1)أنواع المعادلات المطلوب حلها في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

مثال1) $(1+i)z+2=3-i$ يعني: $(1+i)z=1-i$ إذن: $z=\frac{1-i}{1+i}$ ومنه: $z=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-i$

مثال2): $2z-i\bar{z}+3=0$ نضع : $z=x+iy$ ومنه:

$2(x+iy)-i(x-iy)+3=0$ بعد النشر والتبسيط:

$2x+y+3+i(2y+x-1)=0$ ومنه: $\begin{cases}2x-y+3=0\\2y-x=0\end{cases}$ بحلها نجد: $x=-2$ و $y=-1$

إذن: $z=-2-i$

مثال3): $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ نحسب: $\Delta=3-4=-1$ إذن: $\sqrt{\Delta}=i$ ومنه حلي المعادلة هما:

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ أو $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

مثال4): نعتبر كثير الحدود: $P(z)=z^3+2z^2-16$ أحسب $P(2)$ ثم عين الأعداد الحقيقية a,b و c :

$P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$. نجد $P(2)=0$ والأعداد نجدها بالقسمة الإقليدية أو النشر والمطابقة.

ومنه: $P(z)=0$ يعني: $z=2$ أو $z^2+4z+8=0$ ومنه: $\Delta=-16$: إذن $\sqrt{\Delta}=4i$ ومنه حلي المعادلة هما:

$z=-2+2i$ أو $z=-2-2i$ ومنه: $S=\{2,-2+2i,-2-2i\}$

مثال6): $z^2-3-4i=0$ تعني: $z^2=3+4i$ إن حلي هذه المعادلة يعني ايجاد الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$

ومنه: $\begin{cases}x^2-y^2=3\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\x^2+y^2=\sqrt{3^2+4^2}=5\ldots\ldots(2)\\2x.y=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$ بحل الجملة نجد

$S=\{2+i,2-i$

مثال7) : $z^4-6z^2+25=0$ لحل هذه المعادلة : $z^2=l$ ومنه: $l^2-6l+25=0$ إذن: $\Delta=-64$:

إذن $\sqrt{\Delta}=8i$ ومنه: $l=3-4i$ أو $l=3+4i$

ومنه: $z^2=3+4i$ أو $z^2=3-4i$ إن حلول المعادلة يعني ايجاد الجذرين التربيعيين لكل من $3+4i$ و $3-4i$

ارجع للمثال6) نجد الجواب: $S=\{2+i,2-i,-2+i,-2-i\}$

مثال8) عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث يكون: $\begin{cases}z_1+iz_2=2+i(\sqrt{3}+1)\\z_1-iz_2=i(\sqrt{3}-1)\end{cases}$

بالجمع نجد: $z_1=1+i\sqrt{3}$ بالتعويض في أحد المعادلتين نجد: $z_2=1-i$

مثال9) $\frac{z}{z-2}=z+1$ يعني $(z+1)(z-2)=z$ ومنه $z^2-2z-2=0$ ومنه $\Delta=12$ ومنه $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$ ينتج للمعادلة حلين حقيقيين $z=1+\sqrt{3}$ و $z=1-\sqrt{3}$

2)الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم:

يمكن إن نصنف مجموعة الأعداد المركبة إلى 3 أنواع:

أ)الأعداد الحقيقية: $z=x$ نمثله بالنقطة $M(x,0)$ ومنه طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد x والعدد 0 عمدة للعدد z إذاكان x موجب تماما والعدد π إذاكان x سالب تماما

ب)الأعداد التخيلية الصرفة: $z=i\,y$ نمثله بالنقطة $M(0,y)$ ومنه طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد y

والعدد $\frac{\pi}{2}$ عمدة للعدد z إذاكان y موجب تماما والعدد $\frac{-\pi}{2}$ إذاكان y سالب تماما

ج)الأعداد: $z = x + iy$ فإن:$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ولتعيين عمدة للعددz نعتمد على: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$حيث:$|z| = r$

تذكر أن:$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

أمثلة : أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي:

$z_1 = 2$، $z_2 = i$، $z_3 = 1 + i$، $z_4 = -1 + \sqrt{3}i$ ، $z_5 = 1 - \sqrt{3}$،

$z_6 = -\sqrt{3} - i$ ، $z_7 = 2 - 2i$ و$z_8 = -2i$

الجواب ا:$z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$ ، $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$، $z_2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z_4 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، $z_5 = (\sqrt{3} - 1)(\cos\pi + i\sin\pi)$ ، $z_6 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_7 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$ و $z_8 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

3)**<u>الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم:</u>**

مثال1) انظر إلى $z_4 = -1 + \sqrt{3}i$ فإن: $z_4 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

مثال2) نعتبر العدد المركب:$z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ أكتبه على الشكل الجبري. $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ ومنه:

$z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ ومنه $z= -\sqrt{3} - i$ يمكن استعمال الآلة الحاسبة تذكرأن:$\frac{\sqrt{2}}{2}$=0,7 و $\frac{\sqrt{3}}{2}$=0,86

خواص مهمة:إذا كان: $z = re^{i\theta}$ و$z' = r'e^{i\theta'}$ فإن:

- $z = re^{i(\pi+\theta)}$ ، $\overline{z} = re^{-i\theta}$، $z.z' = r.r'.e^{i(\theta+\theta')}$، $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$، $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$z^n = r^n.e^{in\theta}$ من أجل كل عدد صحيح n (دستور موافر)

تطبيق1): $z = 1 + i$ أحسب $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$. لدينا $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2011} = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2011} = (\cos\left(2011\frac{\pi}{4}\right) + :\left(2011\frac{\pi}{4}\right)$

isinومنه $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2011} = : -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

تطبيق2)نعتبر العدد المركب:$z = 1 + i$ عين قيم الصحيحةn في كل حالة:أ)z^n حقيقيا. ب))z^n تخيليا صرفا.

لدينا: $z^n = \sqrt{2}^n(\cos n\frac{\pi}{4} + i\sin n\frac{\pi}{4})$

أ) z^n حقيقيا يعني: $\sin n\frac{\pi}{4} = 0$ إذن: $n\frac{\pi}{4} = k\pi$ ومنه : $n = 4k$ حيث k عدد صحيح.

ب) z^n تخيليا صرفا يعني:$\cos n\frac{\pi}{4} = 0$ إذن: $n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه: $n = 2 + 4k$ حيث k عدد صحيح.

تطبيق3):z عدد مكتوب على الشكل الجبري: $z = (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)$

و z عدد مكتوب على الشكل المثلثي: $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ استنتج القيم المضبوطة لكل من :

$\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$: لدينا $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$ ، $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$

3)**<u>المرجح والأعداد المركبة:</u>**

لتكن النقطة G مرجحا للجملة:$\{(A,\propto),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ بحيث:$a + b + c \neq 0$ فإن لاحقة النقطةG هيz_G حيث:

$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

حالات خاصة: أ)مركز ثقل مثلثABC: $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$ ب)منتصف قطعة[AB]: $z_G = \frac{z_A+z_B}{2}$

<u>4)تفاسير هندسية مهمة:</u>

أ) لتكن M صورة للعدد المركب z فإن : $OM = |z|$ وبصفة عامة إذا كان A و B فإن: $AB = |z_B - z_A|$

لكن العدد : $z_B - z_A$ هو لاحقة الشعاع: $\overrightarrow{AB}$

ب)طويلة النسبة: $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A}$ تعني: $\left|\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$ حيث A تختلف عن C

ج) $Arg(z) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ و $Arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \overrightarrow{AB})$ حيثA تختلف عنB

د) عمدة للنسبة: $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A}$ تعني: $Arg\left(:\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ حيثA تختلف عنB وC

5) النسبة وطبيعة المثلثABC إن وجد: حيثA تختلف عن B وC

اعتمادا على كتابة النسبة على الشكل الجبري استنتج طبيعة المثلثABC إن وجد في كل حالة:

أ) $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A} = -i$ ينتج المثلثABC قائم ومتساوي الساقين فيA لأن: $AB = AC$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$

ب) $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A} = 2i$ ينتج المثلثABC قائم فيA لأن: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

ج) $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ينتج المثلثABC متساوي الساقين في A لأن: $AB = AC$

د) $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ينتج أن المثلثABC متقايس الأضلاع لأن: $AB = AC$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$

ملاحظة : في كل حالة من الحالات السابقة عين طويلة وعمدة للعدد الجبري للنسبة واستعمل التفاسير ب ود من 4

هـ) $\frac{z_B - z_A}{z_c - z_A} = k$ حيثk عدد حقيقي غير معدوم ينتج: $z_B - z_A = k(z_c - z_A)$ ومنه: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$:ومنه: النقط الثلاث على استقامية.

5)**<u>التحويلات النقطية والأعداد المركبة</u>**:

أ) تحديد طبيعة تحويل وعناصره المميزة: f تحويل يرفق بكل نقطة M ذات للاحقة z النقطة M' لاحقتها z' في كل حالة

* $z' = z + 1 - 2i$ هذا التحويل انسحاب لاحقة شعاعه $1 - 2i$ (معاملz يساوي1)

* $z' = -2z + 3 + i$ هذا التحويل تحاكي نسبته-2 لاحقة مركزه $\frac{3+i}{1-(-2)} = 1 + \frac{1}{3}i$ (معامل z حقيقي غير معدوم يختلف عن1)

* $z' = iz + 1 + i$ هذا التحويل دوران زاويته $Arg(i) = \frac{\pi}{2}$ لاحقة مركزه $\frac{1+i}{1-(i)} = i$ (معاملz مركب غير حقيقي طويلته 1)

*$z' = (1 + i)z - i$ هذا التحويل تشابه مباشر نسبه $|1 + i| = \sqrt{2}$ زاويته $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ لاحقة مركزه $\frac{-i}{1-(1+i)} = 1$ (معاملz مركب غير حقيقي طويلته تختلف عن 1)

ملاحظة: التحاكي الذي نسبته -1 ومركزه ω هو تناظر مركزي مركزهوعبارته المركبة: $z' = -iz + 2z_\omega$

