



Suites numériques

-I تمهيد :

اشترى عصام سيارة بـ 40.000 درهم وبعد مرور سنة أصبح ثمنها هو $\frac{3}{4}$ ثمن الشراء ، وبعد مرور سنة أخرى أصبح ثمنها هو $\frac{3}{4}$ من ثمنها السنة الأولى وهكذا يكون ثمن السيارة في سنة معينة هو $\frac{3}{4}$ من ثمنها في السنة السابقة.

- 1- حدد ثمن السيارة بعد مرور ثلاث سنوات.
- 2- حدد ثمن السيارة بعد مرور أربع سنوات.
- 3- حدد ثمن السيارة بعد مرور n سنة بدلالة n .
- 4- في أية سنة يصبح ثمن السيارة أقل من 15.000 درهم؟

الجواب : -2-1

$$P_1 = \frac{3}{4} P_0 = \frac{3}{4} \cdot 40.000$$

$$= 30.000$$

$$P_2 = \frac{3}{4} P_1 = \frac{3}{4} \cdot 30.000$$

$$= \frac{90.000}{4} = 22.500$$

$$P_3 = \frac{3}{4} P_2 = \frac{3}{4} \cdot 22.500$$

$$= 16.875$$

$$P_4 = \frac{3}{4} P_3 = \frac{3}{4} \cdot 16.875$$

$$= 12.656,25$$

-3

$$X \left\{ \begin{array}{l} P_1 = \frac{3}{4} P_0 \\ P_2 = \frac{3}{4} P_1 \\ P_3 = \frac{3}{4} P_2 \\ P_4 = \frac{3}{4} P_3 \\ \vdots \\ P_n = \frac{3}{4} P_{n-1} \end{array} \right.$$



إذن :

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \dots P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \dots P_{n-1}$$

$$P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot P_0 \quad \text{إذن :}$$

4- نحل في \mathbb{N} المتراجحة :

$$P_n \leq 15.000$$

$$P_n \leq 15.000 \Leftrightarrow P_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 15.000$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{15.000}{40.000}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{3}{8}$$

من أجل $4 \leq n$ ثمن السيارة يصبح أقل من 15.000 .

خلاصة :

الأعداد $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ تكون متتالية عددية.

-II تعاريف ومصطلحات :

1- تعريف :

ليكن I جزءا من \mathbb{N} ($I \in \mathbb{N}$).

كل تطبيق من I نحو \mathbb{R} :

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u(n)$$

يسمى **متتالية عددية** .

نكتب u_n عوض $u(n)$.

ونرمز لهاته المتتالية بـ : $(u_n)_{n \in I}$

عادة تكون $I = \mathbb{N}$ أو $I = \mathbb{N}^*$

العدد u_n يسمى **الحد العام للمتتالية** $(u_n)_{n \in I}$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \geq 0} = (u_n)$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (u_n)_{n \geq 1} = (u_n)_{n > 0}$$

u_n هو **الحد ذا المدل n** .

أمثلة :

حد الحدود الأولى للمتتالية المعرفة بما يلي :

$$I = \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1 \quad -1$$

$$u_0 = -1$$



$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 3$$

$$u_2 = \sqrt{2} \quad ; \quad u_3 = \sqrt[3]{2} \quad ; \quad u_4 = \sqrt[4]{2} \quad -2$$

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad u_2 = \text{Arc tan } 2 \quad -3$$

-2 تساوي متتاليتين :

نعتبر المتتاليتين :

$$(v_n)_{n \in J} \quad ; \quad (u_n)_{n \in I}$$

$$(u_n)_{n \in I} = (v_n)_{n \in J} \Leftrightarrow \begin{cases} I = J \\ \forall n \in I ; u_n = v_n \end{cases}$$

مثال :

$$u_n = (-1)^n \quad v_n = \cos n \pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad (-1)^n = \cos n \pi \quad \text{لدينا :}$$

$$(u_n) = (v_n) \quad \text{إذن :}$$

-III تحديد متتالية :

1- المتتالية المعرفة بصيغة صريحة لحددها العام :

لتكن f دالة عددية $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = f(n) \quad \text{إذا كان :}$$

المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ هي متتالية معرفة بصيغة صريحة لحددها العام.

2- المتتالية الترجعية :

المتتالية الترجعية هي كل متتالية يكون كل حد من حدودها معرفا بواسطة الحد (أو الحدود) السابقة.

مثال :

$$u_0 = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$$

أحسب u_3 .

$$u_1 = \frac{1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$$



$$u_2 = \frac{1}{u_1 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{u_2 + 1} = \frac{4}{7}$$

Suite bornée

المتتالية المحدودة -IV

1- المتتالية المكبورة Suite majorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ **مكبورة** ، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M حيث :

$$\forall n \in I \quad u_n \leq M$$

أمثلة :

$$n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n} \quad \bullet$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \leq 1$$

$$n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \text{Arc tan } n \quad \bullet$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \text{Arc tan } n < \frac{\pi}{2}$$

2- المتتالية المصغورة Suite minorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ **مصغورة** ، إذا وفقط إذا وجد m حيث :

$$\forall n \in I \quad m \leq u_n$$

أمثلة :

$$n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n} \quad \bullet$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 \leq u_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \text{Arc tan } n \quad \bullet$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n$$

3- المتتالية المحدودة

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ **محدودة** ، إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة.

مثال :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$



$$\forall n \in \mathbb{N} ; n^2 - 1 \leq n^2 + 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1 \quad \text{أي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \quad \text{بين أن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -n^2 \leq n^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -n^2 - 1 \leq n^2 - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; -1 \leq u_n \leq 1 \quad \text{ومنه :}$$

إذن : (u_n) متتالية محدودة.

