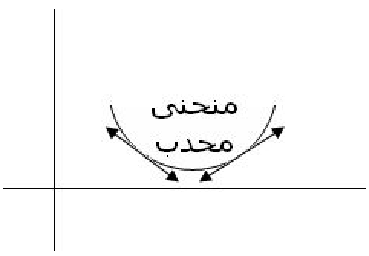
حالة خاصة: إذا كانت $a = b = 0$ فإن f دالة فردية

التقعر- التحدب- نقطة الانعطاف:

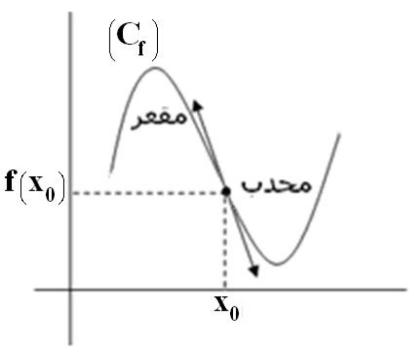
يكون منحنى دالة مقعرا على مجال إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على هذا المجال
إذا كان: $f''(x) \le 0 \qquad \forall x \in I$ فإن: (C_f) مقعر على المجال I



يكون منحنى دالة محدبا على مجال إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على هذا المجال
إذا كان: $f''(x) \ge 0 \qquad \forall x \in I$ فإن: (C_f) محدب على المجال I

