المعاصر

سلسلة الرياضيات بالفيديو

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

محمد قداري

المغني في الرياضيات

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

المعاصرة

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

تم تحميل الكتاب من موقع الدراسة الجزائري

www.eddirasa.com

حقوق النسخ محفوظة لـ صَافِيَ الرُّوحْ

موقع
الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

المحور الثالث

الاشتقاقية

ما يجب أن يعرف

الإشتقاقية (تذكير)

1 . العدد المشتق – الدالة المشتقة :

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0. تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ملاحظات :

1- بوضع $x=a+h$ الكتابة $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تكتب :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

2- إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $x\mapsto f'(x)$: f' الدالة المشتقة للدالة f.

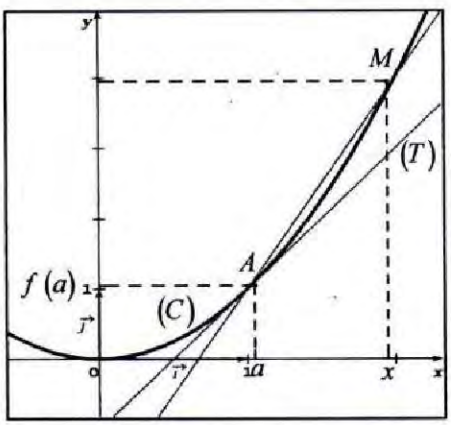
3- يمكن كتابة $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ وتسمى الكتابة التفاضلية لـ f'.

2 . مماس منحنى دالة:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن (C) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ملاحظات:



1 . المماس (T) للمنحنى (C) هو المستقيم **الوضع النهائي** للقاطع (AM) لما x يؤول إلى a ، حيث M نقطة متغيرة من (C) فاصلتها x .

2 . العدد المشتق $f'(a)$ هو **معامل توجيه** المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(a;f(a))$.

3 . العدد المشتق من اليمين – العدد المشتق من اليسار :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، و a عدد حقيقي من I .

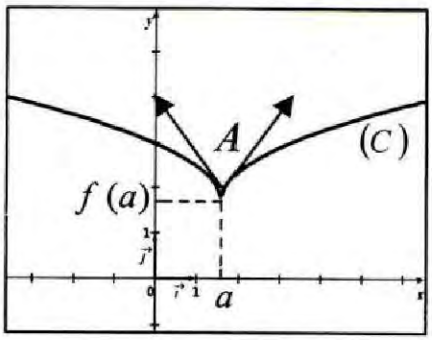
تعريف01: نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a من اليمين إذا قبلت النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية محدودة لما يؤول x إلى a بقيم أكبر .تسمى هذه النهاية العدد المشتق من اليمين للدالة f عند a ونرمز لها بالرمز $f'_d(a)$. لدينا: $f'_d(a)=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

تعريف02: نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a من اليسار إذا قبلت النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية محدودة لما يؤول x إلى a بقيم أصغر .تسمى هذه النهاية العدد المشتق من اليسار للدالة f عند a ونرمز لها بالرمز $f'_g(a)$. لدينا: $f'_g(a)=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

نتائج: 1) تكون f قابلة للاشتقاق عند a إذا وفقط إذا كان عددها المشتق من اليمين و عددها المشتق من اليسار عند a متساويان ، أي : $f'_d(a)=f'_g(a)=f'(a)$.

2) إذا كان $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a.

التفسير البياني: التمثيل البياني للدالة f يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ نصف مماس من اليمين معامل توجيهه $f'_d(a)$، و يقبل أيضا نصف مماس من اليسار معامل توجيهه $f'_g(a)$.

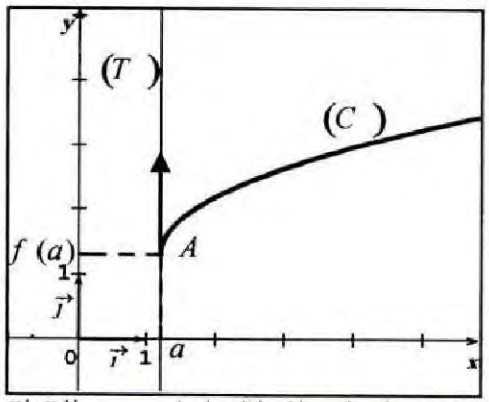


تدعى النقطة $A(a;f(a))$ **نقطة زاوية** .

ملاحظة هامة:

إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لما يؤول x إلى a غير منتهية ، بمعنى :

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$



فإن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x=a$.

4 . الإشتقاقية و الإستمرارية :

مبرهنة: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال .

ملاحظة: عكس هذه المبرهنة ليس صحيحا في الحالة العامة .

المشتقات و العمليات – المشتقات المتتابعة

1. مشتقات دوال مألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (k حيث ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال :

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج: - الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

3. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$ ، u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I .

الدالة $f : x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا: $f'(x) = a \times u'(ax+b)$

4 . المشتقات المتتابعة :

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f''. إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة

$(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'''. تسمى الدوال :

f'، f''، f'''،...، $f^{(n)}$،... المشتقات المتتابعة للدالة f.

ملاحظة :في الفيزياء (في علم الحركة) إذا كانت $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك ، يتحرك حركة مستقيمة ،من لحظة ابتدائية حتى اللحظة t فإن العددين $f'(t)$ و $f''(t)$ يمثلان على الترتيب السرعة اللحظية $v(t)$ و التسارع اللحظي $a(t)$ لهذا المتحرك في اللحظة t حيث: $v(t)=f'(t)=\frac{df}{dt}$ و $a(t)=f''(t)=\frac{d^2f}{dt^2}$.

اتجاه تغير دالة

1. المشتقة واتجاه التغير:

مبرهنة : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

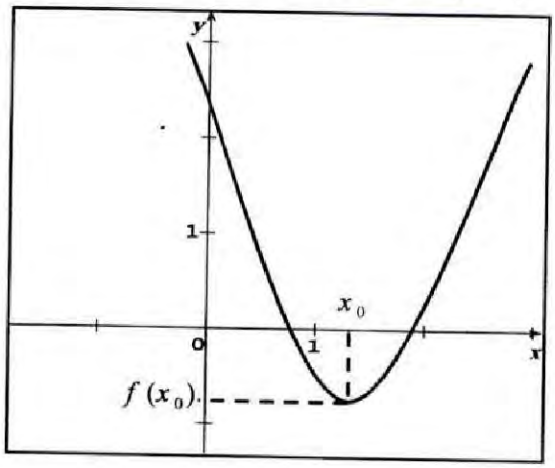
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I .
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I .
* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

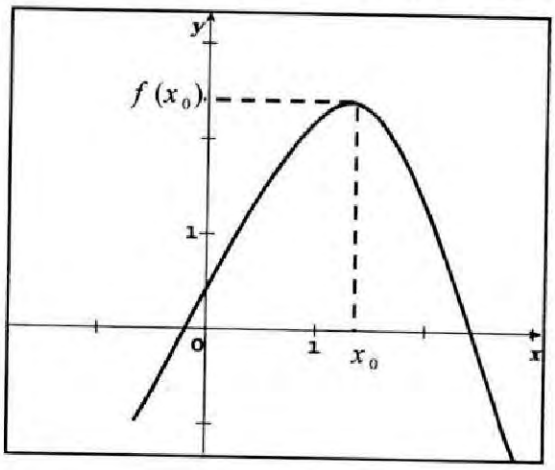
ملاحظة : إذا انعدمت f' عند عدد منته من القيم من المجال I ولا تغير إشارتها على I فإن الدالة f تحافظ على اتجاه تغيرها.

2. القيم الحدية المحلية:

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\leq f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\geq f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أوصغرى



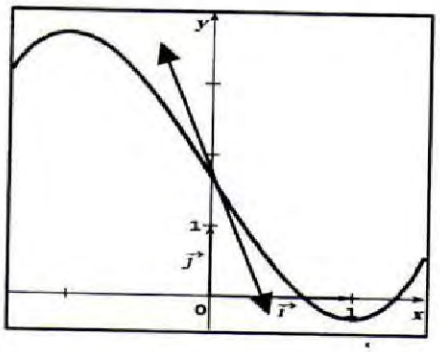


مبرهنة: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.
إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

x	x_0
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$\nearrow \quad f(x_0) \quad \searrow$

x	x_0
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\searrow \quad f(x_0) \quad \nearrow$

ملاحظة: المماس لمنحني دالة عند **النقطة الحدية** (النقطة ذات الإحداثيين $(x_0; f(x_0))$) يكون موازيا لمحور الفواصل.



3. نقطة الإنعطاف:

تعريف: نقطة إنعطاف منحني دالة هي النقطة التي يخترق فيها المماس منحني الدالة.

مبرهنة: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I. إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $(x_0; f(x_0))$.

x	x_0
$f''(x)$	$+ \quad 0 \quad -$

أو

x	x_0
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad +$

ملاحظة: إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 ولم تغير إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $(x_0; f(x_0))$.

x	x_0
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad +$

أو

x	x_0
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad -$

اشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة: $v \circ u$

مبرهنة: إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$$

2. نتـــائـــج :

• **مشتقة الدالة:** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا: $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

• **مشتقة الدالة:** $x \mapsto \left[u(x)\right]^n$ ، n **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(u^n\right)' = n\,u'\,u^{n-1}$.

• **مشتقة الدالة:** $x \mapsto \frac{1}{\left[u(x)\right]^n}$ ، n **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا: $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$.

التقريب التألفي – طريقة أولر

1. التقريب التألفي:

مبرهنة: f دالة معرفة على مجال مفتوح I. إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا:

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ يسمى $f(x) + hf'(x)$ التقريب التألفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0 ، المرفق بالدالة f.

الكتابة التفاضلية:

بوضع: $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ تكتب المساواة $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h)$ كما يلي: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$.

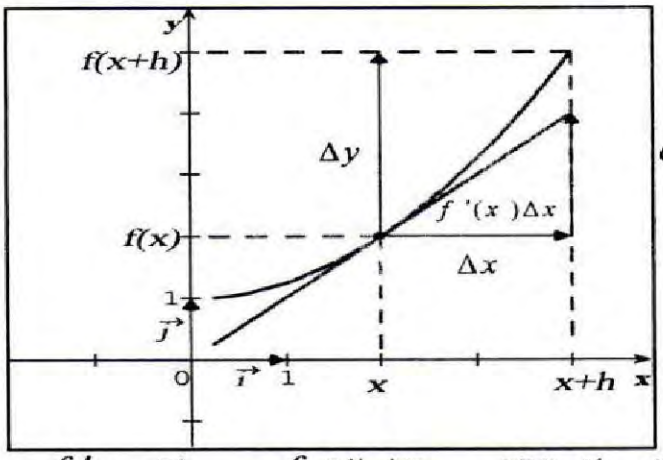
بذلك ،عندما يكون Δx بجوار 0 يكون $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ بخطأ مهمل بالنسبة للعدد Δx .

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)\,dx$.

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية.

وبصفة عامة نكتب: $\frac{df}{dx}$ بدلا من f' و $\frac{d^2f}{dx^2}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com



بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.

نتيجة: باستخدام مفهوم التقريبات يمكن استعمال الكتابة $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ للحصول على بعض القيم التقريبية لقيم يتعذر حسابها مباشرة أو لتقريب بعض الحلول للمعادلات التفاضلية.

2. **طريقة أولر**: طريقة أولر تسمح بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة بـ: f' و $y_0 = f(x_0)$. تعتمد هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا: $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. - أنظر التمرين رقم 32.

الدالة "ظل"

تعريف: الدالة "ظل" و التي نرمز إليها بالرمز "tan" معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k \in \mathbb{Z})$.

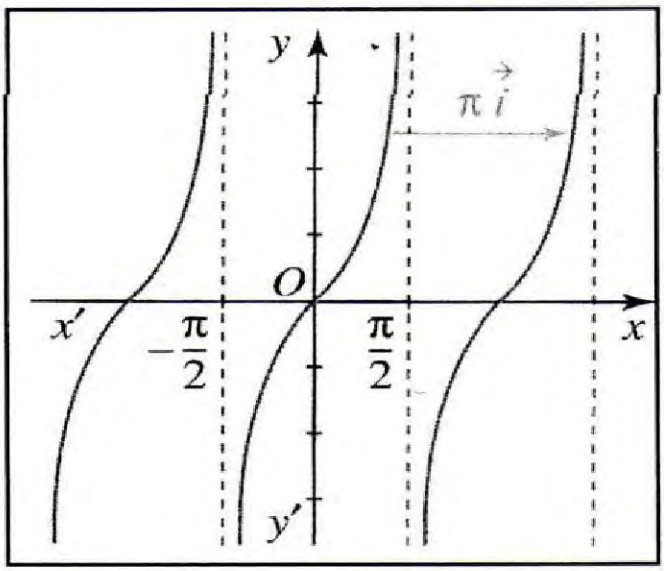
موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

خواص: * من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$:
$\tan(x+\pi) = \tan x$ و $\tan(-x) = -\tan x$.

دراسة الدالة "ظل": * من أجل كل عدد حقيقي x المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

لدينا: $(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$

* لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$



x	0	$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	+	
$\tan(x)$	0 ↗	$+\infty$

تمارين محلولة

تمرين 01

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-4$.

أثبت أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند العدد $a=3$ معينا عددها المشتق عنده.

الحل

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(3+h)-3\right]\left[(3+h)+3\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند العدد 3 وعددها المشتق عند 3 هو 6. لدينا: $f'(3)=6$.

تمرين 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2$.

1) أثبت أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند كل عدد حقيقي a.

2) استنتج الدالة المشتقة للدالة f.

3) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C) منحني الدالة f في معلم عند النقطة ذات الفاصلة 1.

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي a:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2-3a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[(a+h)^2-a^2\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[(a+h)-a\right]\left[(a+h)+a\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h(h+2a)}{h}=\lim_{h\to 0}3(h+2a)=6a$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند كل عدد حقيقي a وعددها المشتق عند a هو $6a$.

لدينا: $f'(a)=6a$.

2) الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ أي الدالة $f':x\mapsto 6x$.

3) وجدنا أن الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=6x$. بالتالي معادلة (T) هي من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

أي $y=6(x-1)+3$. إذن: $(T):y=6x-3$.

تمرين 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x|x-2|$.

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2 .

2) فسر، بيانيا، النتيجة المحصل عليها .

الحل

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

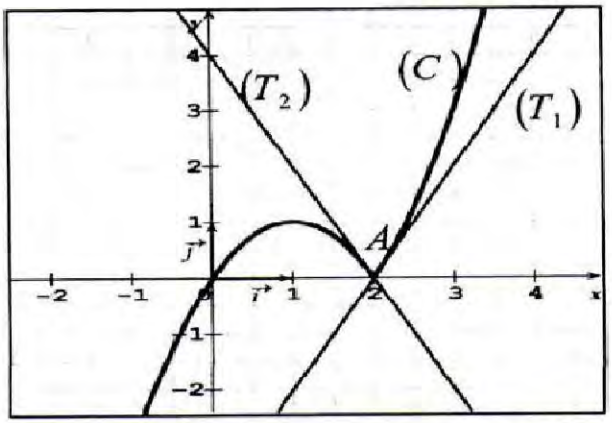
1) لدينا : $f(x)=\begin{cases} x(x-2) & ;x>2 \\ x(-x+2) & ;x<2 \\ f(2)=0 \end{cases}$. ومنه :

• $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}} \dfrac{x(x-2)-0}{x-2}=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}} x=2$ ، ومنه f تقبل الإشتقاق عند 2 من اليمين وعددها المشتق من اليمين هو : $f'_d(2)=2$.

• $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}} \dfrac{x(-x+2)-0}{x-2}=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}} \dfrac{-x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}}(-x)=-2$ ،

ومنه f تقبل الإشتقاق عند 2 من اليسار وعددها المشتق من اليسار هو : $f'_g(2)=-2$.

بما أن : $f'_d(2)\neq f'_g(2)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 .



2) **التفسير البياني:**

- التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس (T_1) من اليمين عند النقطة $A(2;0)$ معامل توجيهه $f'_d(2)=2$ ، معادلته: $y=f'_d(2)(x-2)+f(2)$ أي $(T_1): y=2x-4$ ، ويقبل نصف مماس (T_2) من اليسار عند النقطة $A(2;0)$ معامل توجيهه $f'_g(2)=-2$ معادلته: $y=f'_g(2)(x-2)+f(2)$ ، أي $(T_2): y=-2x+4$.

- النقطة $A(2;0)$ نقطة زاوية .

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x-1}$.

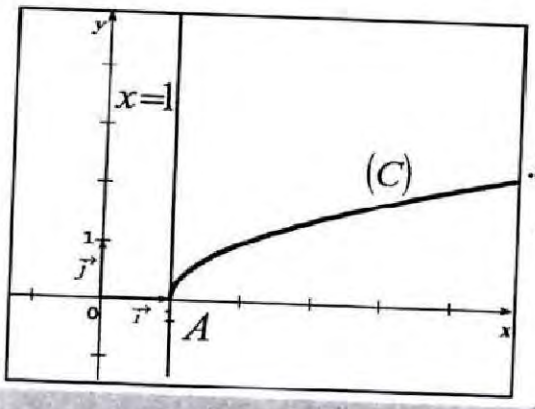
1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1 .

2) فسر، بيانيا، النتيجة المحصل عليها .

الحل

1) سندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1 من اليمين ، لدينا :

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}=\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$



$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1 من اليمين.

2) التمثيل البياني للدالة f يقبل عند النقطة $A(1;0)$ مماسا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x = 1$.

تمرين 05

في كل حالة ،أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة a ، وفسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ ، $a = 1$. (من اليمين)

2) $f(x) = x^2 - 1 + |x-2|$ ، $a = 2$ . .

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & ;x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ، $a = 0$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ ، $a = 1$.

لدينامن أجل $x \neq 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{1^2-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-x} \times \sqrt{x^2-x}}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$$

ومنه: $\lim\limits_{x \to 1^{>}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^{>}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{1}{0^{+}} = +\infty$.

إذ ن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1من اليمين.

بيانيا :المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا عموديا عند النقطة ذات الإحداثيين $(1;0)$ ،

معادلته $x = 1$.

2) $f(x) = x^2 - 1 + |x-2|$ ، $a = 2$.

لدينا: $\begin{cases} |x-2| = x-2 & ;x \geq 2 \\ |x-2| = -x+2 & ;x \leq 2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 3 & ;x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - x + 1 & ;x \leq 2 \end{cases}$

لدينا من أجل $x > 2$:

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2+x-3-3}{x-2}=\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=x+3$$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}}(x+3)=5$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 2 من اليمين و $f'_d(2)=5$.

ولدينا من أجل $x<2$:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2-x+1-3}{x-2}=\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}}(x+1)=3$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 2 من اليسار و $f'_g(2)=5$.

نلاحظ أن $f'_d(2)\neq f'_g(2)$. إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2 .

بيانيا :المنحنى الممثل للدالة f يقبل نصفي مماسين (T_1) ، (T_2) عند النقطة ذات الإحداثيين $A(2;3)$ التي هي نقطة زاوية.

معادلة (T_1) هي : $y=f'_d(2)(x-2)+f(2)$ ، أي $y=5x-7$.

معادلة (T_2) هي : $y=f'_g(2)(x-2)+f(2)$ ، أي $y=3x-3$.

3) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & ;x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$ ، $a=0$.

لدينا من أجل $x\neq 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ ، لأن $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و منه :

$-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ و لكون : $\lim\limits_{x\to 0}(-x)=\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$ نجد حسب مبرهنة الحصر :

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 ، و $f'(0)=0$.

بيانيا :المنحنى الممثل للدالة f يقبل مماسا عند النقطة $O(0;0)$ معادلته:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي $y=0$.

تمرين 06

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1) إذا كان $f'(3)=1$ فإن : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=1$.

2) إذا كان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{1}{4}$ فإن : $f'(2)=0$.

3) إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ نهاية عندما يؤول h إلى 0 فإن f تقبل الاشتقاق عند -3 .

4) أ f دالة معرفة من أجل كل $h\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ بـ : $f(1+h)=2+3h+4\sinh$.

• أ f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=3$.

• ب نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ عندما يؤول x إلى 1 هي 4 .

• جـ f ليست مستمرة عند 1 .

الحل

1) صحيح ، حسب تعريف الاشتقاق .

2) خطأ ، إذ أن : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{1}{4}$ تعني : $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$.

3) خطأ ، يجب أن تكون نهاية النسبة $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ عدد حقيقي .

4)

• أ صحيح ، لأن: $f(1)=f(1+0)=2+3\times 0+4\sin 0=2$

و $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{2+3h+4h\sinh-2}{h}=3+4\sinh$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3+4\sinh)=3=f'(1)$

إذن f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=3$.

• ب خطأ ، لأن نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ عندما يؤول x إلى 1 هي 3 . (حسب أ .)

• جـ خطأ ، لأن f قابلة للاشتقاق عند 1 فهي مستمرة عند 1 .

تمرين 07

f دالة قابلة للاشتقاق عند -1 حيث $f'(-1)=2$

علما أن المنحنى الممثل في معلم ، للدالة f ، يمر بالنقطة $A(-1;-3)$.

أكتب معادلة لمماس هذا المنحنى عند النقطة A .

الحل

لدينا $f'(-1)=2$ فرضا و $f(-1)=-3$ لأن منحنى f يمر بالنقطة $A(-1;-3)$.

ومنه معادلة المماس عند A هي : $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$ ، بالتعويض نجد:

$y=2x-1$.

تمرين 08

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0 .

المستقيم (T) ذو المعادلة $y=2-3x$ ، هو المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(0;2)$.

1) حدد $f(0)$ و $f'(0)$.

2) فسر هندسيا العدد $\dfrac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x\neq 0$.

3) برر وجود $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) لدينا: $f(0)=2$ لأن $A(0;2)$ نقطة من (C) و $f'(0)=-3$ لأن معامل توجيه المماس (T) هو -3 .

2) من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $\dfrac{f(x)-2}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

النسبة $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ هي معامل توجيه المستقيم (AM) حيث M نقطة كيفية من (C) فاصلتها $x\neq 0$.

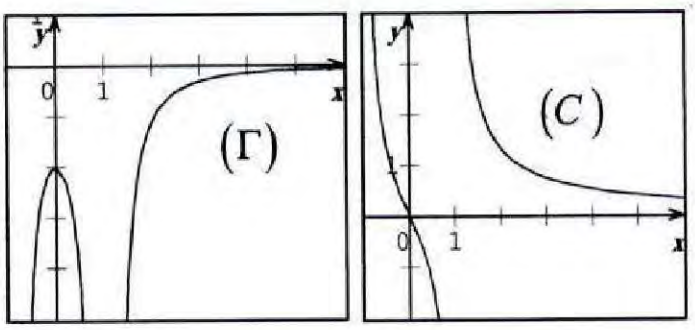
3) لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-0}=f'(0)=-3$. لأن f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0)=-3$.

تمرين 09

الشكل المقابل يمثل المنحنى (C)

الممثل لدالة f معرفة على $]-1;+\infty[$

و المنحنى (Γ) الممثل لدالتها المشتقة f' .



1) ما هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 ؟

2) أكتب معادلة لهذا المماس .

الحل

1) معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هو $f'(0)$.

من المنحنى (Γ) نقرأ: $f'(0) = -2$.

2) معادلة (Γ) هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. حيث: من المنحنى (C) نقرأ $f(0) = 0$.

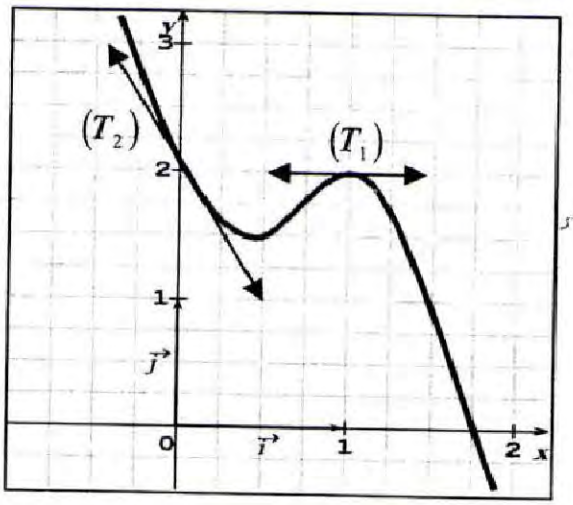
ومنه: $y = -2(x-0) + 0$، أي $(T): y = -2x$.

تمرين 10

إليك التمثيل البياني لدالة f، (T_1) و (T_2) مماسان له.

1) حدد القيم التالية: $f(0)$، $f(1)$، $f'(0)$، $f'(1)$.

2) أكتب معادلة لكل من المماسين (T_1) و (T_2).



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) لدينا: $f(0) = 2$، $f(1) = 2$.

$f'(1) = 0$ لأن (T_1) يوازي محور الفواصل.

تعيين $f'(0)$:

$f'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T_2). نلاحظ أن (T_2) يمر من النقطتين ذات الإحداثيين $(0;2)$ و $\left(\frac{1}{2};1\right)$. ومنه: $f'(0) = \frac{2-1}{0-\frac{1}{2}} = -2$، إذن $f'(0) = -2$.

2) معادلة (T_1) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$، أي $y = 2$.

معادلة (T_2) هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$، أي $y = -2x + 2$.

تمرين 11

عين مشتقة كل دالة من الدوال الآتية المعرفة على المجال $I =]0;+\infty[$.

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$ (2 $g(x) = (x-1)\sin x$ (3 $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

الحل

1) الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود فهي تقبل الإشتقاق على I و لدينا:

$f'(x)=6x^2-2x+4$.

2) الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي تقبل الإشتقاق على I ولدينا:

$g'(x)=(x-1)'\sin x+(x-1)(\sin x)'=\sin x+(x-1)\cos x$.

2) الدالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن حاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق على I وبما أن المقام لا ينعدم على I فهي تقبل الإشتقاق على I ولدينا:

$$h'(x)=\frac{(x+1)'\sqrt{x}-(x+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2x-(x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

تمرين 12

في كل حالة ،أكتب معادلة لمماس المنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها a .

1) $f(x)=-3x^3+x-4$ ، $a=0$.

2) $f(x)=\frac{4x-3}{x+1}$ ، $a=-2$.

3) $f(x)=\frac{1}{2}x+2-\frac{1}{x-1}$ ، $a=3$.

4) $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ، $a=1$.

5) $f(x)=x\cos x$ ، $a=\frac{\pi}{4}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) $f(x)=-3x^3+x-4$ ، $a=0$.

لدينا: $f(0)=-4$ ، و $f'(x)=-9x^2+1$ ومنه: $f'(0)=1$. إذن معادلة المماس هي :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي $y=x-4$.

2) $f(x)=\frac{4x-3}{x+1}$ ، $a=-2$.

لدينا: $f(-2)=11$ ، و $f'(x)=\frac{7}{(x+1)^2}$ ومنه: $f'(-2)=7$. إذن معادلة المماس هي :

$y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2)$ ، أي $y=7x+25$.

3) $f(x)=\frac{1}{2}x+2-\frac{1}{x-1}$ ، $a=3$.

لدينا: $f(3)=3$ ، و $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{(x-1)^2}$ ومنه: $f'(3)=\frac{3}{4}$. إذن معادلة المماس هي :

$y = f'(3)(x-3)+f(3)$ أي $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.

4) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ، $a = 1$.

لدينا: $f(1) = 1$ ، و $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$ ومنه: $f'(1) = \frac{5}{2}$. إذن معادلة المماس هي

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

5) $f(x) = x\cos x$ ، $a = \frac{\pi}{2}$.

لدينا: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ، و $f'(x) = \cos x - x\sin x$ ومنه: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$. إذن معادلة

المماس هي: $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ أي $y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4}$.

تمرين 13

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحنى (C) الممثل للدالة

f والمماس (T) عند النقطة A التي فاصلتها 0.

1) عين معادلة للمماس (T).

2) خمن على الشاشة وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

3) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-(3x+3) = x^2(x+3)$

4) أدرس إشارة $f(x)-(3x+3)$ ثم استنتج وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

الحل

1) المماس (T) يمر من النقطتين $A(0;3)$ ، $B(-1;0)$ حيث A هي نقطة التماس.

إذن معادلة المماس (T) هي: $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

حيث: $f(0) = 3$ ، و $f'(0) = \frac{3-0}{0-(-1)} = 3$. ومنه: $(T): y = 3x + 3$

2) يظهر أن (C) يقع فوق (T) على الشاشة.

3) من أجل كل عدد حقيقي x:

$f(x)-(3x+3) = x^3+3x^2+3x+3-(3x+3) = x^3+3x^2 = x^2(x+3)$

4) إشارة $f(x)-(3x+3)$ هي من إشارة $x^2(x+3)$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

إذن: - (T) يقطع (C) في نقطة فاصلتها -3 ويمسه في النقطة A .

- (C) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;-3[$.

- (C) يقع فوق (T) على المجال $]-3;+\infty[$.

تمرين 14

احسب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى D في كل حالة:

1) $f(x)=2x^2-5x+3$ ، $D=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{-3x^3+2x+1}{3}$ ، $D=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{x}$ ، $D=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ ، $D=]0;+\infty[$.

5) $f(x)=x\left(x^2+2\right)-1$ ، $D=\mathbb{R}$.

6) $f(x)=(x+1)\left(x^3-1\right)$ ، $D=\mathbb{R}$.

7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\left(1+\sqrt{x}\right)$ ، $D=]1;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ ، $D=]-\infty;2[$

9) $f(x)=\dfrac{-3x^2+x-2}{x^2+1}$ ، $D=\mathbb{R}$

10) $f(x)=2x-\dfrac{1}{1-x}$ ، $D=]1;+\infty[$

11) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}-\sqrt{x}$ ، $D=]1;+\infty[$

الحل

1) $f'(x)=4x-5$.

2) $f(x)=-x^3+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$، ومنه: $f'(x)=-3x^2+\dfrac{2}{3}$

3) $f'(x)=2x^3-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=2x^3+\dfrac{1}{x^2}$.

4) $f'(x)=2x-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5) $f'(x)=1\times\left(x^2+2\right)+x\times 2x-0=3x^2+2$. (يمكن تبسيط $f(x)$ بالنشر ثم حساب $f'(x)$)

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

6) $f'(x)=1\times(x^3-1)+(x+1)(3x^2-1)=4x^3-3x^2-x-2$.

(يمكن تبسيط $f(x)$ بالنشر ثم حساب $f'(x)$)

7) $f'(x)=\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)+\left(\frac{1}{x-1}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-(1+\sqrt{x})}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}$.

8) $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-1\times(x^2+x+1)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

9) $f'(x)=\frac{-3x^2+x-2}{x^2+1}=\frac{(-6x+1)(x^2+1)-2x(-3x^2+x-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddiresa.com

10) $f'(x)=2-\left(-\frac{-1}{(1-x)^2}\right)=2-\frac{1}{(1-x)^2}$

11) $f'(x)=\frac{-2}{x^2}-\left(\frac{-1}{(1-x)^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

تنبيه: تبسيط بعض العبارات السابقة متروك لك ...

تمرين 15

في كل من الحالات التالية أدرس اتجاه تغير الدالة f.

1) $f(x)=x^3+x^2+5x+2$.

2) $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$.

3) $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$.

4) $f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

5) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$.

الحل

1) $f(x)=x^3+x^2+5x+2$. $D_f=\mathbb{R}$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=3x^2+2x+5$

مميز كثير الحدود $3x^2+2x+5$ هو $\Delta=-56<0$ ومعامل x^2 هو $3>0$ بالتالي $f'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ، إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$. $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ ، $]-1;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x)=\frac{2\times1-3\times1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}<0$، إذن f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ ، $]-1;+\infty[$.

3) $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$. $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;1[$ ، $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(1)(x^2-2x+5)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة x^2-2x-3 الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

إذن f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-1;1[$ ، $]1;3[$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ ، $]3;+\infty[$.

4) $f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}$. $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}=]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$

لأن f معرفة معناه $x^2+2x-3\neq0$. كثير الحدود x^2+2x-3 يقبل جذرين متمايزين هما -3 و 1.

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالات $]-\infty;-3[$ ، $]-3;1[$ ، $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x-3)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $-2x^2-4x-10$ الذي مميزه $\Delta=-64<0$.

بما أن معامل x^2 هو $-2<0$ فإن $-2x^2-4x-10<0$ على D_f . إذن f متناقصة على كل من المجالات $]-\infty;-3[$ ، $]-3;1[$ ، $]1;+\infty[$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

5) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$. $D_f=[0;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2\sqrt{x}+\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{6x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right)$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $2x-1$ على $]0;+\infty[$ ، كما هو في الجدول:

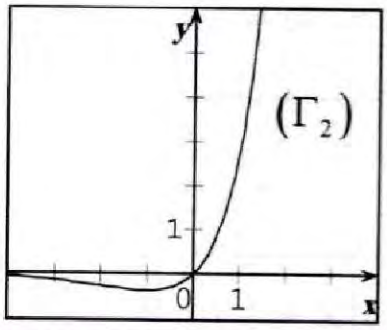
x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

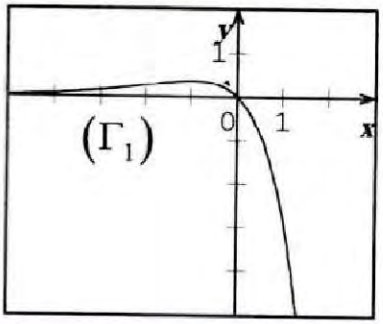
إذن f متناقصة تماما على $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

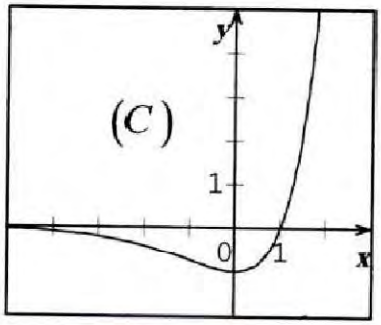
تمرين 16

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث (C) هو تمثيلها البياني أدناه.

أحد المنحنيين (Γ_1) و (Γ_2) أدناه هو المنحنى الممثل للدالة f'، ما هو؟ برر.







الحل

من المنحنى (C) نلاحظ أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. إذن $f'(x)\leq 0$ على المجال $]-\infty;0]$ و $f'(x)\geq 0$ على المجال $[0;+\infty[$.

ومنه (Γ_2) هو المنحنى الممثل للدالة f'.

تمرين 17

لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

عين مجال قابلية اشتقاق الدالة f ثم عين دالتها المشتقة.

الحل

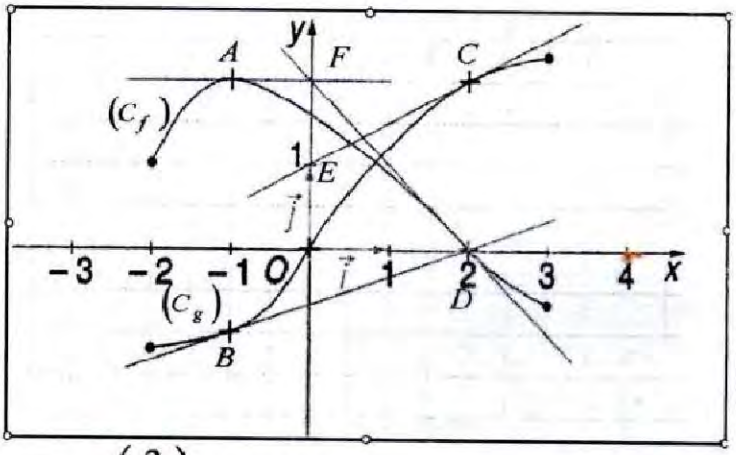
f معرفة معناه $2x-1\geq 0$، أي $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. نلاحظ أن $f(x)=u(2x-1)$، حيث:

$u(x)=\sqrt{x}$ مع $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال المفتوح $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و

لدينا: $f'(x)=2\times u'(2x-1)=2\times\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

تمرين 18

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما في النقاط



المبينة في الشكل المقابل .

1) أحسب الأعداد المشتقة التالية:

* $(f)'(-1)$ * $(g)'(-1)$ * $(f)'(2)$

* $(g)'(2)$ * $(f+g)'(-1)$

* $(fg)'(2)$ * $\left(\frac{1}{f}\right)'(-1)$ * $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

2) من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$. أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

الحل

1) * $(f)'(-1)$ هو معامل توجيه المماس لـ (C_f) عند النقطة A وبما أنه يوازي محور التواصل فإن معامل توجيهه يكون معدوما . إذن $(f)'(-1)=0$.

* $(g)'(-1)$ هو معامل توجيه المماس (BD) لـ (C_g) عند النقطة B وبما أن $B(-1;-1)$ و $D(2;0)$ فإن : $(g)'(-1)=\frac{-1-0}{-1-2}=\frac{1}{3}$. إذن $(g)'(-1)=\frac{1}{3}$.

* $(f)'(2)$ هو معامل توجيه المماس (DF) لـ (C_f) عند النقطة D وبما أن $D(2;0)$ و $F(0;2)$ فإن : $(f)'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$. إذن $(f)'(2)=-1$.

* $(g)'(2)$ هو معامل توجيه المماس (CE) لـ (C_g) عند النقطة C وبما أن $C(2;2)$ و $E(0;1)$ فإن : $(g)'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$. إذن $(g)'(2)=\frac{1}{2}$.

* $(f+g)'(-1)=(f)'(-1)+(g)'(-1)=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$. إذن $(f+g)'(-1)=\frac{1}{3}$.

* $(fg)'(2)=(f)'(2)\times(g)(2)+(f)(2)\times(g)'(2)=(-1)\times 2+0\times\frac{1}{2}=-2$

* $\left(\frac{1}{f}\right)'(-1)=-\frac{(f)'(-1)}{(f)^2(-1)}=\frac{0}{2^2}=0$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

* $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{(f)'(2)\times(g)(2)-(f)(2)\times(g)'(2)}{(g)^2(2)}=\frac{(-1)\times 2-0\times\frac{1}{2}}{2^2}=-\frac{1}{2}$

2) من أجل كل x من المجال $[0;2]$ لدينا: $h'(x)=2f'(2x-1)$.

ومنه: $h'(0)=2f'(2\times 0-1)=2f'(-1)=2\times 0=0$. إذن: $h'(0)=0$

و $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)=2f'(2)=2\times(-1)=-2$. إذن: $h'\left(\frac{3}{2}\right)=-2$

تمرين 19

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sin x$.

1) عين الدوال المشتقة المتتابعة f' ، f'' ، f''' و $f^{(4)}$ للدالة f.

2) ضع ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، تخمينا حول عبارة $f^{(n)}(x)$.

الحل

1) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$f'(x)=\cos x$ ، $f''(x)=-\sin x$ ، $f'''(x)=-\cos x$ و $f^{(4)}(x)=\sin x$.

2) **التخمين**: من أجل كل عدد طبيعي k :

- إذا كان $n=2k+1$ فإن: $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$.
- إذا كان $n=2k+2$ فإن: $f^{(2k+2)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$.

تمرين 20

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج القيم الحدية للدالة f على الجدول.

الحل

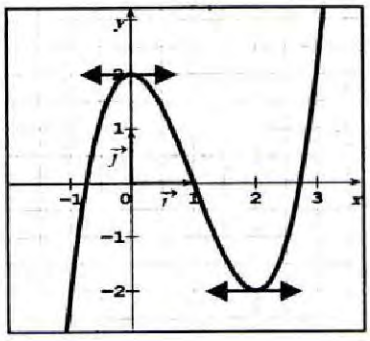
1) الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ ، $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 0 و2 و بالتالي فإشارته هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ويكون جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$



حيث: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $f(0) = 2$ ، $f(2) = -2$.

2) • $f(0) = 2$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة f مثلا على المجال $[-1;1]$.

($0 \in [-1;1]$).

• $f(2) = -2$ هي قيمة حدية محلية صغرى للدالة f مثلا على المجال $[1;3]$. ($2 \in [1;3]$).

تمرين 21

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

الحل

الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين ولدينا: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

و $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$.

إشارة $f''(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

نلاحظ أن $f''(x)$ ينعدم عند 1 ويغير من إشارته بجوار 1، إذن النقطة $A(1;f(1))$ أي $A(1;0)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C).

تمرين 22

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

الحل

الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 3x^2$.

إشارة $f'(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

نلاحظ أن $f'(x)$ ينعدم عند 0 ولا يغير من إشارته بجوار 0، إذن النقطة ذات الإحداثيين $(0;f(0))$ أي $O(0;0)$ مبدأ المعلم هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C).

تمرين 23

عين مشتقة الدالة f المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2-9}$.

الحل

نلاحظ أن $f = \sqrt{u}$ مع $u(x) = x^2 - 9$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]3;+\infty[$ مع $u(x) > 0$. إذن f قابلة للاشتقاق على $]3;+\infty[$ ولدينا $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

ومنه من أجل كل x من $]3;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

تمرين 24

عين مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)^3$.

الحل 25

نلاحظ أن $f=u^3$ مع $u(x)=x^2-2x+1$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $u'(x)=2x-2$. إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'=3u'u^2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=3(2x-2)\left(x^2-2x+1\right)^2$.

تمرين 26

عين مشتقة الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^3}$.

الحل

نلاحظ أن $f=\dfrac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا $u'(x)=2x$. إذن f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $f'=-\dfrac{3u'}{u^4}$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\dfrac{3(2x)}{\left(x^2-1\right)^4}=-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^4}$.

تمرين 27

أحسب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى I في كل حالة:

1) $f(x)=\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^3$ و $I=]1;+\infty[$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ و $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\sin\left(1-x^2\right)$ و $I=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^3$ و $I=\mathbb{R}$.

5) $f(\theta)=\sqrt{\cos\theta}$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

6) $f(t)=\tan^3 t$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

الحل

1) $f'(x)=3\times\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)'\times\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2=3\times\dfrac{1}{(x-1)^2}\times\dfrac{x^2-4x+4}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-12x+12}{(x-1)^4}$

2) $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+3\right)'}{2\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3) $f'(x)=\left(1-x^2\right)'\sin'\left(1-x^2\right)=(-2x)\cos x\left(1-x^2\right)$

4) $f'(x)=3\times\left(x^2+2x-3\right)'\times\left(x^2+2x-3\right)^2=3(2x+2)\left(x^2+2x-3\right)^2$

5) $f'(\theta)=(\cos\theta)'\times\dfrac{1}{2\sqrt{\cos\theta}}=\dfrac{-\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}$

6) $f'(t)=3\times\tan' t\times\tan^2 t=3\times\dfrac{1}{\cos^2 t}\times\tan^2 t=\dfrac{3\tan^2 t}{\cos^2 t}$

تمرين 28

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-2}$.

1) شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) استنتج جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ بـ: $g(x)=f(x^2)$.

الحل

1) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{x-2}=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{2x+2}{x-2}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$

و $f'(x)=\dfrac{-6}{(x-2)^2}<0$، إذن f متناقصة تماما على $]2;+\infty[$، جدول تغيرات f هو:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2

لدينا: $g(x)=f(x^2)$، ومنه:

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)=2$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$.
- بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\ x>\sqrt{2}}}x^2=2$ و $\lim\limits_{\substack{X\to 2\\ X>2}}f(X)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\ x>\sqrt{2}}}g(x)=+\infty$.
- ولدينا: $g'(x)=\left(x^2\right)'f'(x^2)=(2x)\times\left(\dfrac{-6}{\left(x^2-2\right)^2}\right)=\dfrac{-12x}{\left(x^2-2\right)^2}$

على المجال $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$: $\dfrac{-12x}{\left(x^2-2\right)^2}<0$، ومنه $g'(x)<0$، إذن g متناقصة تماما على $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$، جدول تغيرات g هو:

x	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	2

تمرين 29

جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على المجال $[-2;3]$

x	-2	1	3
$u'(x)$	+	+	
$u(x)$	-1 ↗	0 ↗	4

1) عين إشارة $u(x)$.

2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة كما يلي: $f=u^2$ ؛ $g=\frac{1}{u}$ ؛ $h=\sqrt{u}$

أ- عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال f، g و h.

ب- عبر عن كل من $f'(x)$، $g'(x)$ و $h'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.

جـ- استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال f، g و h.

الحل

1) من جدول التغيرات نجد هكذا:

x	-2	1	3
$u(x)$	-	0	+

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) أ • $f=u^2$: الدالة f معرفة على المجال $[-2;3]$.

• $g=\frac{1}{u}$: الدالة g معرفة معناه: $u(x)\neq 0$ على المجال $[-2;3]$، إذن:

g معرفة على $[-2;1[\cup]1;3]$.

• $h=\sqrt{u}$: الدالة h معرفة معناه: $u(x)\geq 0$ على المجال $[-2;3]$، إذن:

h معرفة على $[1;3]$.

ب • $f=u^2$ ومنه: $f'=2u'u$، إذن من أجل كل x من $[-2;3]$:

$f'(x)=2u'(x)u(x)$.

• $g=\frac{1}{u}$ ومنه: $g'=\frac{-u'}{u^2}$، إذن من أجل كل x من $[-2;1[\cup]1;3]$: $g'(x)=\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$

• $h=\sqrt{u}$ ومنه: $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، إذن من أجل كل x من $]1;3]$: $h'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

جـ- **جدول تغيرات** f :

x	-2		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	16

التبرير :

$f(-2)=u^2(-2)=(-1)^2=1$. $f(1)=u^2(1)=(0)^2=0$.

$f(3)=u^2(3)=(4)^2=16$

$f'(x)=2u'(x)u(x)$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $u(x)$ لأن $u'(x)\geq 0$.

جدول تغيرات g :

x	-2		1		3
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	-1	↘	‖	↘	$\frac{1}{4}$
			$-\infty$		

التبرير :

$g(-2)=\dfrac{1}{u(-2)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ ، $g(3)=\dfrac{1}{u(3)}=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 1}} u(x)=0^-$ ومنه $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 1}} \dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 1}} g(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}} u(x)=0^+$ ومنه $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}} \dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}} g(x)=+\infty$.

