Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

1 – تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز لها بـ $\ln$ أو Log .

بمعنى : $f(x)=\ln(x) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ و $x>0$ و $f(1)=0$

مثال 1 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x)=\ln(x^2+x-2)$

$x\in Df \Leftrightarrow x^2+x-2>0$. لنحل المتراجحة $x^2+x-2>0$.

$\Delta=1-4\times1\times(-2)=9$ إذن المعادلة $x^2+x-2=0$ تقبل حلين مختلفين هما : $x_1=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$ و $x_2=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$.

ومنه فإن $x^2+x-2>0$ إذا كان $x>1$ أو $x<-2$ و بالتالي $Df=]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$.

مثال 2 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

$x\in Df \Leftrightarrow x+1>0$ و $x>0$ و $\ln(x)\neq 0$

يعني $x\neq 1$ و $x>0$ و $x>-1$ (تقاطع المجالين $]0,+\infty[$ و $]-1,+\infty[$)

إذن $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

و منه $Df=]0,1[\cup]1,+\infty[$

2 – خاصيات :

خاصية 1 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا .

$\ln x<\ln y \Leftrightarrow x<y$ و $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$ و $\ln x>\ln y \Leftrightarrow x>y$.

مثال 3 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\ln(x-2)=\ln(5-x)$.

لكي يكون التعبير صحيحا يجب أن يكون $x>2$ و $x<5$ يعني $x\in]2,5[$

لدينا : $\ln(x-2)=\ln(5-x)$ يعني $x-2=5-x$ يعني $x+x=5+2$ يعني $2x=7$ يعني $x=\frac{7}{2}$.

و بما أن $\frac{7}{2}\in]2,5[$ فإن حل المعادلة هو العدد $\frac{7}{2}$.

مثال 4 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\ln(x-1)>\ln(x)$.

لكي يكون التعبير صحيحا يجب أن يكون $x>1$ و $x>0$ يعني $x\in]1,+\infty[$ (تقاطع المجالين $]0,+\infty[$ و $]1,+\infty[$)

لدينا $\ln(x-1)>\ln(x)$ يعني $x-1>x$ يعني $2x>1$ يعني $x>\frac{1}{2}$.

و لدينا تقاطع المجالين $]1,+\infty[$ و $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ هو المجال $]1,+\infty[$ إذن حل المتراجحة هو المجال $]1,+\infty[$.

خاصية 2 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

$$\ln(x\times y)=\ln x+\ln y$$

$$\ln(\frac{1}{x})=-\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$$

$$\ln\left(x^r\right)=r\ln x$$

أمثلة :

لنكتب بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$ الأعداد التالية :

— $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. لدينا $\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 2-\ln 3$

— $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$. $\ln\left(\frac{8}{3}\right)=\ln 8-\ln 3=\ln\left(2^3\right)-\ln 3=3\ln 2-\ln 3$

— $\ln\left(\frac{4}{81}\right)$. $\ln\left(\frac{4}{81}\right)=\ln 4-\ln 81=\ln\left(2^2\right)-\ln\left(3^4\right)=2\ln 2-4\ln 3$

— $\ln(216)$. $\ln(216)=\ln\left(2^3\times 3^3\right)=\ln\left(2^3\right)+\ln\left(3^3\right)=3\ln 2+3\ln 3$

— $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)$. $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)-\ln\left(\sqrt{3}\right)=\ln\left(2^{\frac{1}{3}}\right)-\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

— بسط A بحيث : $A=\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$A=\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)=\ln\left(\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)=\ln\left(\sqrt{4-2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

3 ـ النهايات :

خاصية :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$$

$$\text{و} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

أمثلة :

— لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\ln x}$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}1+\ln x=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}=0$

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^+}1+\ln x=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\ln x}=0$

— لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+x$ و $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)+x$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+x=+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)+x=-\infty$.

— لنحسب : $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)-x$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x$.

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)-x=-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة استعمال النهاية</u> $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)$

و بما ان $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$.

— لنحسب : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$.

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}1-\ln(x)=+\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة هي التعميل ب</u> $\ln x$. و بالتالي $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}$

و بما أن $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ و منه $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)} = -1$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 1 - \ln(x) = -\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x}$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة هي التعميل ب $\ln x$</u> . و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ و منه $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)} = -1$.

ـ لنحسب : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \times +\infty = -\infty$$

ـ لنحسب : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(-\infty)^2}{0^+} = +\infty \times +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$$

و بما ان $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

<u>4 ـ المشتقة اللوغاريتمية :</u>

<u>خاصية :</u>

u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال .

لكل عدد x من I لدينا : $\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

<u>أمثلة :</u>

$$\left(\ln|2x+1|\right)' = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$$

$$\left(\ln|-x^2+4x|\right)' = \frac{(-x^2+4x)'}{(-x^2+4x)} = \frac{-2x+4}{-x^2+4x}$$

$$\left(\ln\sqrt{x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

<u>تعريف :</u>

u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال .

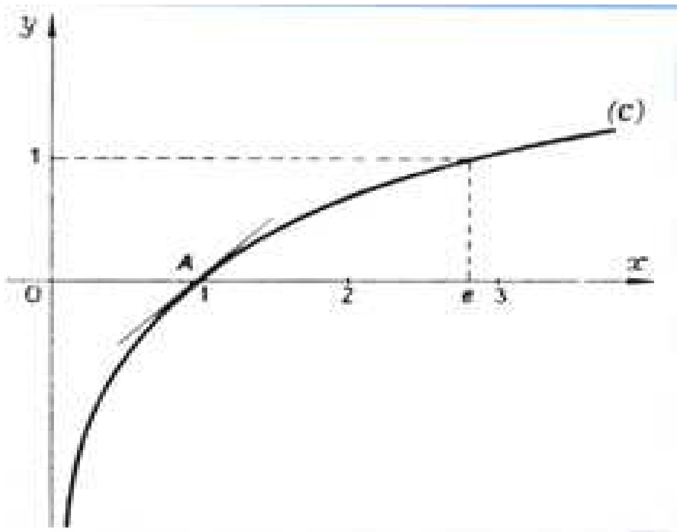
الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u **على المجال** I .

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

أمثلة :

لنحدد الدالة المشتقة للدالة التالية : $\ln(x+\sqrt{x})$: $\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)$

$$\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)'=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{x+\sqrt{x}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}=\frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x+\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)}$$



التمثيل المبياني للدالة $\ln x$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr