I- الدوال الأصلية :

1- مثال : لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=Arc\tan\left(x^2+1\right)$.

ولتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$

أ- أحسب $F'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- لتكن G دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $G(x)=Arc\tan\left(x^2+1\right)+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أحسب $G'(x)$. ماذا تستنتج؟

جـ- حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق : $G(0)=\pi$.

الحل :

أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $F'(x)=\left(Arc\tan\left(x^2+1\right)\right)'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{1+\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}=f(x)$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $G'(x)=\left(Arc\tan\left(x^2+1\right)+\alpha\right)'=\left(F(x)+\alpha\right)'=F'(x)=f(x)$.

جـ- لدينا $F'(x)=f(x)\quad:\quad\forall x\in\mathbb{R}$. نقول إن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لتكن G دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. إذن :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad:\quad (G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ومنه فإن : $\exists\alpha\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in\mathbb{R}\ :\ G(x)-F(x)=\alpha$.

أي : $\exists\alpha\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in\mathbb{R}\ :\ G(x)=F(x)+\alpha$.

وبما أن : $G(0)=\pi$ ، فإن : $F(0)+\alpha=\pi$ ، وبناءا عليه نجد :

$$Arc\tan(1)+\alpha=\pi\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{3\pi}{4}}\ .$$

وبالتالي فإن الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق : $G(0)=\pi$ هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$\begin{array}{llll} G\ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & Arc\tan\left(x^2+1\right)+\dfrac{3\pi}{4}\end{array}$$

2- أ- تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول إن F دالة أصلية للدالة f على I ؛ إذا كانت F قابلة للإشتقاق على I وكان لكل x من I : $F'(x)=f(x)$

ملاحظة : إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على مجال I ، فإن f دالة دالة متصلة على المجال I .

ب- مثال : 1- حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x$; b) $f(x)=x^2+1$

c) $f(x)=7x^4$; d) $f(x)=-5x^3+8x+\sqrt{2}$

2- حدد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ مع : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

3- أ- خاصية مقبولة :

كل دالة متصلة على مجال I ؛ تقبل دالة أصلية على المجال I .

ب- ملاحظة :

لتكن f دالة متصلة على مجال I ولتكن F دالة أصلية لها على I . الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال G المعرفة على I بما يلي : $\forall x \in I \quad : \quad G(x) = F(x) + \alpha$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$.

ج- خاصية :

لتكن f دالة متصلة على مجال I ولتكن F دالة أصلية لها على I؛ وليكن $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$. توجد دالة **أصلية وحيدة** G للدالة f على المجال I بحيث : $G(x_0) = y_0$.

د- مثال1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$.

1- حدد الدوال الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$.

2- حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق : $G(1) = 9$.

مثال 2 : حدد دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

مثال 3 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [-1,8]$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x - 3}{x^2 + 4x + 4} .$$

1- بين أن : $\forall x \in I \quad : \quad f(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

2- أ- استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال I .

ب- حدد الدالة الأصلية G للدالة f على المجال I التي تحقق $G(0) = 2$.

4. جدول للدوال الأصلية للدوال الاعتيادية : (أنظر المطبوع المرفق)

II- دالة اللوغاريتم النبيري : Logarithme Népérien :

1- تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ويرمز لها بالرمز $\ln$ أو Log .

ملاحظتين : أ- يكون $\ln x$ معرفا إذا وفقط إذا كان $x > 0$.   ب- $\boxed{\ln 1 = 0}$.

2- خاصيات :

أ- خاصية أساسية :

$$\boxed{\forall a \in]0,+\infty[\quad , \quad \forall b \in]0,+\infty[\quad : \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

برهان : ليكن $a > 0$ و $b > 0$. نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad F(x) = \ln(ax)$$

لدينا : $x \mapsto ax$ دالة حدودية ، فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالأخص على المجال $]0,+\infty[$.

ولدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad ax > 0$ و $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا :

$$\forall x\in]0,+\infty[\ : \ F'(x)=(\ln(ax))'=(ax)'\times \ln'(ax)=a\times\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$$

ومنه فإن : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ (F-\ln)'(x)=F'(x)-\ln'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$.

إذن يوجد عدد حقيقي α بحيث : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ F(x)-\ln(x)=\alpha$.

وبما أن : $F(1)=\ln(a)$ ، فإن : $\alpha=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)$.

وبهذا نجد : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ F(x)-\ln(x)=\ln(a)$.

أي : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ \ln(ax)-\ln(x)=\ln(a)$.

وبالتالي فإن : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ \ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$. نضع $x=b$ ، فنجد :

$$\boxed{\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)}$$

تمرين تطبيقي : ليكن a و b من $]0,+\infty[$. بين أن :

$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ (i ; $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ (ii ; $\ln(a^2)=2\ln a$ (iii

ب- نتائج :

1. لكل a و b من $]0,+\infty[$ ولكل $n\in\mathbb{N}$ ؛ لدينا : $\boxed{\ln(ab)=\ln a+\ln b}$ $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a}$ $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b}$ $\boxed{\ln(a^n)=n\ln a}$

2. لكل $r\in\mathbb{Q}$ ولكل $a\in]0,+\infty[$ ؛ لدينا : $\boxed{\ln(a^r)=r\ln a}$.

مثال : نضع : $a=\ln 2$ و $b=\ln 5$.

1. حدد بدلالة a و b ما يلي :

$\ln 10$ (i ; $\ln\left(\frac{4}{125}\right)$ (ii

$\ln(\sqrt{5})-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iii ; $\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ (iv

2. حدد بدلالة a و b ما يلي : $\ln(\sqrt[3]{2})$ و $\ln(\sqrt[3]{100})$.

3- دراسة الدالة $\ln$:

أ- النهايات : مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي : $D_{\ln}=]0,+\infty[$.

لنبين أن الدالة $\ln$ لا تقبل نهاية منتهية عند الانهاية : بالخلف ، نفترض أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=l$

حيث $l\in\mathbb{R}$. نعلم أن : $\ln(2x)=\ln(2)+\ln(x)$ ، عندما يؤول x ، نجد : $l=\ln(2)+l$

إذن : $\ln(2)=0$ وهذا تناقض . إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$ غير منتهية ...

خاصية مقبولة : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$

استنتاج : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$

نضع $t = \dfrac{1}{x}$. إذن $t \to +\infty$ $x\to 0^+$ ومنه فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{t\to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty} -\ln t = -\infty$

ب- رتابة الدالة $\ln$:

نعلم أن الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\ : \ ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

إذن $\ln$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ؛ وبما أن $\ln$ متصلة على $]0,+\infty[$ فإنها تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال : $\mathbb{R}$. $\left(\ln\left(]0,+\infty[\right) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x , \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x\right[= \mathbb{R}\right)$.

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه فإن : **ملاحظة 1 :**

$\forall x \in]0,+\infty[\ , \ \forall y \in]0,+\infty[\ :$
$\boxed{\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y}$; $\boxed{\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y}$

ملاحظة 2 :

$\forall x \in]0,+\infty[\ , \ \forall y \in]0,+\infty[\ :$
$\boxed{\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1}$; $\boxed{\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1}$; $\boxed{\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1}$

ملاحظة 3 :

المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,+\infty[$ يرمز له بالرمز e . $(\ln e = 1)$. e عدد حقيقي لا جذري بحيث : $e \simeq 2,718$

مثال 1 : 1. حدد إشارة الأعداد التالية : $\ln(0,99)$; $\ln\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$; $\ln\left(\sqrt{2}\right)$.

2. نعتبر المعادلة $\ln(x-2)+\ln(x-3)=0 \ : \ (E)$.

أ- حدد $\mathscr{D}$ مجموعة تعريف المعادلة (E) .

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) .