$g'(x)=\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $u'(x)$ على كل من المجالين $[-2;1[$ ، $]1;3]$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

جدول تغيرات h :

x	1		3
$h'(x)$	‖	+	
$h(x)$	0	↗	2

التبرير :

$h(1)=\sqrt{u(1)}=\sqrt{0}=0$. $h(3)=\sqrt{u(3)}=\sqrt{4}=2$.

$h'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفسها إشارة $u'(x)$ على المجال $]1;3[$.

تمرين 30

باستخدام مفهوم التقريبات ، عين قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{100,2}$.

الحل

نعتبر الدالة f - الدالة الجذر التربيعي - (يمكن اختيار دالة أخرى) المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\sqrt{x}$. الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

من أجل $h>0$ وقريب من 0 نجد : $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ أي :

$\sqrt{x+h}\approx\sqrt{x}+\dfrac{h}{2\sqrt{x}}$. بوضع $x=100$ و $h=0,2$ في العلاقة الأخيرة نحصل على :

$$\sqrt{100,2}=\sqrt{100+0,2}\approx\sqrt{100}+\frac{0,2}{2\sqrt{100}}=10+\frac{0,2}{2\times10}=10+0,01=10,01$$

إذن: $\sqrt{100,2}\approx10,01$

ملاحظة : تعطي الآلة الحاسبة النتيجة 10,009995004

تمرين 31

1) برر التقريب التألفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

أ) $(3+h)^4\approx81+108h$. ب) $\sqrt{1+h}\approx1+\dfrac{h}{2}$. جـ) $\dfrac{1}{1+h}\approx1-h$. د) $\sinh\approx h$.

2) استنتج قيمة مقربة لكل من الأعداد: $(3,012)^4$ ، $\sqrt{3,948}$ ، $\dfrac{1}{1,977}$.

الحل

أ – الدالة $f:x\mapsto x^4$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=4x^3$

إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $f(3+h) \approx f(3) + f'(3) \times h$

ومنه: $(3+h)^4 \approx 81 + 108h$.

ب- الدالة $g : x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $g(1+h) \approx g(1) + g'(1) \times h$

ومنه: $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$.

جـ- الدالة $k : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ولدينا

$k'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $k(1+h) \approx k(1) + k'(1) \times h$

ومنه: $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

د- الدالة $\varphi : x \mapsto \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $\varphi'(x) = \cos x$. إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $\varphi(0+h) \approx \varphi(0) + \varphi'(0) \times h$ ومنه: $\sinh \approx h$.

2) باستعمال نتيجة السؤال 1 الفرع أ - نجد :

$(3,012)^4 \approx (3+0,012)^4 \approx 81 + 108 \times 0,012 \approx 82,296$

باستعمال نتيجة السؤال 1 الفرع ب - نجد :

$\sqrt{3,948} = \sqrt{3+0,948} \approx 1 + \dfrac{0,948}{2} \approx 1,4740$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

باستعمال نتيجة السؤال 1 الفرع جـ - نجد :

$\dfrac{1}{1,977} = \dfrac{1}{1+0,977} \approx 1 - 0,977 \approx 0,0230$

تمرين 32

f دالة قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;1[$ ، بحيث: $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$.

باستعمال طريقة أولر، و بخطوة قدرها 0,2 . أنشئ تمثيلا بيانيا تقريبيا لـ (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$.

الحل

باستعمال العلاقة $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ ، نشكل جدولا يتضمن القيم التقريبية للدالة f المجال $[0;1]$ مبتدئين في الإنطلاقة من كون $f(0) = 1$ و بخطوة h قدرها 0,2 . هذه الخطوة تسمح بتقسيم المجال $[0;1]$ إلى خمس مجالات متساوية الطول، طول كل مجال 0,2 .

نجد هكذا :

$f(0,2) \approx f(0) + 0,2 \times f'(0) \approx 1,20$

$f(0,4) \approx f(0,2) + 0,2 \times f'(0,2) \approx 1,40$

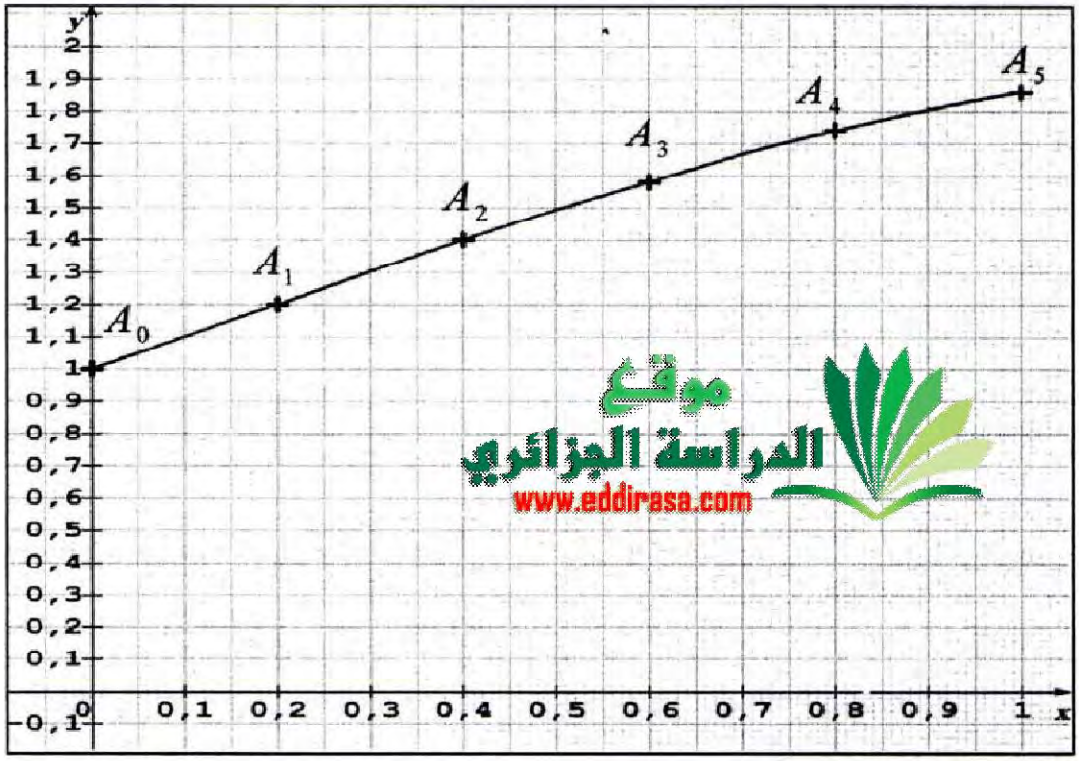
$f(0,6) \approx f(0,4) + 0,2 \times f'(0,4) \approx 1,58$

$f(0,8) \approx f(0,6) + 0,2 \times f'(0,6) \approx 1,74$

$f(1) \approx f(0,8) + 0,2 \times f'(0,8) \approx 1,86$

x	$f(x)$
0	1
0,2	1,20
0,4	1,40
0,6	1,58
0,8	1,74
1	1,86

نصل بين النقاط : $A_0(0;1)$ ، $A_1(0,2;1,20)$ ، $A_2(0,4;1,40)$ ، $A_3(0,6;1,58)$ ، $A_4(0,8;1,74)$ ، $A_5(1;1,86)$. نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$.



تمرين 33

f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty;+\infty[$ حيث يعطى جدول تغيراتها .

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة مبررا ذلك.

1) من أجل كل $x \in]0;1]$ ، $f(x) \leq 1$.

2) المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مماس لمنحنى الدالة f.

3) إذا كان $a \geq 1$ ، فإن $f(a) \geq 1$.

4) يكون مماس منحنى الدالة f عند نقطته ذات الفاصلة 1 موازيا لحامل محور الفواصل.

الحل

1) **صحيح**، لأن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1]$ وبالتالي إذا كان $x \in]0;1]$ ، فإن $x \leq 1$ ومنه $f(x) \leq f(1)$ ، لكن $f(1) = 1$ إذن : $f(x) \leq 1$.

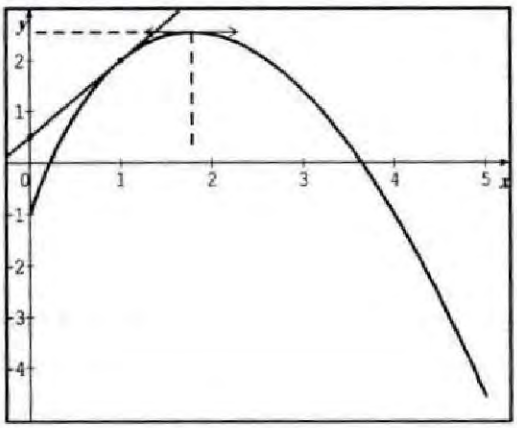
2) **خطأ**، المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

3) **خطأ**، لأن الدالة f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$ وبالتالي إذا كان $a \in]1;+\infty[$ ، فإن $a \geq 1$ ومنه $f(a) \leq f(1)$ ، لكن $f(1) = 1$ إذن : $f(a) \leq 1$.

4) **صحيح**، لأن $f'(x)$ ينعدم عند 1 و يغير من إشارته بجوار 1 .

تمرين 34

الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;5[$ ، المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$.



1) بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2) حل بيانيا في المجال $[0;5[$ المتراجحات التالية :

(القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-2})

أ) $f(x) \geq 0$ ، ب) $f'(x) \geq 0$ ، ج) $f(x) \geq 1$.

3) نقبل أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;5[$: $f(x) = a + bx\left(2 - \sqrt{x}\right)$

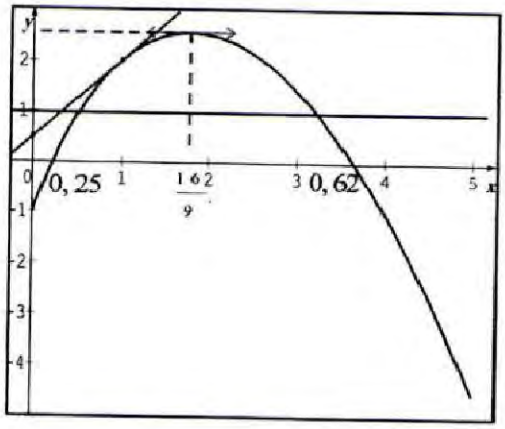
a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;5[$ ، $f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$.

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال1 عين a و b .

الحل

1) بقراءة بيانية نجد $f(1) = 2$ و $f'(1)$ هو معامل توجيه المستقيم المار من النقطتين ذواتا الاحداثيين $(1;2)$ و $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. ومنه : $f'(1) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$ ، إذن : $f'(1) = \frac{3}{2}$.



2) بيانيا في المجال $]0;5[$:

- $f(x) \geq 0$ إذا كان $x \in [0,25;0,62]$.
- $f'(x) \geq 0$ إذا كان $x \in \left]0;\frac{16}{9}\right]$.
- $f(x) \geq 1$ إذا كان $x \in [0,5;3,25]$.

أ- 3) من أجل كل x من $]0;5[$:

$$f'(x) = b\left(2-\sqrt{x}\right) - bx\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = b\left(2-\sqrt{x}\right) - \frac{bx \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$$

$$= b\left(2-\sqrt{x}\right) - \frac{bx \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = b\left(2-\sqrt{x}\right) - \frac{b\sqrt{x}}{2} = b\left(2-\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

إذن : $f'(x) = b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$.

ب- لدينا: $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{3}{2}$ ومنه : $\begin{cases} a+b=2 \\ \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$.

إذن: $f(x) = -1+3x\left(2-\sqrt{x}\right)$.

تمرين 35

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 .

2)- بين أنه من أجل كل $x \neq -2$ يمكن كتابة : $f(x) = ax+b+\frac{c}{2x+4}$ ،

حيث a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

- استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C).

5) أرسم (C) و المستقيمات المقاربة.

الحل

1) لدينا: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+5x+10}{2x+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. بنفس الكيفية نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

لحساب النهايتين: $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-2}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-2}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام $2x+4$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

ومنه: $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to-2}} \dfrac{2x^2+5x+10}{2x+4} = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$. إذن: $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-2}} f(x) = -\infty$.

و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to-2}} \dfrac{2x^2+5x+10}{2x+4} = \dfrac{8}{0^+} = +\infty$. إذن: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-2}} f(x) = +\infty$.

2) ـ لدينا من أجل كل $x \neq -2$:

$ax+b+\dfrac{c}{2x+4} = \dfrac{(ax+b)(2x+4)}{(2x+4)} + \dfrac{c}{2x+4} = \dfrac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4}$ ،

ومنه: $\dfrac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4} = f(x)$ تعني:

أي: $\dfrac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4} = \dfrac{2x^2+5x+10}{2x+4}$

بالمطابقة نجد: $2ax^2+(4a+2b)x+4b+c = 2x^2+5x+10$ ،

ومنه: $\begin{cases} 2a=2 \\ 4a+2b=5 \\ 4b+c=10 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=1 \\ 4\times1+2b=5 \\ 4b+c=10 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2} \\ 4\times\dfrac{1}{2}+c=10 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=8 \end{cases}$

لدينا إذن: $f(x) = x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{2x+4}$. أي: $f(x) = x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{x+2}$.

لدينا: $f(x) = x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{x+2}$ ، ومنه: $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{x+2}$. بما أن:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x+2}=0$. نستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته له: $y=x+\frac{1}{2}$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

- لدراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ أي إشارة $\frac{4}{x+2}$

• إذا كان $x<-2$ فإن $x+2<0$ ومنه $\frac{4}{x+2}<0$. بالتالي (C) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;-2[$.

• إذا كان $x>-2$ فإن $x+2>0$ ومنه $\frac{4}{x+2}>0$. بالتالي (C) يقع فوق (Δ) على المجال $]-2;+\infty[$.

3) الدالة f تقبل الإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+5x+10\right)'(2x+4)-(2x+4)'\left(2x^2+5x+10\right)}{(2x+4)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

إذن: $f'(x)=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$. إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $x(x+4)$ المبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$x(x+4)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

بالتالي : الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-4]$ ، $[0;+\infty[$. ومتناقصة تماما على كل من المجالين $[-4;-2[$ ، $]-2;0]$ فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘	‖	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

حيث: $f(0)=\frac{5}{2}=2,5$ و $f(-4)=-\frac{11}{2}=-5,5$.

4) إثبات أن النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C) :

تذكير :

f دالة مجموعة تعريفها D . و (C) تمثيلها البياني في معلم .

لإثبات أن النقطة $A(a;b)$ هي مركز تناظر لـ (C) يمكن اتباع إحدى الطرق التالية:

* لكل x من D يكون $2a-x$ من D و: $f(2a-x)+f(x)=2b$.
* لكل x من D يكون $a-x$ و $a+x$ من D و: $f(a-x)+f(a+x)=2b$.
* نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع: $\begin{cases} x=X+a \\ y=Y+b \end{cases}$.

تصبح $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X+a)-b$. هذه الأخيرة تعرف دالة g .

نبرهن أن g دالة فردية .

نستعمل هنا الطريقة الأولى:

لكل x من D_f يكون $2(-2)-x$ من D_f و:

$$f(2(-2)-x)+f(x)=f(-4-x)+f(x)=\left(-4-x+\frac{1}{2}+\frac{4}{-4-x+2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}+\frac{4}{x+2}\right)$$

$$=-3-\frac{4}{x+2}+\frac{4}{x+2}=-3=2\left(\frac{-3}{2}\right)$$

إذن النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C) .

5) **الرسم :**

المستقيمات المقاربة:

* $(\Delta): y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.
* $(d): x=-2$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$. لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} f(x)=+\infty$

النقاط الحدية:

من جدول التغيرات النقطتان $A_1(-4;-5,5)$ ، $A_2(0;2,5)$ نقطتان حديتان في المنحنى (C) ، المماسان لـ (C) عندهما موازين لمحور الفواصل.

عناصر تناظر المنحنى (C) :

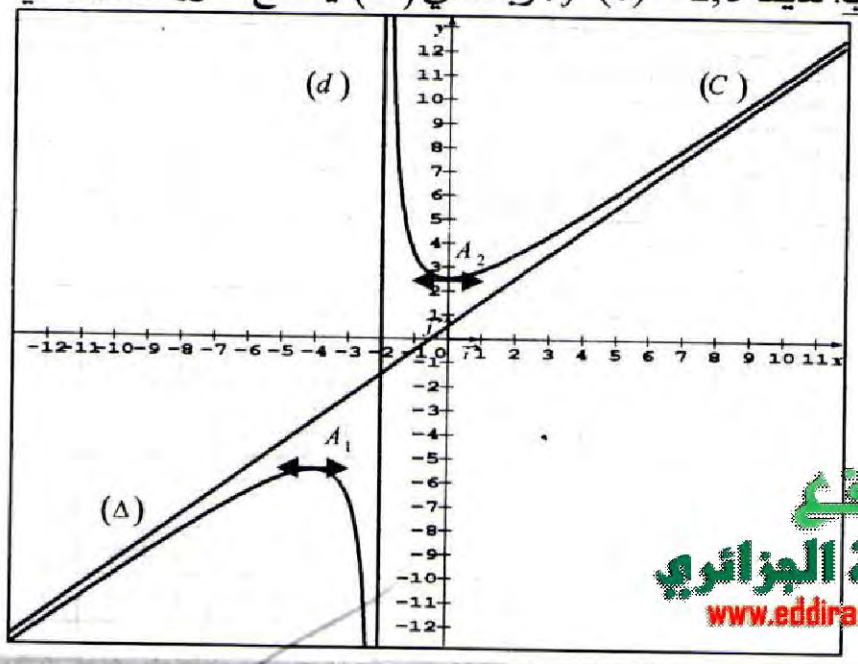
النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C) .

نقاط التقاطع مع محوري الإحداثيات:

* مع محور الفواصل: من جدول التغيرات نلاحظ ان المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلولا ، وبالتالي

(C) لا يقطع محور الفواصل .

• مع محور التراتيب: لدينا $f(0)=2,5$ ، وبالتالي (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $A_2(0;2,5)$.



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 36

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$.

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ ـ برّر أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$ ، هو مقارب مائل للمنحنى (C) . أدرس الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل .

ب ـ أرسم (d) ثم (C) .

3) أ ـ باستعمال (C) ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^2+(1-m)x+2m=0$.

4) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $g(x)=\left|\dfrac{x(x+1)}{x-2}\right|$.

أ – أكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x .

ب – أرسم (γ) منحنى الدالة g اعتمادا على (C) .

5) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}$.

أ – بين أن h دالة زوجية.

ب – أرسم (Γ) منحنى الدالة h اعتمادا على (C) .

الحل

1) **دراسة تغيرات الدالة** f :

* **مجموعة التعريف:** $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

* **النهايات:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

لحساب النهايتين $\lim\limits_{\substack{<\\x\to2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to2}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام $(x-2)$ الموضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

ومنه:

$$\lim_{\substack{>\\x\to2}} f(x) = \lim_{\substack{>\\x\to2}} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{6}{0^+} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{<\\x\to2}} f(x) = \lim_{\substack{<\\x\to2}} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

نستنتج عندئذ ، أن المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

* **اتجاه التغير:**

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;2[$ ، $]2;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-x(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود x^2-4x-2 الذي يقبل جذرين متمايزين هما $2+\sqrt{6}$ و $2-\sqrt{6}$ الموضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-4x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$5-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$5+2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

حيث: $f(2-\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}$ و $f(2+\sqrt{6})=5+2\sqrt{6}$

2) أ- اثبات أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$، هو مقارب مائل للمنحني (C).

لدينا: $f(x)-(x+3)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}-(x+3)=\dfrac{6}{x-2}$. ولدينا:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x-2}=0$

إذن: المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$، هو مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.

لدراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (d)، ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+3)$ أي $\dfrac{6}{x-2}$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(x+3)$	-	‖	+

- إذا كان $x<2$ فإن (C) يقع تحت (d).
- إذا كان $x>2$ فإن (C) يقع فوق (d).

ب- رسم (d)

x	0	1
y	3	4

- رسم (C)

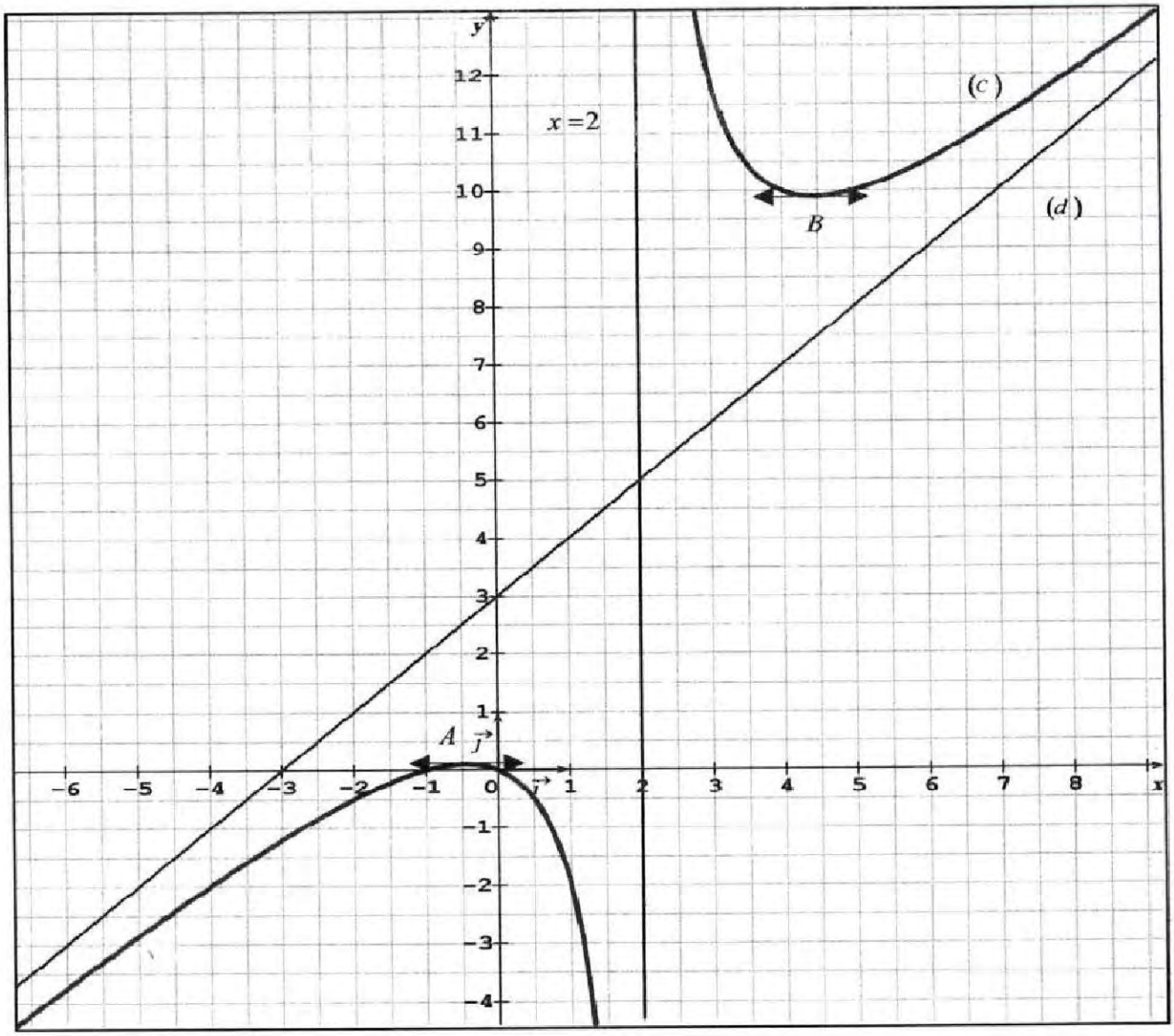
* النقاط الحدية: من جدول التغيرات (C) يقبل نقطتان حديتان هما $A(2-\sqrt{6};5-2\sqrt{6})$ و $B(2+\sqrt{6};5+2\sqrt{6})$. المماسان لـ (C) عند A و B موازيان لمحور الفواصل.

* نقاط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات:

- مع محور الفواصل: $f(x)=0$ تعني $\dfrac{x(x+1)}{x-2}=0$ ومنه: $x(x+1)=0$، أي:

$x=0$ أو $x=-1$. ومنه (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين $O(0;0)$، $C(-1;0)$.

- مع محور التراتيب: $f(0)=\dfrac{0(0+1)}{0-2}=0$، ومنه (C) يقطع محور التراتيب في $O(0;0)$.



3) أ- لدينا: $x^2+(1-m)x+2m=0$...(1) تكافئ $x^2+x=m(x-2)$ أي

$\frac{x(x+1)}{x-2}=m$ ، إذن $x^2+(1-m)x+2m=0$ تكافئ $f(x)=m$.

بالتالي حلول المعادلة (1) ، إن وجدت ، هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم الذي معادلته $y=m$ ، الموازي دوما لمحور الفواصل . بقراءة بيانية نجد هكذا :

- إذا كان $m<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين مختلفين في الإشارة .
- إذا كان $m=0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما : 0 و 1- .
- إذا كان $0<m<5-2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين .
- إذا كان $m=5-2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا سالبا هو $2-\sqrt{6}$.
- إذا كان $5-2\sqrt{6}<m<5+2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) لا تقبل حلولا.

- إذا كان $m = 5 + 2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا موجبا هو $2 + \sqrt{6}$.

- إذا كان $m > 5 + 2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين موجبين.

4) أ- كتابة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x .

نلاحظ أن: $g(x) = |f(x)|$. ومنه: $g(x) = \begin{cases} f(x) & ;f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ;f(x) \leq 0 \end{cases}$

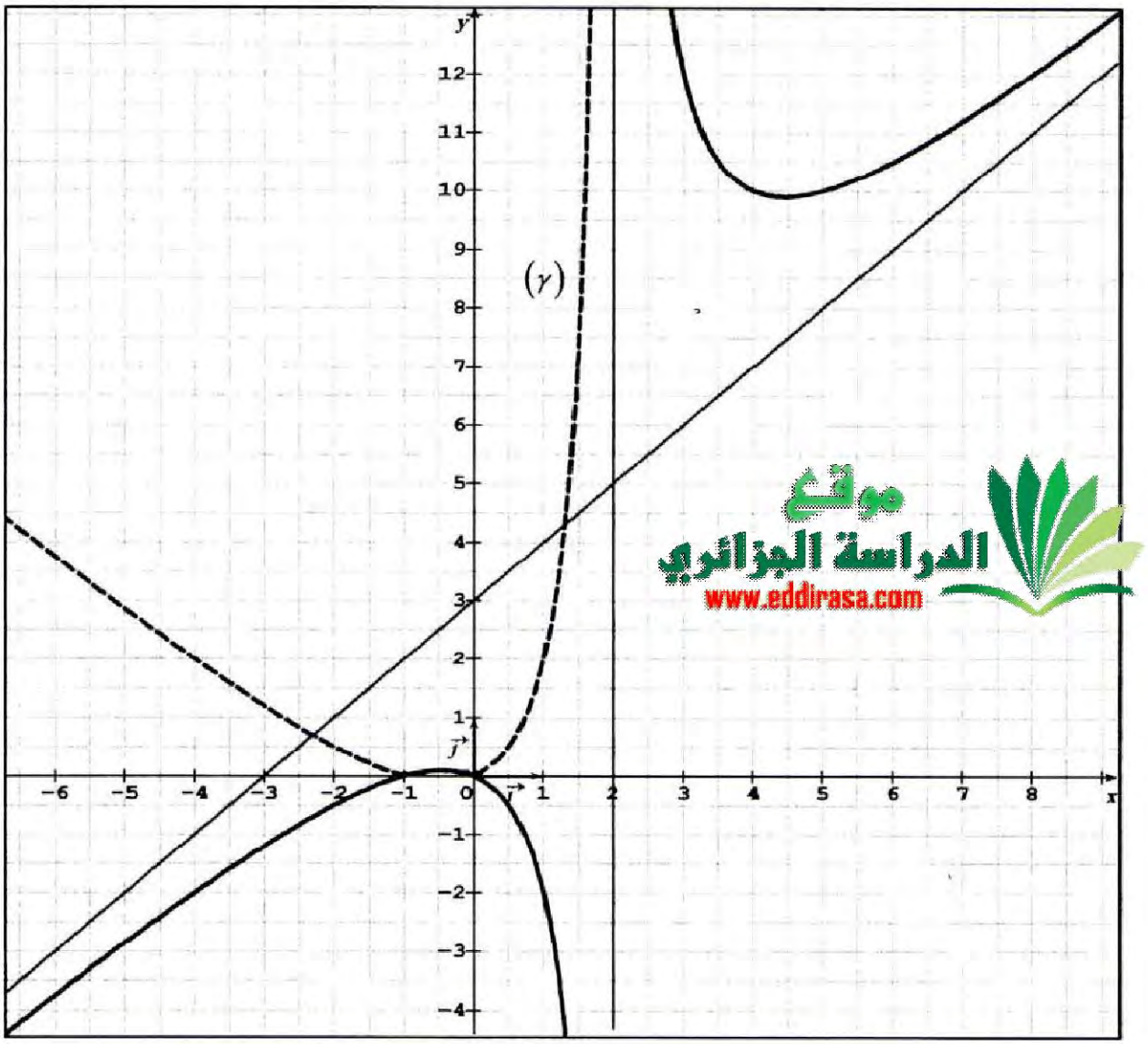
لدينا مما سبق ، وباستعمال المنحنى (C) :

$f(x) \geq 0$ على $]-\infty;-1] \cup [0;2[$ و $f(x) \leq 0$ على $[-1;0] \cup]2;+\infty[$. إذن :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ;x \in [-1;0] \cup]2;+\infty[\\ -f(x) & ;x \in]-\infty;-1] \cup [0;2[\end{cases}$$

ب- نستنتج عندئذ أن : - المنحنى (γ) ينطبق على (C) من أجل $x \in [-1;0] \cup]2;+\infty[$.

- المنحنى (γ) هو نظير (C) بالنسبة إلى محور الفواصل من أجل $x \in]-\infty;-1] \cup [0;2[$.



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

5) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}$.