ب)*العبارة المركبة لتشابه مباشر نسبتهk وزاويته θ مركزه ω : $z' - z_\omega = k.e^{i\theta}(z - z_\omega)$

*العبارة المركبة دوران زاويتهθ و مركزهω : $z' - z_\omega = e^{i\theta}(z - z_\omega)$

*العبارة المركبة تحاكي نسبتهk و مركزهω : $z' - z_\omega = k(z - z_\omega)$

مثال:

عين لاحقة النقطة C صورة A بالدوران الذي زاويته θ و مركزه ω يعني $z_c - z_\omega = e^{i\theta}(z_A - z_\omega)$

ومنه نجد: $z_c = e^{i\theta}(z_A - z_\omega) + z_\omega$

ج)ايجاد العبارة المركبة لتحويل نقطي يحول A إلى B ويحول C إلىD

تطبيق : بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول(3,1) A إلى B(4,2) ويحول C(0,2) إلىD(0,0)

نعتمد على العبارة: $z' = az + b$ ومنه: $\begin{cases} z_B = aZ_A + b \\ z_D = aZ_C + b \end{cases}$ بالطرح نجد: $a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$ ومنه: $a = 1 + i$

بالتعويض عنa نجد $b = 2 - 2i$ ومنه $z' = (1 + i)z + 2 - 2i$ لتحديد عناصره المميزة ارجع لـ 5) أ)

ملاحظة:بنفس الطريقة إذا كان التحويل دورانا أو تحاكيا.أو إذا كان التحويل معرفا بمركزهω ويحول A إلى B لأن المركزω يحول إلى ω هو النقطة الصامدة.

د)استنتاج وجود تحويلا من خلال النسبة $\frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}$

أكتب العدد الناتج على الشكل الأسي ثم أحسب جداء الطريفين في الوسطين وارجع لـ 5)ب) تجد طبيعة التحويل

مثال: $\frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه: $z_B-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_c-z_A)$ نستنتج وجود دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول النقطةC إلى النقطة B

ملاحظة في حالة النسبة عدد حقيقي Kغير معدوم يخلف عن 1مباشرة نحسب جداء الطريفين في الوسطين والتحويل هو تحاكيا.

6)**<u>بعض مجموعات نقط في المستوى باستعمال الأعدادد المركبة:</u>**

مثال1):مجموعة النقط M صور العددz: $1=\left|\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right|$ يعني: $1=\frac{AM}{BM}$ ومنه: $AM=BM$ مجموعة النقط هي محور القطعة $[AB]$

مثال2) مجموعة النقط M صور العدد z: $3=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$ يعني $3=\|-\overrightarrow{MG}\|$ ارجع لخواص المرجح حيث G مرجحا للجملة: $\{(A,2),(B,-1),(C,-2)\}$ ومنه: $MG=3$ مجموعة النقط هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 3

مثال3) مجموعة النقط M صور العددz: $z-z_A=2e^{i\theta}$ عندما θ تمسح كل الأعداد الحقيقة. يعني أن:

$AM=2$ و $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها ونصف قطرها 2

مثال4)) مجموعة النقطMصور العددz : $z-z_A=ke^{\frac{\pi}{2}i}$ عندما k تمسح كل الأعداد الحقيقة الموجبة يعني أن:

$AM=k$ و $\frac{\pi}{2}=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ومنه مجموعة النقط هي نصف مستقيم مبدؤه النقطةA و $\frac{\pi}{2}=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$

مثال5) مجموعة النقطMصور العددz : حتى يكون العدد: $\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}$ حقيقيا موجبا تماما حيث M تختلف عن A وB

يعني: $0=\text{Arg}\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right)$ يعني: $0=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})$ ومنه مجموعة النقط هيكل نقط المستقيم (AB) باستثناء القطعة المغلقة $[AB]$

بنفس الطريقة استنتج مجموعة النقط M صور العددz : حتى يكون العدد: $\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}$ حقيقيا سالبا تماماأو تخيلي صرف

7)أسئلة ملحقة في تمارين الأعداد المركبة:

أ)تحديد طبيعة مثلث:إذا لم تكن أسئلة موجهة الأولى حساب أطواله الثلاث ارجع لـ4)أ) ثم حدد الطبيعة(تذكر مبرهنة فيتاغورث)

ب)بين أن النقط A و B من نفس الدائرة ذات المركز ω يكفي أن نبين أن: $\omega A=\omega B$ والذي يمثل نصف القطر.

ج)الدائرة المحيطة بالمثلث القائم ABC في Aمركزهاω منتصف الوترلاحقته: $z_\omega=\frac{z_B+z_C}{2}$ ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$

د)**<u>طبيعة الرباعي ABCD</u>**

*متوازي أضلاع يكفي أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أو أن القطران متناصفان.

*المعين هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متقايسان أو القطران متناصفان ومتعامدان.

*المستطيل هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة أو القطران متناصفان و متقايسان

*المربع هو معين به زاوية قائمة أو القطران متناصفان ومتعامدان ومتقايسان.

*شبه المنحرف هو رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان والآخرين غير متوازيان وهو على أنواع القائم والمتساوي الساقين.