ج- استنتج ، في $\mathbb{R}$، مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(x-2)+\ln(x-3)>0$.

مثال 2 : حدد إشارة العدد الحقيقي $(x-2)\ln(x-1)$ حيث $x \in]1,+\infty[$.

جـ- الفروع اللانهائية :

i) نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. إذن $(\mathscr{C}_{\ln})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=0}$.

ii) خاصية: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

برهان : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f : x \mapsto x - \ln x$

لدينا : $\mathscr{D}_f =]0,+\infty[$ و $\forall x \in]0,+\infty[\;:\; f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

إشارة $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة البسط $x-1$. ومنه نجد :

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$ 0 $+$
$f(x)$	‖ ↘ 1 ↗

إذن 1 قيمة دنيا مطلقة للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

ومنه فإن : $\forall t \in]0,+\infty[\;:\; f(t) \geq 1$. أي : $\forall t \in]0,+\infty[\;:\; \ln(t) - t \geq 1 > 0$.

وبالتالي فإن : $\forall t \in]0,+\infty[\;:\; \ln(t) \geq t$. و من أجل $t = \sqrt{x}$ ، نجد :

$$\forall x \in]0,+\infty[\;:\; \ln\left(\sqrt{x}\right) \geq \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x \geq \sqrt{x} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{x}} .$$

ومنه نستنتج أن : $\boxed{\forall x \in]1,+\infty[\;:\; 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}}$.

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ ، فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

ومنه نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ ؛ اتجاهه محور الأفاصيل .

د- تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$: لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\;:\; \ln n''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

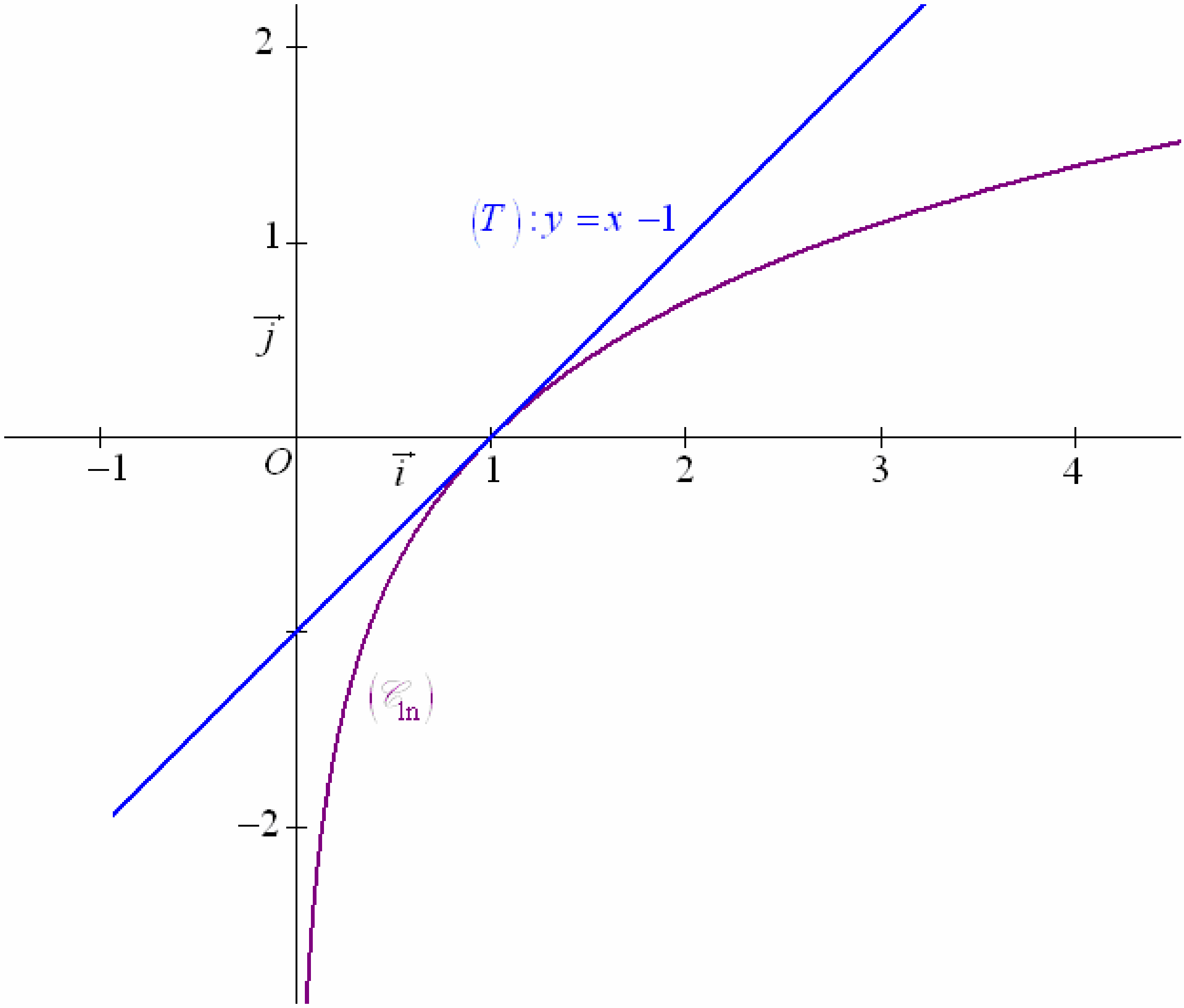
إذن تقعر $(\mathscr{C}_{\ln})$ موجه نحو الأراتيب السالبة .

هـ- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$:

لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$ في النقطة التي أفصولها 1 هي:

$$y = ln'(1)(x-1) + \ln 1$$

أي : $\boxed{y = x - 1}$. لأن : $ln'(1) = 1$ و $\ln(1) = 0$.



ملاحظة : على المجال $]0,+\infty[$ ؛ لدينا $(\mathscr{C}_{\ln})$ يوجد تحت المماس (T) . إذن :

$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\quad ; \quad \ln x \le x - 1}$.

4- نهايات هامة : $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0}$; $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$; $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1}$

برهان :

نضع : $t = \frac{1}{x}$. إذن : $t \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

و منه فإن : $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0$.

لدينا : $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = 1$.

نضع : $t = x - 1$. إذن : $t \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$

و منه فإن : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t - 1} = 1$.

تمرين تطبيقي : أحسب النهايات التالية :

(a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3\ln x$; (b $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)^2+\ln x$; (c $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-\ln x}{\ln x}$; (d $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x}$

(e $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}+\ln x$; (f $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(1+x^2)$; (g $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x$; (h $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x$

(i $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2$; (j $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^3$; (k $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$; (l $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3}$

(m $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$; (n $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$; (o $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(1+\ln x)}{x^2-1}$; (p $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\tan x)}$

(q $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$; (r $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x}$; (s $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(x^2)$.

III- المشتقة **اللوغاريتمية :**

1- خاصية :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق ولا تعدم على مجال I .

لدينا : $\boxed{\forall x\in I \quad : \quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$

2- تعريف :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق ولا تعدم على مجال I .

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

تمرين تطبيقي 1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

1- حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

2- أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$.

3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathcal{D}_f$ ؛ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathcal{D}_f$.

4- أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5- أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ثم حدد نقطة انعطاف المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

6- أنشئ $(\mathcal{C}_f)$.

الجواب :

1. ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$x\in\mathcal{D}_f \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right|>0 \text{ و } x\neq0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\neq0 \text{ و } x\neq0$$

$$\Leftrightarrow x\neq1 \text{ و } x\neq0$$

إذن : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{0,1\}=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

2. لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|=\ln1=\boxed{0}$.

و بوضع $t=\left|\frac{x-1}{x}\right|$ ، نجد $t\underset{x\to1}{\to}0^+$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=\lim\limits_{t\to0^+}\ln(t)=\boxed{-\infty}$.