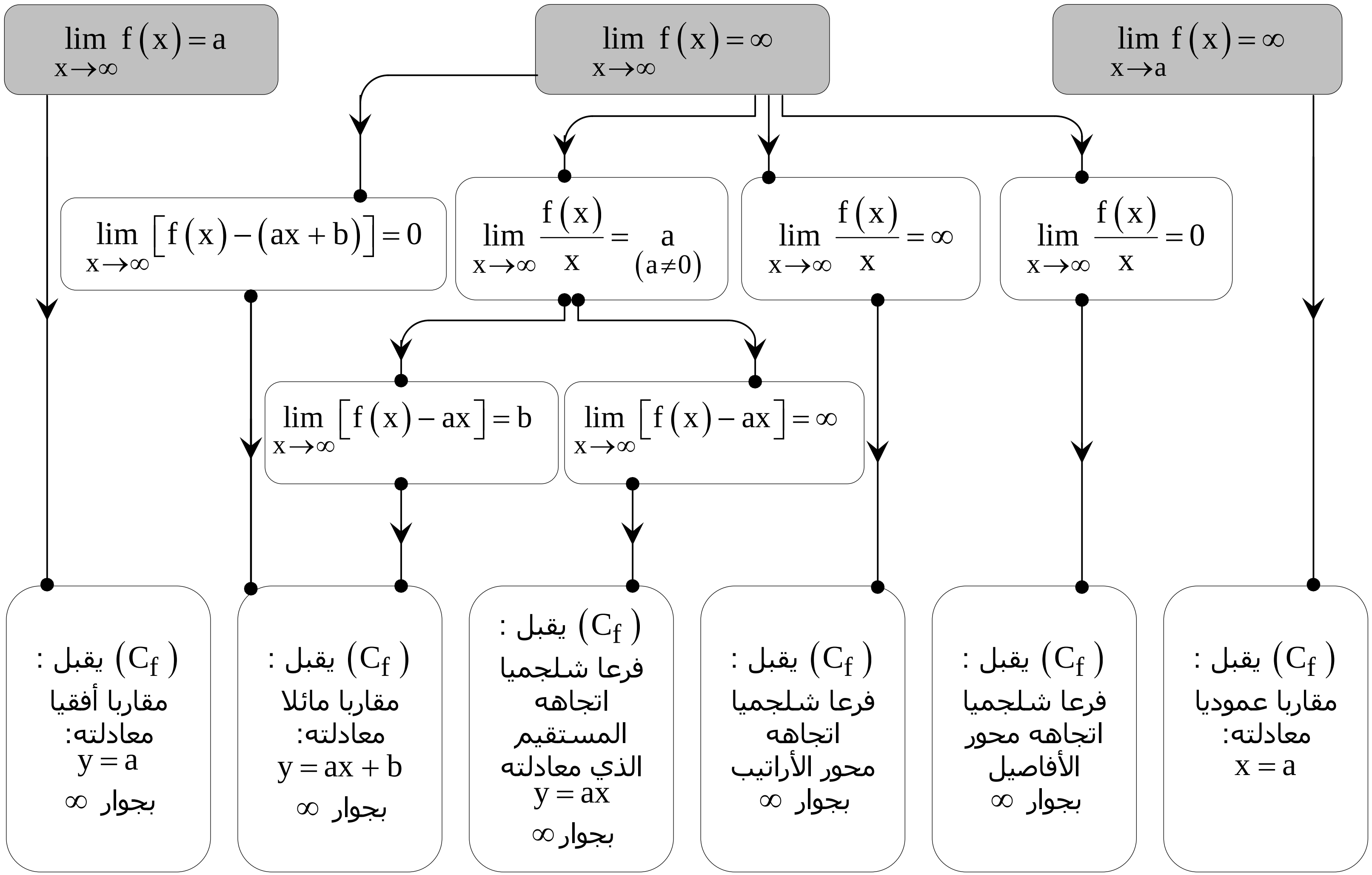


نقطة انعطاف منحنى دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها يتغير تقعر هذا المنحنى
إذا كانت f'' تنعدم في x_0 مع تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0
إذا كانت f' تنعدم في x_0 دون تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0



الفروع اللانهائية

(محمد الكيال)



الدالة العكسية (محمد الكيال)

خاصية:

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
فإن f تقبل دالة عكسية معرفة من المجال $f(I)$ نحو المجال I
و يرمز لها بالرمز: f^{-1}

نتائج:

- $\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ x\in I \end{cases}$
- $(f^{-1}of)(x)=x \qquad \forall x\in I$
- $(fof^{-1})(y)=y \qquad \forall y\in f(I)$

تحديد صيغة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
ليكن x عنصرا من المجال $f(I)$ و y عنصرا من المجال I
بالاستعانة بالتكافؤ التالي: $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$
و بتحديد y بدلالة x نستنتج صيغة $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من $f(I)$

اتصال الدالة العكسية:

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
فإن الدالة العكسية f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$

اشتقاق الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
و ليكن x_0 عنصرا من المجال $f(I)$ و $y_0=f(x_0)$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$
فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0
و لدينا: $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

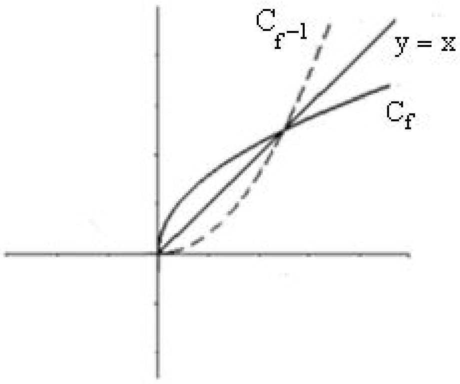
لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عل المجال I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على المجال I
فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$
و لدينا: $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} \qquad \forall x\in f(I)$

➥رتابة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I
الدالة العكسية f^{-1} لها نفس منحنى تغير الدالة f

➥التمثيل المبياني للدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I
التمثيلان المبيانيان للدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ممنظم متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم



➥ملاحظات هامة:

المنحنى (C_f)	المنحنى $(C_{f^{-1}})$
$A(a,b) \in (C_f)$	$A'(b,a) \in (C_{f^{-1}})$
يقبل مقاربا عموديا معادلته : $x = a$	يقبل مقاربا أفقيا معادلته : $y = a$
يقبل مقاربا أفقيا معادلته : $y = b$	يقبل مقاربا عموديا معادلته : $x = b$
يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y = ax + b$	يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ و يتم تحديد المعادلة انطلاقا من العلاقة: $x = ay + b$
يقبل مماسا (أو نصف مماس) عموديا	يقبل مماسا (أو نصف مماس) أفقيا
يقبل مماسا (أو نصف مماس) أفقيا	يقبل مماسا (أو نصف مماس) عموديا

دالة الجذر من الرتبة n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

القوى الجذرية

(محمد الكيال)

خاصية وتعريف:

الدالة : $x\mapsto x^n$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ }:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$$
$$x\mapsto\sqrt[n]{x}$$

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow x=y^n$$

حالات خاصة:

- $\sqrt{x}=\sqrt[2]{x}$
- العدد: $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب ل x

خاصيات:

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x^n}=x$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$$
$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$$
$$\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x>y$$

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad\forall(m;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

$$\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\times y}$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$$
$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\qquad(y\neq0)$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$
$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}$$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي:	مجموعة تعريفها:
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$D_f=[0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_u$ و $u(x)\geq0\}$

النهايات:

$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}$
$\ell\geq0$	$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

➥الاتصال:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

➥الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا: $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{\left[u(x)\right]^{n-1}}} \qquad \forall x \in I$

➥حل المعادلة: $x^n = a \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (a \in \mathbb{R})$

	n عدد فردي	n عدد زوجي
$a > 0$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$	$S = \varnothing$

➥القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

ليكن $r = \dfrac{p}{q}$ عددا جذريا غير منعدم حيث: $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$ $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \qquad \forall x \in]0,+\infty[$

ملاحظات:

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
- مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = \left[u(x)\right]^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*)$
  هي: $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\right\}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times u'(x) \times \left[u(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}$

لكل عنصرين x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل عنصرين r و r' من $\mathbb{Q}^*$
$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'} \qquad x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r} \qquad (x \times y)^r = x^r \times y^r$
$\dfrac{1}{x^{r'}} = x^{-r'} \qquad \left(\dfrac{x^r}{y^{r'}}\right) = x^{r-r'}$

المتتاليات العددية (محمد الكيال)

المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية

	متتالية حسابية	متتالية هندسية
تعريف	$u_{n+1}=u_n+r$ r هو الأساس	$u_{n+1}=q\times u_n$ q هو الأساس
الحد العام	$u_n=u_p+(n-p)r$ $(p\leq n)$	$u_n=u_p\times q^{n-p}$ $(p\leq n)$
مجموع حدود متتابعة	$u_p+\ldots+u_n=(n-p+1)\times\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$	$u_p+\ldots+u_n=u_p\times\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$ $(q\neq 1)$
a و b و c ثلاثة حدود متتابعة	$2b=a+c$	$b^2=a\times c$

المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة بالعدد M $\Leftrightarrow \forall n\in I \quad u_n\leq M$
- $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة بالعدد m $\Leftrightarrow \forall n\in I \quad u_n\geq m$
- $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

رتابة متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية $\Leftrightarrow \forall n\in I \quad u_{n+1}\leq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n\in I \quad u_{n+1}\geq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n\in I \quad u_{n+1}=u_n$

ملاحظة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية حدها الأول: u_p

- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية فإن: $u_n\leq u_p \quad \forall n\in I$
- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية فإن: $u_n\geq u_p \quad \forall n\in I$

نهاية متتالية:

نهاية المتتالية $\left(n^{\alpha}\right)$ حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$

نهاية المتتالية الهندسية $\left(q^{n}\right)$ حيث: $q \in \mathbb{R}$:

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
المتتالية $\left(q^{n}\right)$ ليس لها نهاية	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = +\infty$

مصاديق التقارب:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

متتالية من النوع $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$:

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $f\left(I\right) \subset I$ و a عنصرا من I

إذا كانت $\left(u_n\right)$ متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة $f\left(x\right) = x$

➥الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

نقول أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

إذا تحقق الشرطان التاليان:

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- $F'(x)=f(x) \qquad \forall x\in I$

خاصيات:

كل دالة متصلة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن:

جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي:

$$x\mapsto F(x)+k \qquad (k\in\mathbb{R})$$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I

وليكن x_0 عنصرا من I و y_0 عنصرا من $\mathbb{R}$

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط البدئي:

$$F(x_0)=y_0$$

➥الدوال الأصلية: لمجموع دالتين- لجداء دالة و عدد حقيقي:

خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و k عددا حقيقيا

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على المجال I على التوالي فإن:

- $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I
- kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$F(x)$
	$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
	x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
	$\sin x$	$-\cos x + k$
	$\cos x$	$\sin x + k$
	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
	e^x	$e^x + k$

استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية:

	$f(x)$	$F(x)$
	$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$
$(a \in \mathbb{R})$	$a\,u'(x)$	$a\,u(x) + k$
	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$
	$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$
	$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$u'(x) \times [u(x)]^r$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$
	$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$(a \neq 0)$	$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + k$
$(a \neq 0)$	$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + k$

$(k \in \mathbb{R})$

التكامل (محمد الكيال)

تكامل دالة متصلة على قطعة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$
تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

خاصيات:

الخطانية:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\in\mathbb{R})$	$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

علاقة شال:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

التكامل و الترتيب:

إذا كان: $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$	إذا كان: $f(x)\leq g(x) \quad \forall x\in[a,b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$
القيمة المتوسطة للدالة على المجال $[a,b]$ هي العدد الحقيقي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

المكاملة بالأجزاء:

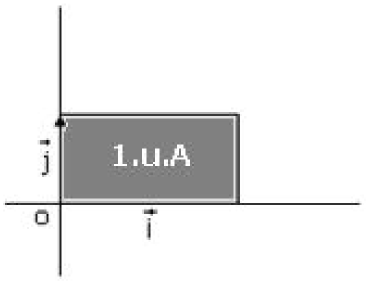
لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a,b]$ بحيث تكون 'f و'g متصلتين على المجال $[a,b]$

$$\int_a^b [f'(x)\times g(x)]dx = [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x)\times g'(x)]dx$$

حساب مساحة حيز:

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$
وحدة المساحة : $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة o و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1.u.A = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$



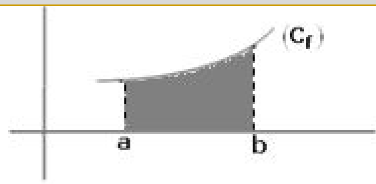
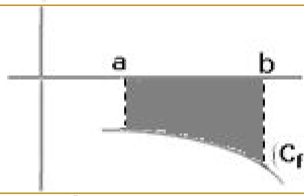
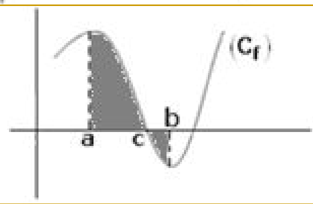
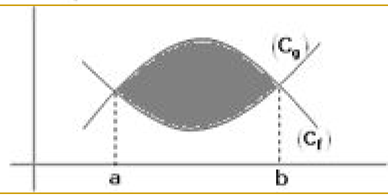
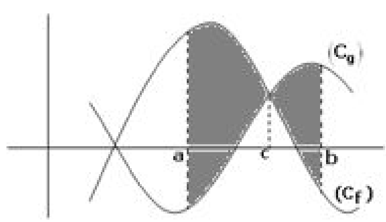
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=a$ و $y=b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right).u.A$$

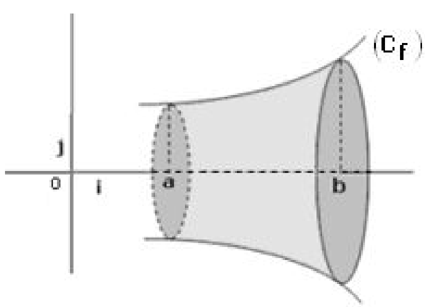
لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين C_f و C_g ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=a$ و $y=b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right).u.A$$

حالات خاصة:

الرسم	ملاحظات	مساحة الحيز الرمادي في الرسم
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right).u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right).u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right).u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right).u.A$
	• (C_f) فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right).u.A$

حساب حجم :



حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$

هو: $$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2dx\right]u.v$$

الدوال اللوغارتمية (محمد الكيال)

الدالة اللوغاريتم النبيري:

تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1

ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n\ln|x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

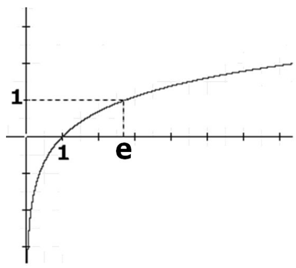
الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$
إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$	إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا: $\left(\ln\left[u(x)\right]\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $\quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني:



إشارة ln :

x	0	1	$+\infty$
ln x	||	-	+

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$

حيث: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$

حالة خاصة: الدالة ℓog_{10} تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: ℓog

استنتاجات و خاصيات:

$\ell og_a 1 = 0$ $\ell og_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell og_a y$ $(r \in \mathbb{Q})\ \ell og_a x^r = r\ell og_a x$ $\ell og_a \frac{1}{x} = -\ell og_a x$ $\ell og_a \left(\frac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim_{x\to+\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim_{x\to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim_{x\to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

الدوال الأسية

الدالة الأسية النبيرية

تعريف:

الدالة $x \mapsto e^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\ln$ و تسمى الدالة الأسية النبيرية

استنتاجات وخاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\ln e^x = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$ $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad e^{\ln x} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{\left[u(x)\right]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = +\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

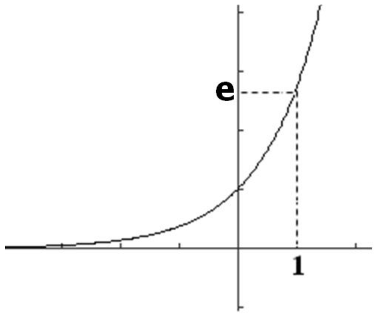
الاتصال:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$
إذا كانت دالة u متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق

الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\left(e^x\right)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	إذا كانت دالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني:



الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة $x \mapsto a^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_a$ و تسمى الدالة الأسية للأساس a

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x = e^{x\ln a}$ $\log_a\left(a^x\right) = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \qquad \left(a^x\right)^r = a^{rx}$ $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\qquad a^{\log_a x} = x$	
$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$	

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

المشتقة:

$$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x$$

الأعداد العقدية

(محمد الكيال)

مجموعة الأعداد العقدية هي: $\mathbb{C}=\{z=a+ib/(a;b)\in\mathbb{R}^2 \text{ و } i^2=-1\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- $a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\operatorname{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\operatorname{Im}(z)$

حالتان خاصتان: إذا كان: $\operatorname{Im}(z)=0$ فإن z هو عدد حقيقي

إذا كان: $\operatorname{Re}(z)=0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

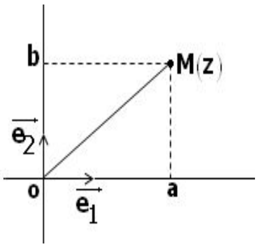
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z=z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(z')$ و $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(z')$

التمثيل المبياني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

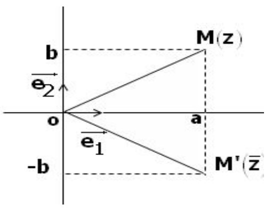
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب: $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z=\operatorname{Aff}(\overrightarrow{OM})$

مرافق عدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

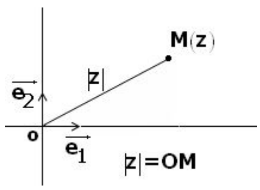
مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\overline{z}=a-ib$



$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$	$\overline{z}=z \Leftrightarrow$ z عدد حقيقي
$\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$	$\overline{z}=-z \Leftrightarrow$ z عدد تخيلي صرف
$\overline{z^n}=\overline{z}^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$	$z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z'\neq 0)$	$z\overline{z}=[\operatorname{Re}(z)]^2+[\operatorname{Im}(z)]^2$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\|z^n\| = \|z\|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$
$\|-z\| = \|z\|$	$\|\bar{z}\| = \|z\|$
$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|} \quad (z' \neq 0)$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|}$

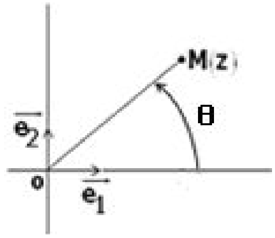
⬅الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta[2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta[2\pi]$

• الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$$

• الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$

• $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$	• $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr';\theta+\theta']$	• $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
• $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$	• $\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$	• $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
• $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$	• $-[r,\theta] = [r, \pi+\theta]$	• $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
• $\arg z^n \equiv n \arg z \ [2\pi]$	• $[r,\theta]^n = [r^n; n\theta]$	• $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
• $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$	• $\frac{1}{[r';\theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$	• $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
• $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') \ [2\pi]$	• $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta-\theta'\right]$	• $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta+2k\pi] = [r,\theta]$	• z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$ • z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

⬅صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

⬅صيغتا أولير:

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

⬅حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $z \in \mathbb{C}$ $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة		مجموعة حلول المعادلة
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	**$a > 0$**	$S = \{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

➥حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث: $z\in\mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$	$\Delta>0$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

➥مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB=\left\|z_B-z_A\right\|$
منتصف I القطعة $[A;B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$	$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\left\|z-z_A\right\|=r$ $(r>0)$	• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$\left\|z-z_A\right\|=\left\|z-z_B\right\|$	• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

➥تمثلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل:	التمثيل العقدي:
الإزاحة: $t_{\vec{u}}$	$z'=z+b$ حيث: b لحق المتجهة $\vec{u}$
التحاكي: $h(\Omega;k)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω
الدوران: $r(\Omega;\theta)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω

المعادلات التفاضلية

(محمد الكيال)

المعادلة التفاضلية	الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y' = ay + b$ $(a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $(a \in \mathbb{R})$

المعادلة التفاضلية	معادلتها المميزة	المعادلة المميزة تقبل :		الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = a^2 - 4b)$	$\Delta > 0$	حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	حلين عقديين مترافقين: $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

في سياق هذا الملخص ليكن الفضاء منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

الصيغة التحليلة ل: الجداء السلمي- منظم متجهة- الجداء المتجهي:

لتكن $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ و $\vec{v}\left(a',b',c'\right)$ متجهتين من ϑ_3

- $\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'+cc'$
- $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & a & a'\\ \vec{j} & b & b'\\ \vec{k} & c & c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$

المسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي:

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

المسافة بين نقطة M و مستوى $\left(P\right)$ معادلته الديكارتية: $ax+by+cz+d=0$ هي:

$$d\left(M,\left(P\right)\right)=\frac{\left|ax_M+by_M+cz_M+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

المسافة بين نقطة M و مستقيم $\Delta\left(A,\vec{u}\right)$ هي:

$$d\left(A,\left(\Delta\right)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

معادلة مستوى:

$(P):ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow \vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية على المستوى $\left(P\right)$

إذا كانت A وB وC نقط غير مستقيمة فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى $\left(ABC\right)$

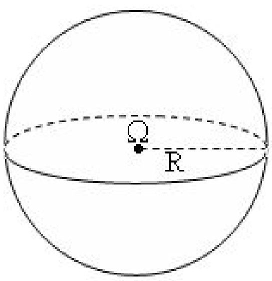
و في هذه الحالة يمكن تحديد معادلة المستوى $\left(ABC\right)$ بالاستعانة بالتكافؤ التالي :

$$M\in\left(ABC\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

معادلة فلكة:

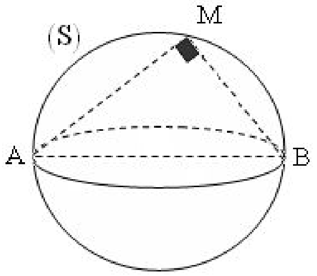
معادلة فلكة مركزها $\Omega\left(a,b,c\right)$ و شعاعها R هي:

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$$



معادلة فلكة (S) أحد أقطارها $[AB]$ يمكن تحديدها

بالاستعانة بالتكافؤ التالي: $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$

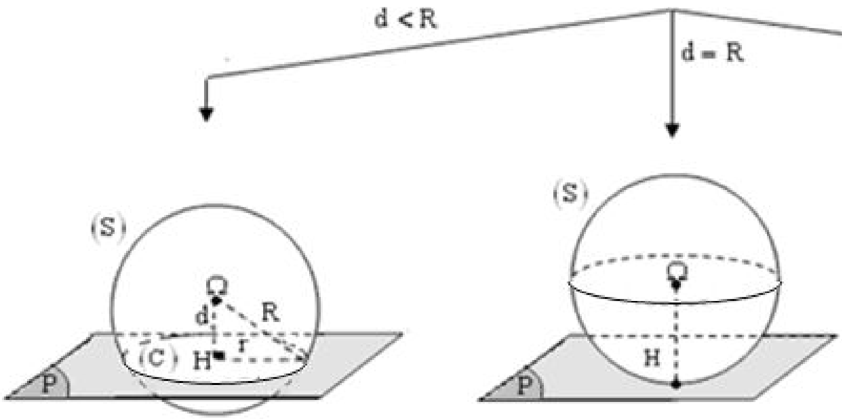


<u>ملاحظة</u>: الفلكة (S) مركزها Ω منتصف $[AB]$ و شعاعها $\frac{AB}{2}$

⬅ <u>تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستوى</u> $(P): ax + by + cz + d = 0$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega;(P))$



المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)