أ – إثبات أن h دالة زوجية:

لدينا: $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و:

$$h(-x)=\frac{|-x|(|-x|+1)}{|-x|-2}=\frac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}=h(x)$$

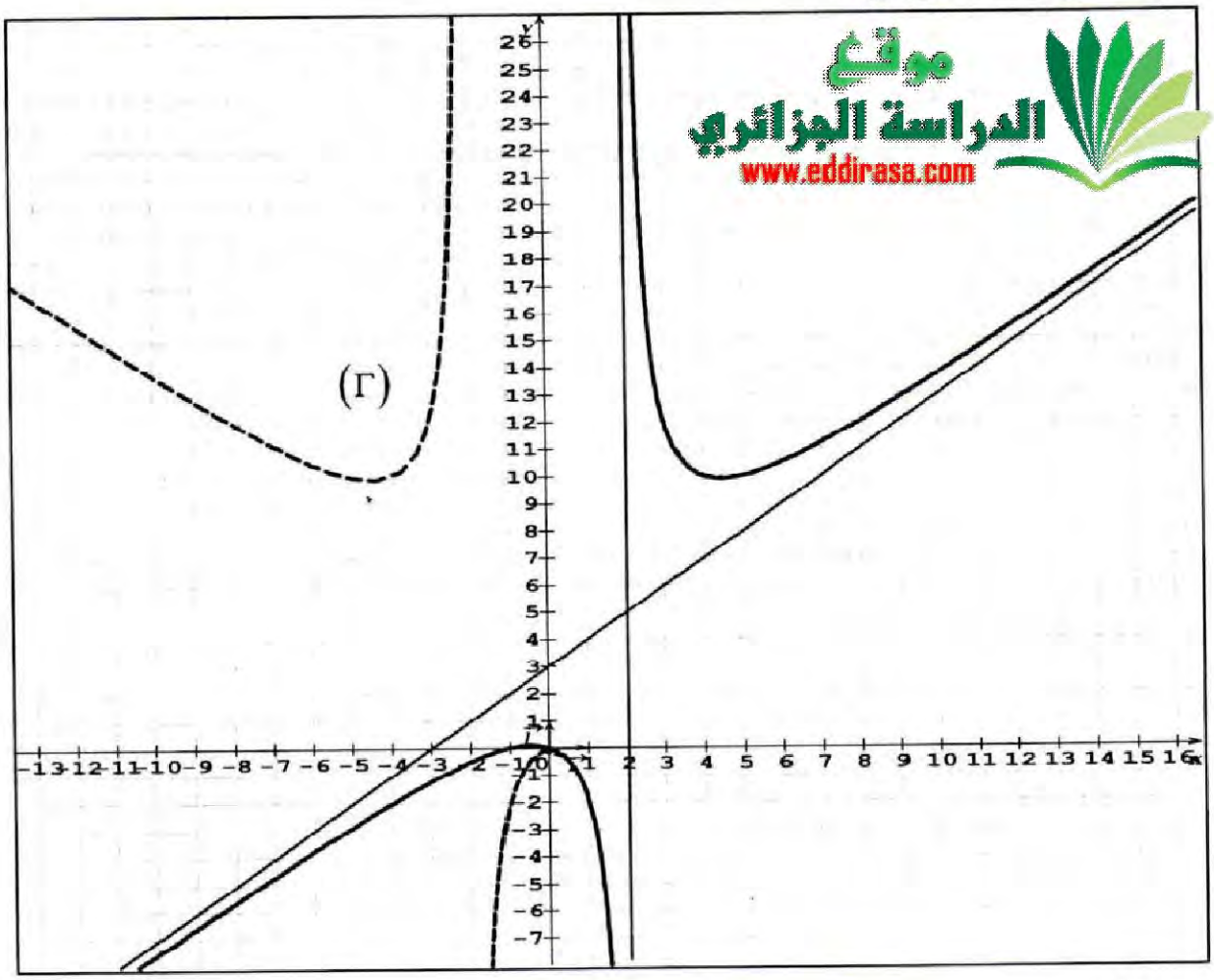
نستنتج عندئذ أن (Γ) منحنى h يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.

ب – رسم (Γ) اعتمادا على (C).

نلاحظ أن: $h(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x) & ;x\in[0;2[\cup]2;+\infty[\\ f(-x) & ;x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]\end{cases}$

– نستنتج عندئذ أن:

- المنحنى (Γ) ينطبق على (C) من أجل $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$.
- نتم رسم (Γ) من أجل $x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لكون h دالة زوجية.

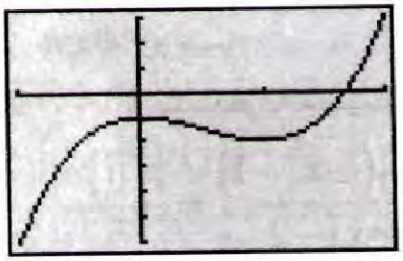


موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 37

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x^3-3x^2-1$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.



1) لاحظ (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية ثم ضع تخمينا حول إشارة $g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1,6 و 1,7.

4) استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة: $4cm$).

1) بين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين.

2) بين أنه من كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+1[$: $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$.

6) بعد دراسة إشارة $f(x)-(-x+1)$ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ).

ماذا تستنتج ؟

7) نأخذ $\alpha\approx 1,64$

أ ـ عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

ب ـ أرسم (C_f) و (Δ).

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

I) 1) نلاحظ أن (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α محصورة بين 1 و 2. التخمين حول إشارة $g(x)$ موضوع في الجدول التالي:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) دراسة تغيرات الدالة g :

* مجموعة التعريف : $D_g =]-1;+\infty[$

* النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} g(x) = -6$.

* اتجاه التغير : $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ ، إشارة $g'(x)$ موضحة في الجدول:

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

حيث: $g(0) = -1$ و $g(1) = -2$.

3) من جدول التغيرات ، نلاحظ أنه على المجال $[1,6;1,7]$ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما .

و $g(1,6) \approx -0,48 < 0$ و $g(1,7) \approx 0,15 > 0$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $1,6$ و $1,7$.

4) من السؤال الثالث ، تكون إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

- إذا كان $-1 < x < \alpha$ فإن $g(x) < 0$.
- $g(\alpha) = 0$.
- إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) > 0$.

لدينا إذن:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

وهذا يوافق التخمين الموضوع آنفا .

II)

1) لدينا:

$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} \dfrac{1-x}{x^3+1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$. ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$. ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = 0$

(محور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

2) لدينا: $f'(x) = \frac{(-1)(x^3+1)-3x^2(1-x)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) لكون $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ ، نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$. لدينا إذن :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ 0

4) معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي من الشكل :

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ، حيث : $f(0) = \frac{1-0}{0^3+1} = 1$ و : $f'(0) = \frac{g(0)}{(0^3+1)^2} = -1$

إذن : $(\Delta): y = -x+1$.

5) لدينا: من أجل كل x من $]-1;+1[$:

$$f(x)-(-x+1) = \frac{1-x}{x^3+1}-(-x+1) = \frac{1-x}{x^3+1}-(1-x) = (1-x)\left(\frac{1}{x^3+1}-1\right)$$

$$= (1-x)\left(\frac{-x^3}{x^3+1}\right) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

- يمكن إثبات صحة هذه المساواة بطرق أخرى ...

6) إشارة $f(x)-(-x+1)$ هي من إشارة $\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$.

ولدينا من جهة : $\frac{x^3(x-1)}{x^3+1} = \frac{x^2 \times x(x-1)}{x^3+1}$ ، إذن إشارة $f(x)-(-x+1)$ هي من إشارة $x(x-1)$ على المجال $]-1;1[$ ، لأن $\frac{x^2}{x^3+1} > 0$ على المجال $]-1;1[$.

x	-1		0		1
x		-	0	+	
$x-1$		-		-	
$x(x-1)$		+	0	-	

إذن :

- إذا كان $x \in]-1;0[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .
- إذا كان $x \in]0;1[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 ، أي في النقطة $A(0;-0+1)$ ، $A(0;1)$

نلاحظ أن (Δ) يخترق المنحني (C_f) في النقطة $A(0;1)$ ، إذن النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

7) نأخذ $\alpha \approx 1,64$

أ - تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} :

لدينا : $\alpha \approx 1,64$ و $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha^3+1} \approx -0,118$

بالتدوير إلى 10^{-2} يكون $f(\alpha) \approx -0,12$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ب - رسم (C_f) و (Δ) .

- رسم (Δ)

x	0	1
y	1	0

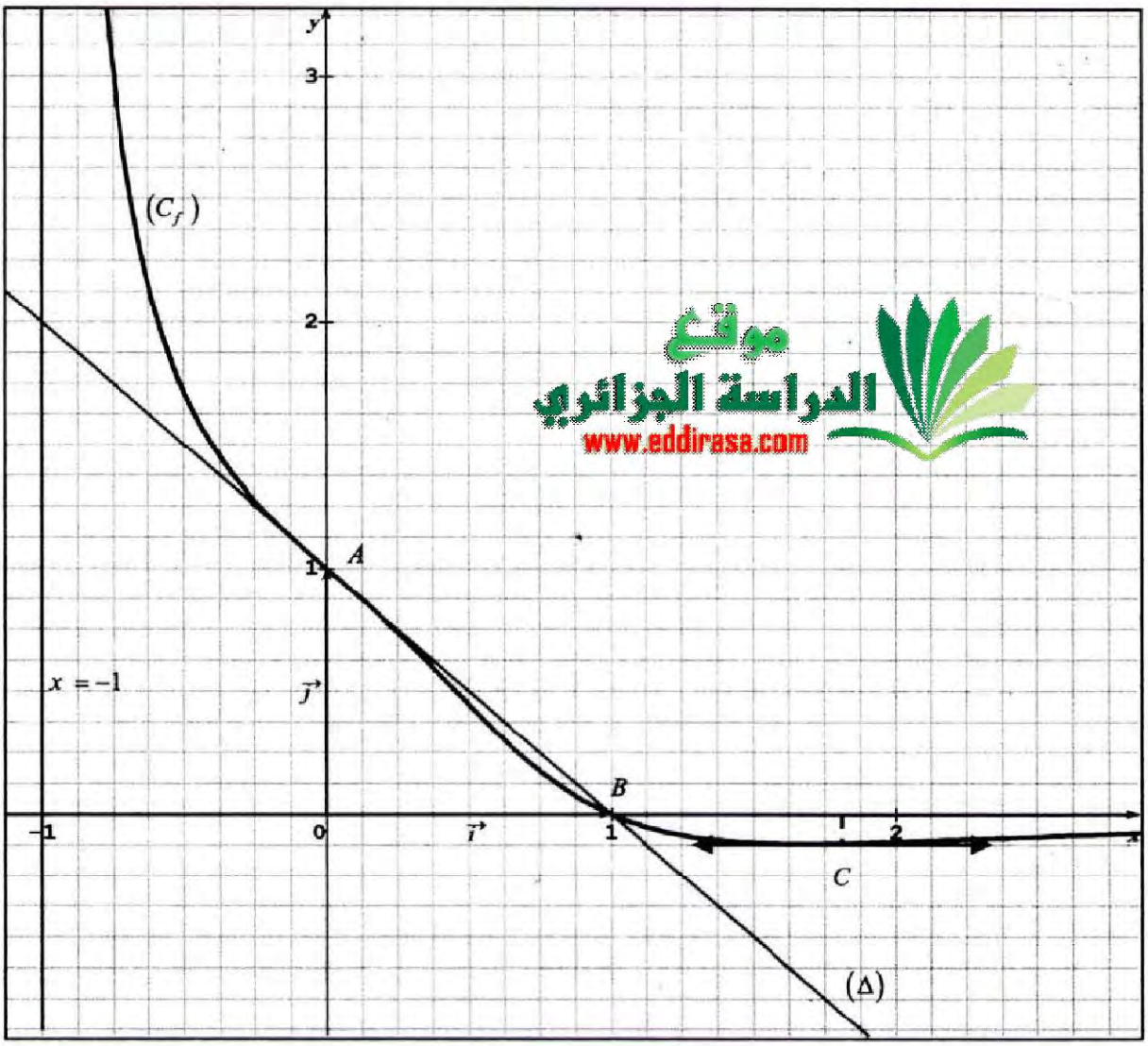
- رسم (C_f) : لتعيين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

$f(x)=0$ يكافئ $1-x=0$ يكافئ $x=1$ ، ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $B(1;0)$.

$f(0)=1$ ومنه (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $A(0;1)$ نقطة الانعطاف .

النقطة $C(\alpha;f(\alpha))$ هي نقطة حدية حيث: $\alpha \approx 1,64$ و $f(\alpha) \approx -0,12$

يكون المماس لـ (C_f) عند $C(\alpha;f(\alpha))$ موازيا لمحور الفواصل .



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي $f(x)=|x-3|+\dfrac{2}{x-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 3 مفسرا ذلك بيانيا.

3) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة التعريف .

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) بين أن المستقيمين $(\Delta): y=x-3$ و $(\Delta'): y=-x+3$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

6) حدد وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') .

7) أرسم (C) ، (Δ) و (Δ') في نفس المعلم .

الحل

1) بما أن $x \neq 1$ يكون لدينا :

$$f(x)=\begin{cases} x-3+\dfrac{2}{x-1} & ;x\in[3;+\infty[\\ -x+3+\dfrac{2}{x-1} & ;x\in]-\infty;1[\cup]1;3] \end{cases}$$

2) لدينا : $f(3)=1$ و :

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{\substack{<\\ x\to 3}}\frac{-x+3+\dfrac{2}{x-1}-1}{x-3}=\lim_{\substack{<\\ x\to 3}}\left(-1+\frac{\dfrac{-2(x-3)}{2(x-1)}}{x-3}\right)=\lim_{\substack{<\\ x\to 3}}\left(-1-\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{3}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 3 من اليسار وعددها المشتق من اليسار عند 3 هو $f'_g(3)=-\frac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{\substack{>\\ x\to 3}}\frac{x-3+\dfrac{2}{x-1}-1}{x-3}=\lim_{\substack{>\\ x\to 3}}\left(1+\frac{\dfrac{-2(x-3)}{2(x-1)}}{x-3}\right)=\lim_{\substack{>\\ x\to 3}}\left(1-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 3 من اليمين وعددها المشتق من اليمين عند 3 هو $f'_d(3)=\frac{1}{2}$. لدينا : $f'_g(3)\neq f'_d(3)$ ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

بيانيا :

عند النقطة $A(3;1)$ يقبل المنحنى (C) نصف مماس من اليمين معامل توجيهه $f'_d(3)=\frac{1}{2}$

ونصف مماس من اليسار معامل توجيهه $f'_g(3)=-\frac{3}{2}$ ، النقطة $A(3;1)$ هي نقطة زاوية .

3) * $\lim_{\substack{<\\ x\to 1}}f(x)=\lim_{\substack{<\\ x\to 1}}\left(|x-3|+\frac{2}{x-1}\right)=2+\frac{2}{0^-}=-\infty$ ، إذن : $\lim_{\substack{<\\ x\to 1}}f(x)=-\infty$.

* $\lim_{\substack{>\\ x\to 1}}f(x)=\lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left(|x-3|+\frac{2}{x-1}\right)=2+\frac{2}{0^+}=+\infty$ ، إذن : $\lim_{\substack{>\\ x\to 1}}f(x)=+\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-3+\frac{2}{x-1}\right)=+\infty$ ، لأن :

$\lim_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right)=0$. إذن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x+3+\frac{2}{x-1}\right) = +\infty$ ، لأن :

$\lim_{x\to-\infty}(-x-3) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right) = 0$. إذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

4) $f'(x) = \begin{cases} 1-\frac{2}{(x-1)^2} & ;x\in[3;+\infty[\\ -1-\frac{2}{(x-1)^2} & ;x\in]-\infty;1[\cup]1;3] \end{cases}$

- من أجل $]1;3[\cup]-\infty;1[$ $x\in$ واضح أن $f'(x)<0$. ($f'(x)$ مجموع عبارتين سالبتين)

- من أجل $]3;+\infty[$ $x\in$ ، لدينا :

$f'(x)=0$ معناه $1-\frac{2}{(x-1)^2}=0$ ، أي $(x-1)^2=2$ ومنه : $x=1-\sqrt{2}$ أو $x=1+\sqrt{2}$

القيمتان $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ مرفوضتان (لا تنتميان إلى المجال $]3;+\infty[$) وبما أن معامل x^2 في المعادلة $(x-1)^2=2$ موجب تماما ، نستنتج أن $f'(x)>0$ على المجال $]3;+\infty[$.