ولدينا : $t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty}\ln(t) = \boxed{+\infty}$.

3. ليكن $x \in \mathcal{D}_f$ ؛ لدينا :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{x(x-1)} = \boxed{\frac{-(x+1)(x-2)}{x(x-1)}}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

4. تحديد الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:

- ✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \boxed{0}$. إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$.
- ✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$.
- ✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=1$.

5. ليكن $x \in \mathcal{D}_f$. لدينا :

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2+x+2}{x(x-1)}\right)' = \frac{\left(-x^2+x+2\right)'\left(x(x-1)\right) - \left(-x^2+x+2\right)\left(x(x-1)\right)'}{\left(x(x-1)\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+1)\left(x(x-1)\right) - \left(-x^2+x+2\right)(x-1+x)}{\left(x(x-1)\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-(2x-1)\left(x(x-1)\right) - \left(-x^2+x+2\right)(2x-1)}{\left(x(x-1)\right)^2}$$

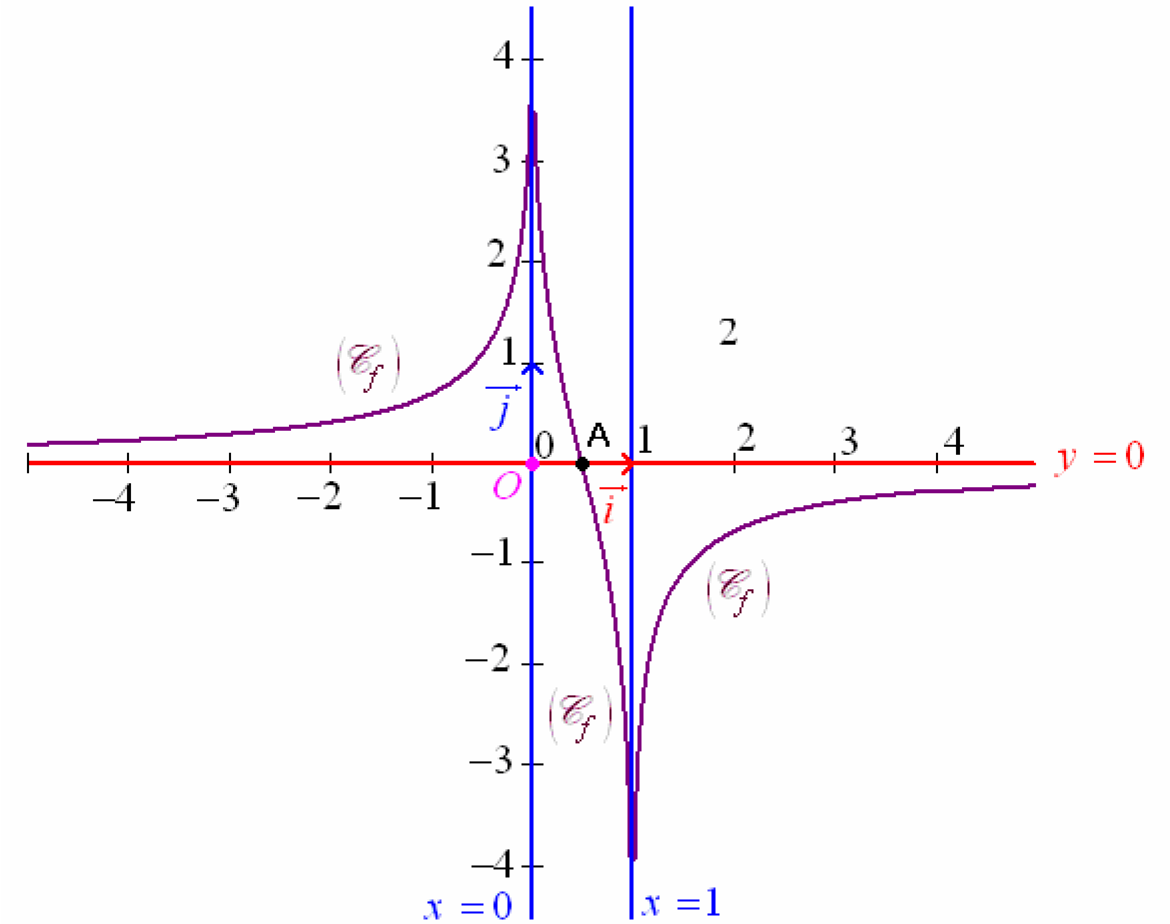
$$f''(x) = \frac{(2x-1)\left(-x^2+x+x^2-x-2\right)}{\left(x(x-1)\right)^2} = \boxed{\frac{-2(2x-1)}{\left(x(x-1)\right)^2}}$$