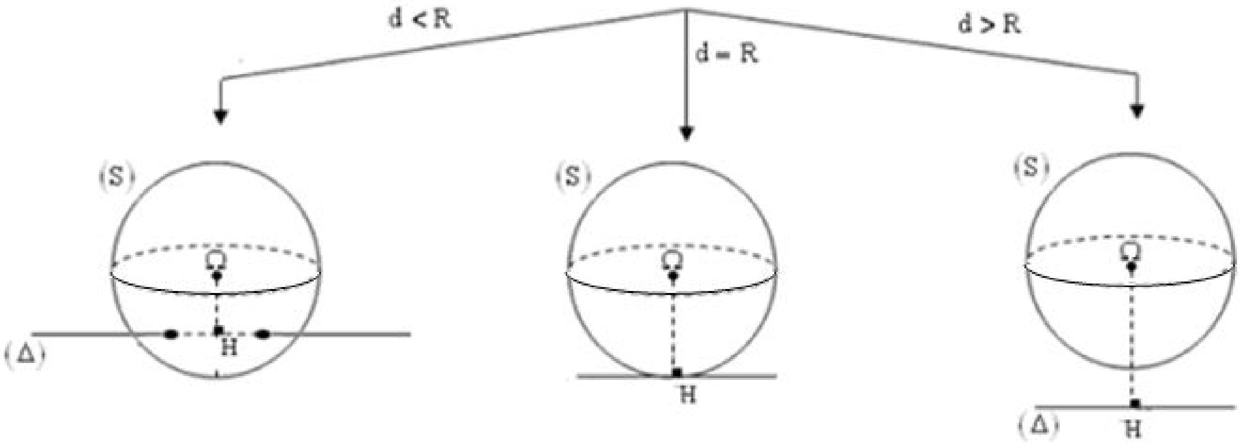
المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها: H شعاعها: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

⬅ <u>تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستقيم (Δ):</u>

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Δ)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega;(\Delta))$



المستوى (P) و الفلكة (S) لا يتقاطعان

المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين

التعداد (محمد الكيال)

رئيسي مجموعة:

تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $\mathrm{Card}E$

حالة خاصة: $\mathrm{Card}\varnothing = 0$

خاصية:

A و B مجموعتان منتهيتان

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}A + \mathrm{Card}B - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

متمم مجموعة:

تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E
متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\overline{A}$
حيث $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

ملاحظات:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $\mathrm{card}\overline{A} = \mathrm{card}E - \mathrm{card}A$

المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا $(p \in \mathbb{N}^*)$
إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة
و كان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة
....
و كان الاختيار p يتم ب n_p كيفية مختلفة
فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$

الترتيبات بتكرار- الترتيبات بدون بتكرار:

الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$
عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

الترتيبات بدون تكرار:

- خاصية:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \le n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو:

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{p من العوامل}}$$

- حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

و عددها : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

التأليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p $(p \le n)$

يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر

و عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p:

$n \in \mathbb{N}^*$		$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $0! = 1$	
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$		$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^n = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$		$C_n^p = C_n^{n-p}$	

عدد إمكانات ترتيب n عنصر:

إذا كان لدينا n عنصر من بينها

n_1 عنصر من النوع A $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$

و n_2 عنصر من النوع B

و n_3 عنصر من النوع C

فإن إمكانيات ترتيب هذه العناصر هو : $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!}$

بعض أنواع السحب:

نحسب p عنصر من بين n عنصر $(p \le n)$ و نلخص النتائج في الجدول التالي:

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة هو:	الترتيب
آني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون إحلال	A_n^p	مهم

مصطلحات

المصطلح الاحتمالي	معناه
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانيات	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزء من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A\cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A\cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\overline{A}$ $\left(A\cap\overline{A}=\varnothing \text{ و } A\cup\overline{A}=\Omega\right)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A\cap B=\varnothing$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- عندما يستقر احتمال حد ث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو: p_i

ونكتب: $P(\{\omega_i\})=p_i$

- احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث

أي إذا كان $A=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو:

$$p(A)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+p(\omega_3)+...+p(\omega_n)$$

خاصيات:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- $p(\varnothing)=0$ و $p(\Omega)=1$
- $0\leq p(A)\leq 1$ لكل حدث A من Ω
- احتمال اتحاد حدثين:

لكل حدثين A و B من Ω

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ إذا كان A و B غير منسجمين

- احتمال الحدث المضاد:

لكل حدث A من Ω هو: $p(\overline{A})=1-p(A)$

فرضية تساوي الاحتمالات:

تعريف:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω

فإن احتمال كل حدث A من Ω هو: $p(A)=\dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

الاحتمال الشرطي- استقلالية حدثين:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A)\neq 0$

احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد: $p_A(B)=p\left(B/A\right)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

نتيجة:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A)\times p(B)\neq 0$

لدينا: $p(A\cap B)=p(A)\times p\left(B/A\right)=p(B)\times p\left(A/B\right)$

تعريف:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)\Leftrightarrow A$ و B حدثان مستقلان

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيئا ل Ω

$(\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ و $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega)$

لكل حدث A من Ω:

$$p(A)=p(\Omega_1)\times p\left(A/\Omega_1\right)+p(\Omega_2)\times p\left(A/\Omega_2\right)$$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين:

- تحديد $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X=x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1;2;...;n\}$

الأمل الرياضي- المغايرة- الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه معرف بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

تعاريف:

الأمل الرياضي للمتغير X	$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+...+x_n\times p_n$
المغايرة للمتغير X	$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$
الانحراف الطرازي للمتغير X	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية

نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

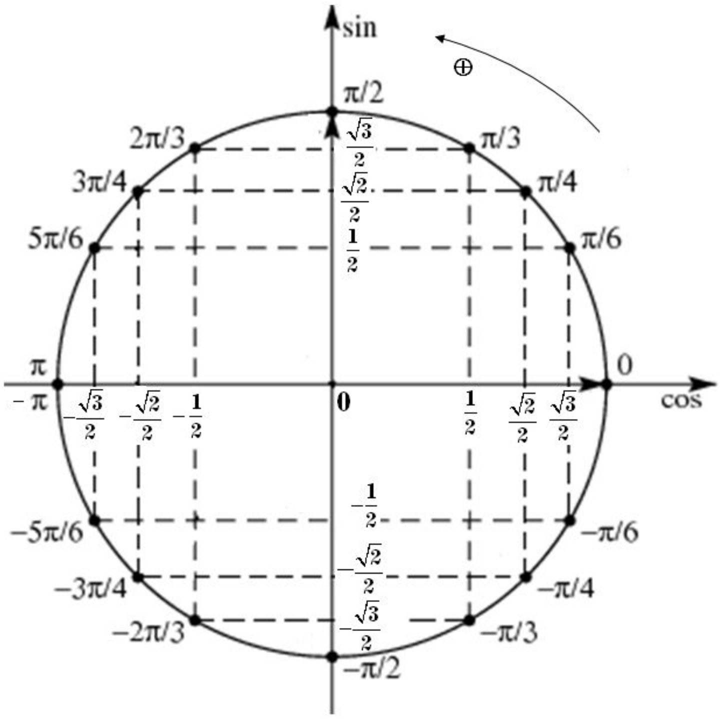
ولدينا: $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}\quad \forall k\in\{0;1;2;...;n\}$

و $E(X)=n\times p$

و $V(X)=np(1-p)$

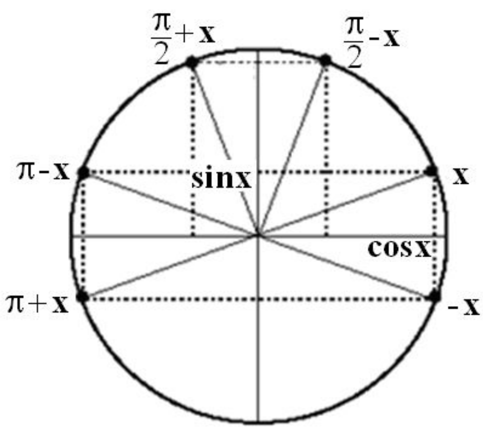
الحساب المثلثي (تذكير) (محمد الكيال)

جدول القيم الاعتيادية و الدائرة المثلثية:



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

العلاقات بين النسب المثلثة:



	-x	π - x	π + x	$\frac{\pi}{2}$ - x	$\frac{\pi}{2}$ + x
sin	-sinx	sinx	-sinx	cosx	cosx
cos	cosx	-cosx	-cosx	sinx	-sinx

$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ $\tan(x+k\pi)=\tan x$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-1 \le \cos x \le 1$ $-1 \le \sin x \le 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

معادلات مثلثة أساسية:

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ أو $x = -a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ أو $x = (\pi - a) + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

صيغ تحويل مجموع:

$$\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

نتائج:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \times \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

بوضع: $t = \tan\frac{a}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

تحويل جداء إلى مجموع :

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$
$$\cos a \times \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

تحويل مجموع إلى جداء :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

تحويل: $a\cos x + b\sin x$ $\quad (a,b) \neq (0,0)$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

حيث α عدد حقيقي يحقق :

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$