نستخلص مما سبق ، أن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1[$ ، $]1;3[$ ومتزايدة تماما على المجال $]3;+\infty[$. فيكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	-		‖	-	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	1 ‖	↗ $+\infty$

تنبيه : وضعنا خط مزدوج في السطر الثاني عند 3 لأن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

5) المستقيم $(\Delta): y=x-3$ عند $+\infty$

- من أجل $]3;+\infty[$ $x\in$ ، لدينا : $f(x)=x-3+\frac{2}{x-1}$ ، بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$ فإن المستقيم $(\Delta): y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

- من أجل $]-\infty;1[\cup]1;3]$ $x\in$ ، لدينا : $f(x)=-x+3+\frac{2}{x-1}$ ، بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1}=0$ فإن المستقيم $(\Delta'): y=-x+3$ هو مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

6) *وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

لدينا $f(x)-(x-3)=\frac{2}{x-1}>0$، لأن $x>3$ ومنه (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x>3$.

* وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ')

لدينا $f(x)-(-x+3)=\frac{2}{x-1}$، إن إشارة $\frac{2}{x-1}$ هي من إشارة المقام $x-1$ على $]-\infty;1[\cup]1;3]$ كما يبينه الجدول التالي :

x	$-\infty$		1		3
$x-1$		$-$	‖	$+$	

ومنه : (C) يقع تحت (Δ') على المجال $]-\infty;1[$ ، و (C) يقع فوق (Δ') على المجال $]1;3]$.

7) رسم (C)، (Δ) و (Δ') :

(Δ) :

x	3	0
y	0	-3

(Δ') :

x	0	3
y	3	0

- رسم (C) : لنعين نقاط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات

من جدول التغيرات نلاحظ أن المنحني (C) لا يقطع محور الفواصل على المجال $]1;+\infty[$ ويقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة على المجال $]-\infty;1[$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

من أجل $x<1$ ، لدينا : $f(x)=-x+3+\frac{2}{x-1}$

$f(x)=0$ يكافئ $-x+3+\frac{2}{x-1}=0$ يكافئ $\frac{x^2-4x+1}{x-1}=0$ ، ومنه

$x^2-4x+1=0$ ، هذه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

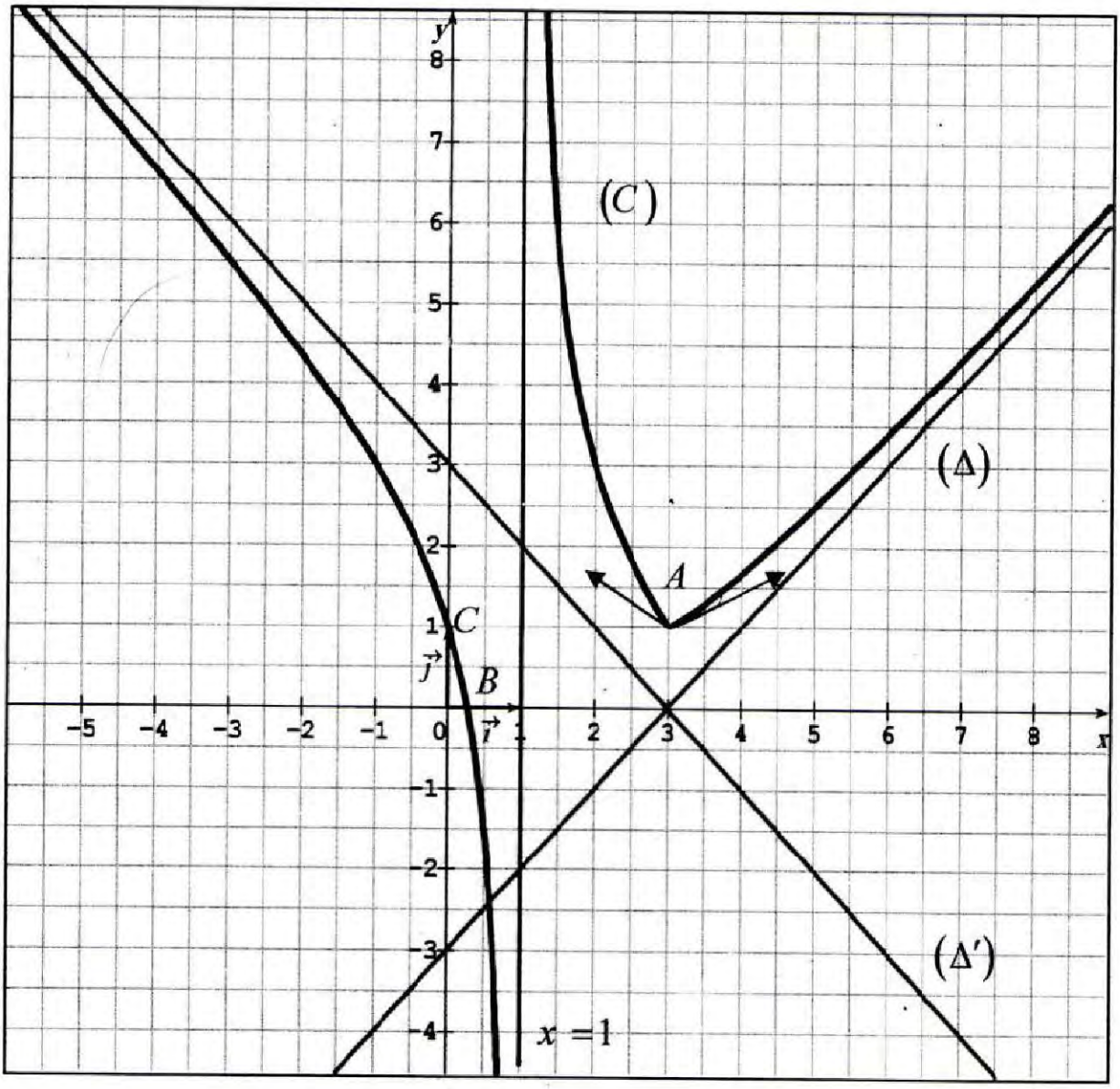
$x_1=2-\sqrt{3}\in]-\infty;1[$ و $x_2=2+\sqrt{3}\notin]-\infty;1[$ ، إذن الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $]-\infty;1[$ هو $2-\sqrt{3}$. إذن (C) يقطع محور الفواصل في النقطة $B(2-\sqrt{3};0)$

$f(0)=|0-3|+\frac{2}{0-1}=1$ ومنه (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $C(0;1)$

النقطة $A(3;1)$ هي نقطة زاوية في المنحني (C).

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن :

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 1}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 1}} f(x)=+\infty$



تمرين 40

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + \frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

و أن المستقيم (Δ') الذي معادلة له: $y = -x - \frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

ـ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

5) أرسم (C)، (Δ)، (Δ') و (d) في نفس المعلم السابق.

الحل

1) $D_f=\mathbb{R}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$،

وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

2) • لدينا: $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=0$، إذن: $(\Delta):y=x+\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

2) • ولدينا: $f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}} = \frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}$$

بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\frac{1}{2}\right)=+\infty$ فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}=0$

إذن: $(\Delta'): y=-x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

- وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا ،من أجل $x>0$:

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن $x>0$ فإن $\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}>0$، أي $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x>0$.

* وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ'):

لدينا ،من أجل $x<0$: $f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$

بإمكاننا تحديد إشارة العبارة: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$ دون اللجوء إلى مرافقها.

لدينا: من أجل $x < 0$: $x^2+x+1 > x^2+x+\frac{1}{4}$ أي $x^2+x+1 > \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$، ومنه: x^2+x+1

$\sqrt{x^2+x+1} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$ ، أي $\sqrt{x^2+x+1} > -\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ، لأن:

$\left|x+\frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & ;x \geq -\frac{1}{2} \\ -\left(x+\frac{1}{2}\right) & ;x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$ ، ومنه: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$.

ومنه: $f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$. وبالتالي (C) يقع فوق (Δ') من أجل $x < 0$.

3) الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $(2x+1)$ المبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x+1)$		-	0	+	

بالتالي: الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ ، ومتزايدة تماما على المجال

$\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	↗	$+\infty$

حيث: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$.

4) إثبات أن المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

تذكير:

f دالة مجموعة تعريفها D. و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

لإثبات أن المستقيم $(d): x=a$ هي محور تناظر لـ (C) يمكن اتباع إحدى الطرق التالية:

* لكل x من D يكون $2a-x$ من D و: $f(2a-x)=f(x)$.
* لكل x من D يكون $a-x$ و $a+x$ من D و: $f(a-x)=f(a+x)$.
* نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع: $\begin{cases} x=X+a \\ y=Y \end{cases}$.

تصبح $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X+a)$. هذه الأخيرة تعرف دالة g.

نبرهن أن g دالة زوجية.

نستعمل هنا الطريقة الأولى:

لكل x من D_f يكون $2(-2)-x$ من D_f و:

$$f\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right)=f(-1-x)=\sqrt{(-1-x)^2+(-1-x)+1}=\sqrt{(1+x)^2-x}=\sqrt{x^2+2x+1}=f(x)$$

إذن: المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

5) **الرسم:**

المستقيمات المقاربة:

* $(\Delta): y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.
* $(\Delta'): y=-x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

النقاط الحدية:

من جدول التغيرات النقطة $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، نقطة حدية في المنحنى (C).

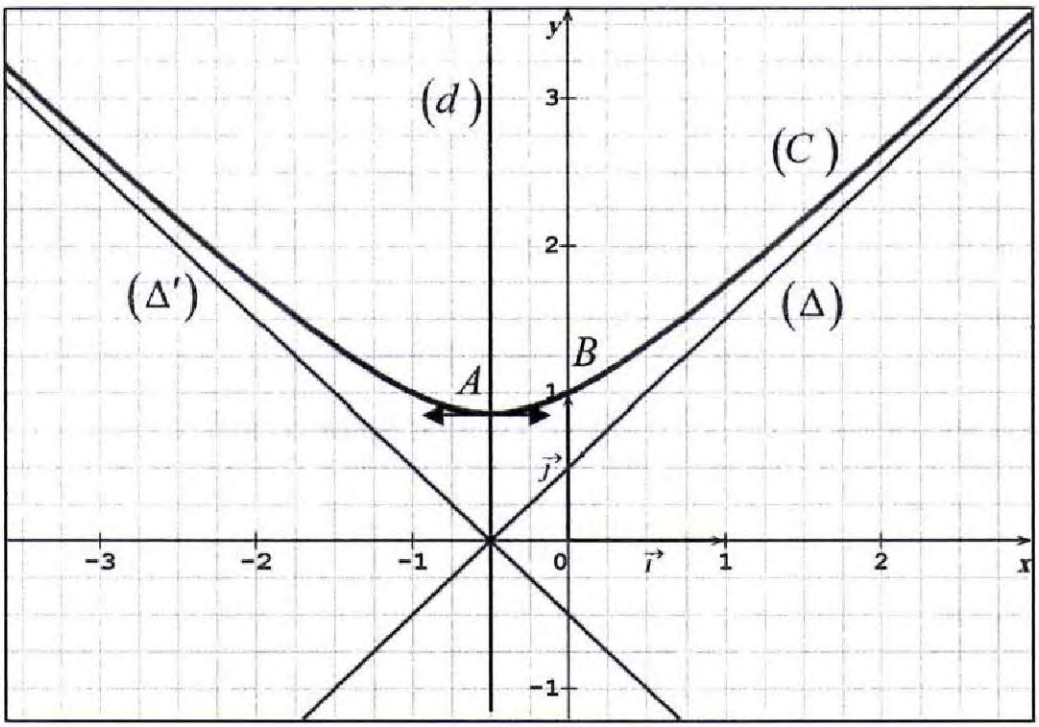
عناصر تناظر المنحنى (C):

المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

نقاط التقاطع مع محوري الإحداثيات:

• مع محور الفواصل: من جدول التغيرات نلاحظ ان المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلولا، وبالتالي (C) لا يقطع محور الفواصل.

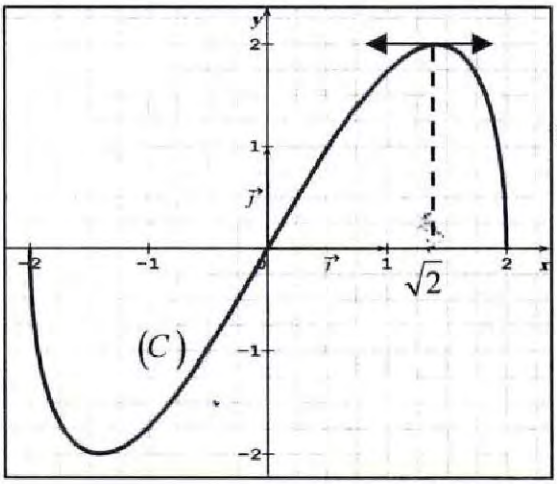
• مع محور التراتيب: لدينا $f(0)=1$ ، وبالتالي (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $B(0;1)$



تمرين 41

f الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

(C) التمثيل البياني للدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل)



1) بين أن f دالة فردية.

2) شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) المنحنى (Γ) صورة المنحنى (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

- أوجد معادلة (Γ) ثم أنشئ (Γ).

الحل

1) لدينا ، المجال $[-2;2]$ متناظر بالنسبة إلى 0 و:

$f(-x)=(-x)\sqrt{4-(-x)^2}=-x\sqrt{4-x^2}=-f(x)$.

2) جدول تغيرات الدالة f.

x	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+ | +	0	-
$f(x)$	0	$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	0

حيث : $f(-2)=f(2)=0$ ، $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ ، $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

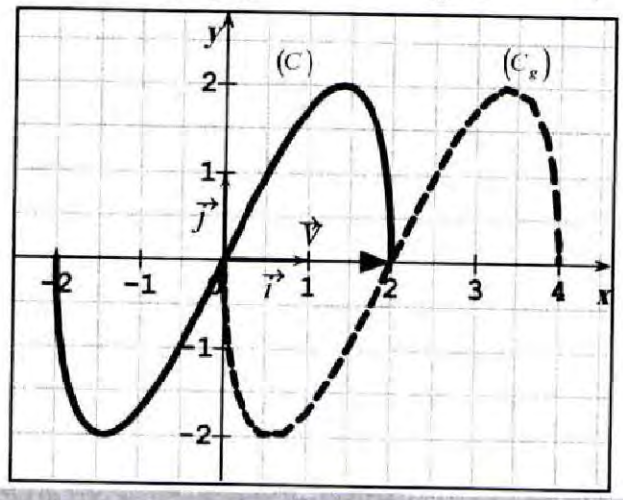
3) لتكن $M(x;y)$ نقطة كيفية من (C) ولتكن $N(X;Y)$ نقطة كيفية من (Γ) . N صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ معناه :

أي : $\begin{cases}X=x+2\\Y=y+0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=X-2\\y=Y\end{cases}$.

ومنه : $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X-2)$ أي : $Y=(X-2)\sqrt{4-(X-2)^2}$

أي : $Y=(X-2)\sqrt{-X^2+4X}$ وهي معادلة المنحنى (Γ) .