إشارة $f''(x)$ على $\mathcal{D}_f$ هي إشارة $1-2x$ ، ومنه نستنتج أن :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$		$(\mathscr{C}_f)$ مقعر	||	$(\mathscr{C}_f)$ مقعر	A	$(\mathscr{C}_f)$ محدب	||	$(\mathscr{C}_f)$ محدب	

وبالتالي فإن النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

6. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$:



تمرين تطبيقي 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^3\right) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

1. أ- بين أن f متصلة في 0 .
ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 .
2. أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
3. أ- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,0[$.

أ- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x\in J$. (ينجز هذا السؤال بعد درس الدوال الأسية) ؟

6. نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{4}{9} \\ u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\frac{4}{9}\le u_n\le 1 \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

ب- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

جـ- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها.

3- استنتاج :

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق ولا تنعدم على مجال I .

الدوال الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ على I هي الدوال : $x\mapsto \ln|u(x)|+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

IV- دالة اللوغاريتم للأساس a :

1- تعريف :

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$.

الدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ، تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز $\log_a$. ولدينا :

$$\begin{aligned} \log_a : \ ]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a} \end{aligned}$$

ملاحظة : لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ \log_e(x)=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x$.

الدالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e .

2- خاصيات :

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$.

1. لكل x و y من $]0,+\infty[$ ولكل $n\in\mathbb{N}$ ؛ لدينا :

i) $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$; ii) $\log_a(x^n)=n\log_a(x)$

iii) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$; iv) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

2. لكل $r\in\mathbb{Q}$ ولكل $x\in]0,+\infty[$ ؛ لدينا : $\boxed{\log_a(x^r)=r\log_a(x)}$.

3- رتابة الدالة $\log_a$:

أ- مجموعة تعريف الدالة $\log_a$ هي : $\mathscr{D}_{\log_a} =]0,+\infty[$.

ب- النهايات : نعلم أن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. إذن :

✓ إذا كان $a>1$ ؛ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty}$.

✓ إذاكان $0<a<1$ ؛ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty}$.

جـ- جدول التغيرات : لدينا : $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad \log_a{}'(x) = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}}$

أ- حالة $a>1$:

لدينا $\log_a$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$\log'_a(x)$	||	+
$\log_a(x)$	|| $-\infty$	↗ $+\infty$

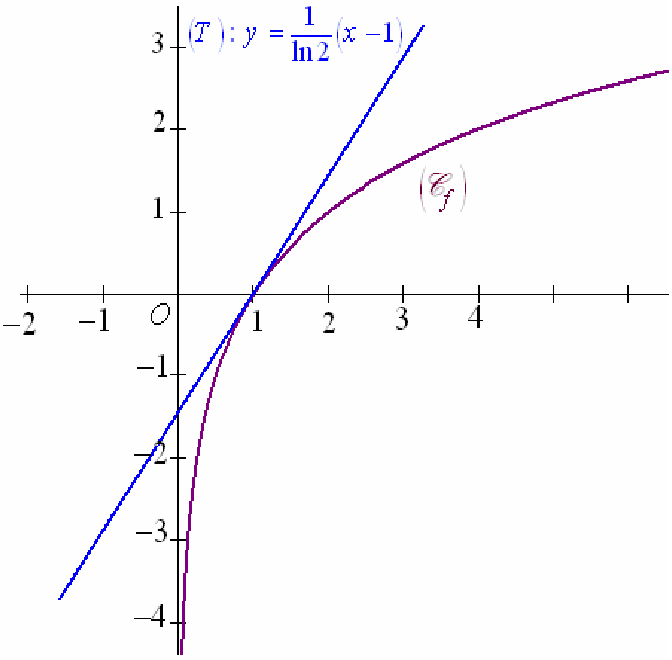
ب- حالة $0<a<1$:

لدينا $\log_a$ تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

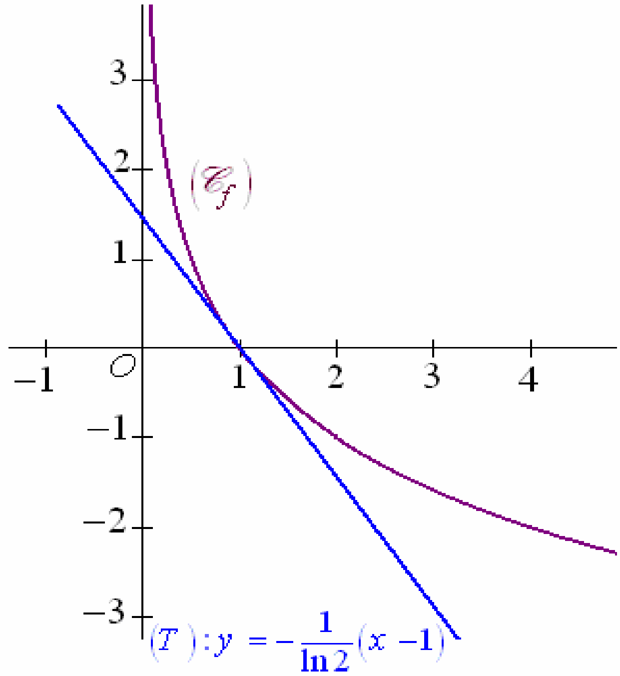
x	0	$+\infty$
$\log'_a(x)$	||	−
$\log_a(x)$	|| $+\infty$	↘ $-\infty$

د- إنشاء $\left(\mathscr{C}_{\log_a}\right)$:

حالة $a>1$ ، مثلا : $(a=2)$



حالة $0<a<1$ ، مثلا : $\left(a=\dfrac{1}{4}\right)$



V- دالة اللوغاريتم العشري : Logarithme décimal :

1- تعريف :

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة **اللوغاريتم العشري**
ونرمز لها بالرمز $\log$ (عوض $\log_{10}$) . ولدينا :

$$\begin{array}{llll} \log & : \ ]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10} \end{array}$$

2- ملاحظة :

a) $\log 10 = 1$; $\log 1 = 0$

b) $\log\left(10^r\right) = r\log 10$; $\forall r \in \mathbb{Q}$

c) $\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$; $\forall (x,y) \in \left(]0,+\infty[\right)^2$

3- مثال :

1. أحسب : $A=\log\left(\sqrt[3]{100}\right)$ و $B=\log(0,0001)$ و $C=\log(10000)$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $10^{-x}=3$ ثم أعط قيمة مقربة للحل مستعملا المحسبة .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث : $f(x)=x+\dfrac{3}{x}+2\ln\left(|x|\right)$

1. أ- حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
   ب- أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$.
2. أ- أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathcal{D}_f$.
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .
3. ليكن $\left(\mathcal{C}_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$.
   ب- أدرس تقعر المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$.
   جـ- أعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ في النقطة I ذات الأفصول 3 .
   د- أرسم المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ مبرزا نقطة التي أفاصيلها هي 3 و -2 و -4 .

بالتوفيق إنشاء الله