إنشاء المنحنى (Γ) :



تمرين 42

لتكن الدالة f المعرفة على المجال : $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ : $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$.

1) بين أنه بوضع $X=\cos x$ يكون : $f'(x)=\frac{P(X)}{X^2}$ ، حيث $P(X)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة يطلب تعيينه .

2) عين إشارة $P(X)$ على المجال $[0;1]$.

3) استنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) استنتج متراجحة Huygens التالية :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $2\sin x+\tan x\geq 3x$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ولدينا :

$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3$ ، وبوضع $X=\cos x$ نجد هكذا:

$f'(x)=2X+\frac{1}{X^2}-3=\frac{2X^3-3X^2+1}{X^2}=\frac{P(X)}{X^2}$ ، حيث :

$P(X)=2X^3-3X^2+1$

2) لتعيين إشارة $P(X)$ على المجال $[0;1]$ يمكن اتباع إحدى الطريقتين :

طريقة 1 : نحلل $P(X)$ إلى جداء كثيري حدود أحدهما من الدرجة الثانية و الآخر من الدرجة الأولى و ذلك بملاحظة أن العدد 1 جذر لـ $P(X)$ ، إذ أن : $P(1)=2-3+1=0$

طريقة 2 : ندرس اتجاه تغير الدالة P على المجال $[0;1]$.

نتبع مثلا الطريقة الثانية ، الدالة P تقبل الاشتقاق على المجال $[0;1]$ ولدينا :

$P'(X)=6X^2-6X=6X(X-1)$ ، إشارة $P'(X)$ هي كما يلي :

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6X(X-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن الدالة P متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ ، فيكون جدول تغيراتها كما يلي :

X	0		1
$P'(X)$		$-$	
$P(X)$	1	$\searrow$	0

حيث : $P(0)=1$ و $P(1)=0$.

نلاحظ أنه من أجل كل X من المجال $[0;1]$: $P(X)\geq 0$

3) استنتاج جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

لدينا: $f'(x)=\frac{P(X)}{X^2}$، وبما أن $P(X)\geq 0$ فإن $P(\cos x)\geq 0$ وبالتالي $f'(x)\geq 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

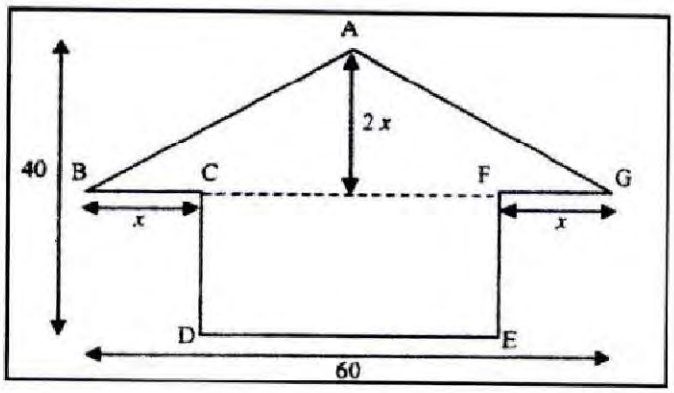
4) استنتاج متراجحة Huygens التالية :

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $f(x)\geq 0$ أي $2\sin x+\tan x-3x\geq 0$ إذن :

$2\sin x+\tan x\geq 3x$.

تمرين 43

تريد إحدى المؤسسات صنع "رمز" لها له الشكل و الأبعاد أدناه. وحدة الأطوال هي السنتيمتر cm.
و قصد التقليص من التكاليف، نبحث عن قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أدناه أصغر ما يمكن.



1) أحسب $S(x)$ مساحة الشكل.

2) عين قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغر ما يمكن. ثم حدد هذه المساحة.

الحل

1) لدينا : $S(x)=S_1(x)+S_2(x)$، حيث $S_1(x)$ هي مساحة المستطيل $CDEF$
و $S_2(x)$ هي مساحة المثلث ABG. لدينا :

$S_1(x)=(60-2x)(40-2x)$ و $S_2(x)=\frac{60\times 2x}{2}$. ومنه :

$S(x)=4x^2-140x+2400$. مع ملاحظة أن : $x\in[0;20]$.

2) الدالة S تقبل الاشتقاق على المجال $[0;20]$ ولدينا : $S'(x)=8x-140$.

إشارة $S'(x)$ موضحة في الجدول التالي :

x	0	$\frac{35}{2}$	20
$S'(x)$	-	0	+

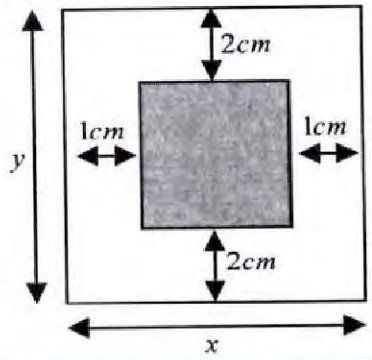
وعليه يكون جدول تغيرات الدالة S كما يلي :

x	0	$\frac{35}{2}$	20
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	↘	$S\left(\frac{35}{2}\right)$	↗

إذن قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغر ما يمكن هي $\frac{35}{2}=17,5cm$

وقيمة هذه المساحة هي $S\left(\frac{35}{2}\right)=1175cm^2$.

تمرين 44



الشكل المقابل هو لورقة مستطيلة الشكل مساحتها $529cm^2$ وبعداها x و y بالسنتمترات ، الهوامش هي كما تظهر في الشكل . أراد ناشر ان يطبع نصا على هذه الورقة .

- عين بعدي الورقة التي من اجلها تكون مساحة الجزء المخصص للنص (الملون) أكبر ما يمكن .

الحل

بعدا المستطيل الذي يوافق الجزء المخصص للنص هما:

$x-2$ و $y-4$ حيث: $x>2$ و $y>4$.

لتكن $S(x)$ مساحة المستطيل الذي يوافق الجزء المخصص للنص ، لدينا:

$S(x)=(x-2)(y-4)$ ، وعما أن مساحة الورقة هي $529cm^2$ فإن $xy=529$

ومنه $y=\frac{529}{x}$. بالتالي: $S(x)=(x-2)\left(\frac{529}{x}-4\right)$. أي : $S(x)=-4x-\frac{1058}{x}+537$

الدالة S تقبل الاشتقاق على $]2;+\infty[$ ولدينا: $S'(x)=-4+\frac{1058}{x^2}=\frac{-4x^2+1058}{x^2}$

إشارة $S'(x)$ هي من إشارة $-4x^2+1058$ على $]2;+\infty[$ الموضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	$-\frac{23\sqrt{2}}{2}$	2	$\frac{23\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$-4x^2+1058$		- 0 +		+ 0 -	

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة S كما يلي :

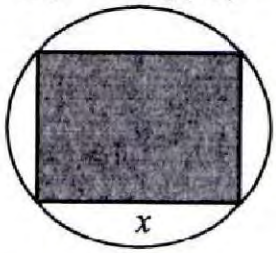
x	2	$\frac{23\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$S\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)$	

تكون $S(x)$ أكبر ما يمكن من أجل $x=\frac{23\sqrt{2}}{2}$ و $y=\frac{529}{\frac{23\sqrt{2}}{2}}=23\sqrt{2}$.

و تكون : $S\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)=-4\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1058}{\frac{23\sqrt{2}}{2}}+537=537-92\sqrt{2}$ ، بتدوير النتائج السابقة إلى 10^{-1} نجد: $x=16,3cm$ ، $y=32,5$ ، $S\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)=406,9cm^2$

تمرين 45

بستان دائري الشكل ،نصف قطره $20m$ ، يريد صاحبه تخصيص أكبر جزء مستطيل منه لزراعة مختلف الورود . (أنظر الشكل المقابل)



1) أحسب بدلالة x بعدي هذا الجزء .

2) ما هي أكبر مساحة مخصصة لهذا الجزء ؟ عين عندئذ بعدا المستطيل.

الحل

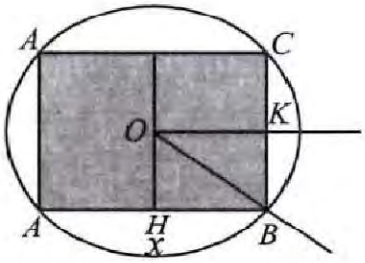
1) نسمي O مركز الدائرة ، و $ABCD$ الجزء المستطيل .

لتكن H المسقط العمودي لـ O على (AB) ، ولتكن K المسقط العمودي لـ O على (BC). بما أن الرباعي مستطيل فإن H و K منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب .

لدينا x طول المستطيل $ABCD$ ، ليكن y عرضه.

واضح أن $0 < x < 20$.

- تعيين y بدلالة x :



لدينا: $AB = x$ و $BC = y$ ومنه : $HB = \frac{x}{2}$ و $OH = \frac{y}{2}$.

بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث OHB القائم في H نجد:

$OB^2 = OH^2 + HB^2$ ، ومنه : $20^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$ ، ومنه: $y^2 + x^2 = 1600$

ومنه: $y = \sqrt{1600 - x^2}$ أو $y = -\sqrt{1600 - x^2}$ ، لكن $y > 0$. إذن: $y = \sqrt{1600 - x^2}$.

إذن بعدا المستطيل $ABCD$ هما x و $\sqrt{1600 - x^2}$.

2) نسمي $S(x)$ مساحة المستطيل $ABCD$ ، لدينا : $S(x) = xy = x\sqrt{1600 - x^2}$.

إذن في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الدالة S معرفة على المجال $]0;20[$ بـ: $S(x) = x\sqrt{1600 - x^2}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الدالة S قابلة للاشتقاق على المجال $]0;20[$ ولدينا :

$S'(x) = 1 \times \sqrt{1600 - x^2} + x \times \frac{-2x}{\sqrt{1600 - x^2}} = \frac{-2x^2 + 1600}{\sqrt{1600 - x^2}}$.

إشارة $S'(x)$ هي نفسها إشارة البسط $-2x^2 + 1600$ على المجال $]0;20[$.

الموضحة في الجدول التالي:

x	$-20\sqrt{2}$		0		$20\sqrt{2}$		20
$-2x^2 + 1600$	-	0	+		0	-	

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة S كما يلي :

x	0		$20\sqrt{2}$		20
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		↗	$S\left(20\sqrt{2}\right)$	↘	

إذن أكبر مساحة للجزء المخصص لزراعة الورود هي:

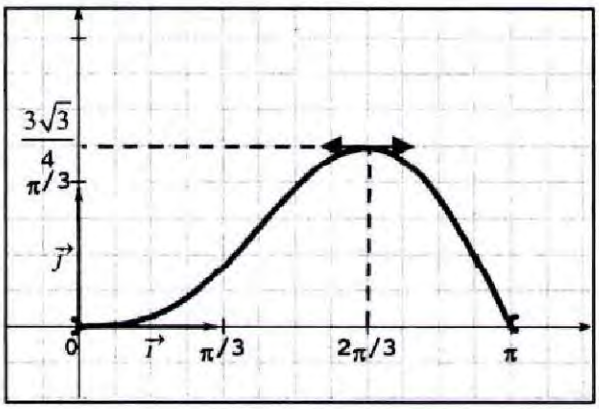
$S\left(20\sqrt{2}\right) = 20\sqrt{2}\sqrt{1600 - \left(20\sqrt{2}\right)^2} = 800m^2$ ، $S\left(20\sqrt{2}\right) = 800m^2$

ويكون بعدا المستطيل $x = 20\sqrt{2}m$ و $y = \sqrt{1600 - \left(20\sqrt{2}\right)^2} = 20\sqrt{2}m$.

نلاحظ أن $x = y$ ، إذن تكون مساحة الجزء المخصص لزراعة الورود أكبر ما يمكن عندما

يكون المستطيل $ABCD$ مربعا طول ضلعه $20\sqrt{2}m$.

تمرين 46



الجزء الأول :

التمثيل البياني المقابل هو لدالة f معرفة على المجال $]0;\pi[$ بـ : $f(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) عين قيمة كل من a و b .

الجزء الثاني :

أراد شخص بناء خزان ماء على شكل موشور قاعدته شبه منحرف $ABCD$ حيث $AB = BC = CD = 1$ ، وارتفاعه ثابت يساوي 3 (الوحدة المتر).

1) عين قيسا θ للزاوية $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ الذي من أجله يكون حجم الخزان أكبر ما يمكن .

($0 < \theta < \pi$) . أحسب هذا الحجم عندئذ.

الحل

الجزء الأول :

1) جدول تغيرات الدالة f :

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

2) تعيين قيمة كل من a و b :

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

لدينا: $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ و $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

• $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ تكافئ $a\sin\frac{2\pi}{3} + b\sin 2\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ، أي :

$a\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + b\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ أي : $a\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - b\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

لأن $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. ومنه المعادلة :

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}-b\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$ ، أي : $a-b=\frac{3}{2}$.

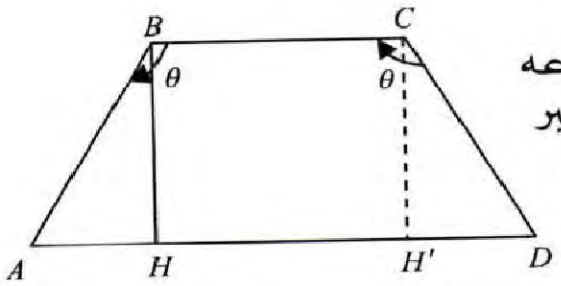
• $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$ تكافئ $a\cos\frac{2\pi}{3}+2b\cos 2\frac{2\pi}{3}=0$ ، لأن :

$f'(\theta)=a\cos\theta+2b\cos 2\theta$ ، ومنه : $a\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+2b\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=0$

أي : $a\left(-\frac{1}{2}\right)+2b\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، أي : $a+2b=0$ بحل الجملة : $\begin{cases}a-b=\frac{3}{2}\\a+2b=0\end{cases}$ ، نجد أن :

$a=1$ و $b=-\frac{1}{2}$. إذن : $f(\theta)=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$

الجزء الثاني :



نعلم أن حجم موشور يساوي جداء مساحة قاعدته و ارتفاعه وبما أن ارتفاع هذا الموشور ثابت ، فإن حجمه يكون أكبر ما يمكن إذا كانت مساحة قاعدته أكبر ما يمكن .

نسمي $S(\theta)$ مساحة القاعدة ، لدينا :

$$S(\theta)=\frac{(AD+BC)BH}{2}=\frac{(2BC+2AH)BH}{2}=(BC+AH)BH$$.

حيث : $BC=1$ ، $BH=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$ ، $AH=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$.

ومنه : $S(\theta)=(1-\cos\theta)\sin\theta$.

بما أن : $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ، يمكننا كتابة :

$$S(\theta)=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

إذن : $S(\theta)=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

نلاحظ أن الدالة S هي نفسها الدالة f .

إذن من جدول التغيرات المحصل عليه في الجزء الأول نجد أن قيمة θ التي يكون من أجلها حجم الخزان أكبر ما يمكن هي $\frac{2\pi}{3}$ ، ويكون حجم الخزان عندئذ هو $\frac{3\sqrt{3}}{4}m^3$.

تم تحميل الكتاب من موقع الدراسة الجزائري

www.eddirasa.com

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

أقدم لكم هذا العمل عسى ان يكون سندا لكم في مسيرتكم الدراسية

كل ما أتمناه وعوة منكم بالنجاح و المغفرة

لي و لوالدي و عائلتي

سلامي إليكم و وفقكم الله لما يحب و يرضاه

من رفع صافي الروح (محمد)