Suite monotone المتتالية الرتيبة -V

تعريف :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

• نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **تزايدية قطعا** إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} \succeq u_n$$

• نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **تناقصية قطعا** إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} \preceq u_n$$

• نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **رتيبة** إذا وفقط إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

حالات خاصة :

(a) لنكن f دالة عددية حيز تعريفها D و $(I \in D)$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ المعرفة بـ : $\forall n \in I ; u_n = f(n)$

$$\forall n \in I ; u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) \quad \text{لدينا :}$$

إذا كانت f تزايدية **قطعا** فإن $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية **قطعا**.

إذا كانت f تناقصية **قطعا** فإن $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية **قطعا**.

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$$

أدرس رتبة المتتالية (u_n) .

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f'(x) = \frac{4x(x^2 + 5) - 2x(2x^2 + 1)}{(x^2 + 5)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{18x}{(x^2 + 5)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad , \quad f'(x) > 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ .

وبالتالي : المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + \sin n \quad \text{(b)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - [2n + \sin n] \quad \text{لدينا :}$$

$$= \cancel{2n} + 2 + \sin(n+1) - \cancel{2n} - \sin n$$

$$= \sin(n+1) - \sin n + 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -1 \leq \sin(n+1) \leq 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -1 \leq \sin n \leq 1 \quad \text{و :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -1 \leq -\sin n \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -2 \leq \sin(n+1) - \sin n \leq 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq \sin(n+1) - \sin n + 2 \leq 4 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : (u_n) متتالية تزايدية.

(c) لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية موجبة قطعاً.

(يعني أن : $(\forall n \in I \quad (u_n > 0))$)



• إذا كان لكل n من I : $1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$
فإن $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية.

• إذا كان لكل n من I : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
فإن $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية.

مثال :

$$3 \leq n ; \quad u_n = \frac{2^n}{n^2}$$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 3}$ تزايدية.

- (طريقة 1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2} \geq \frac{2^n}{n^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} n \geq n+1$$

$$\Leftrightarrow n(\sqrt{2} - 1) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow n(2 - 1) \geq \sqrt{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{2} + 1$$

وبما أن : $n \geq 3$

$$\forall n \geq 3 ; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \text{فإن}$$

ومنه : $(u_n)_{n \geq 3}$ متتالية تزايدية.

- (طريقة 2)



$$\begin{aligned}n \geq 3 &\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \\&\Rightarrow \frac{4}{3} \geq 1 + \frac{1}{n} \\&\Rightarrow \frac{4}{3} \geq \frac{n+1}{n} \\&\Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{n}{n+1} \\&\Rightarrow \frac{9}{16} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\&\Rightarrow \frac{18}{16} \leq 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\&\Rightarrow 1 \leq 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\end{aligned}$$

$$1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي $(u_n)_{n \geq 3}$ تزايدية.

(d) تقنية البرهان بالترجع.

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{حالة خاصة :}$$

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

بين أن (u_n) تناقصية.

الجواب :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n \quad \text{لنبين أن :}$$

$$- \text{ من أجل : } n=0 \quad , \quad u_1 = 4 \quad \text{و} \quad u_0 = 16$$

$$u_1 \leq u_0 \quad \text{إذن :}$$

$$u_{n+1} \leq u_n \quad \text{نفترض أن :}$$

$$- \text{ لنبين أن :} \quad u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$u_{n+1} \leq u_n \quad \text{لدينا :}$$



$$\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n} \quad \text{إذن :}$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n \quad \text{- الاستنتاج}$$

ومنه : (u_n) تناقصية.

تطبيق :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1) \quad \text{بين أن : لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$$

(2) أدرس رتبة (u_n) .

الجواب :

$$(1) \quad \text{لنبين أن : } 0 \leq u_n \leq 3 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{من أجل } n=0 \quad \text{لدينا : } u_0 = 0 \quad \text{إذن : } 0 \leq u_n \leq 3$$

$$\text{نفترض أن : } 0 \leq u_n \leq 3 \quad \text{ولنبين أن : } 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$\text{لدينا : } 0 \leq u_n \leq 3$$

$$\text{إذن : } 6 \leq u_n + 6 \leq 9$$

$$\text{إذن : } \sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq 3$$

$$\text{وبما أن : } 0 \leq \sqrt{6}$$

$$\text{إذن : } 0 \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3$$

$$\text{إذن : } 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$\text{وبالتالي : } \forall n \in \mathbb{N} ; \quad 0 \leq u_n \leq 3$$

(2) لنبين أن : (u_n) تزايدية.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n \quad \text{يكفي أن نبين أن :}$$

$$\text{- من أجل } n=0 \quad u_1 = \sqrt{6}$$

$$\text{و : } u_0 = 0$$

$$\text{إذن : } u_1 \geq u_0$$

$$\text{نفترض أن : } u_{n+1} \geq u_n$$

$$\text{ولنبين أن : } u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

$$u_{n+1} \geq u_n$$

لدينا :

$$6 + u_{n+1} \geq 6 + u_n$$

إذن :

$$\sqrt{6 + u_{n+1}} \geq \sqrt{6 + u_n}$$

أي :

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

إذن :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} \geq u_n$$

وبالتالي :

ومنه : (u_n) متتالية تزايدية .

طريقة 2 :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6 + u_n} - u_n$$

لدينا :

$$= \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n}$$

إذن إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي إشارة $-u_n + u_n + 6$.

$$-u_n^2 + u_n + 6 \quad \text{لندرس إشارة}$$

$$-x^2 + x + 6 \quad \text{لندرس إشارة}$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{-2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1 + 5}{-2} \quad \text{إذن :}$$

$$= 3 \quad \text{و} \quad = -2$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-x^2 + x + 6$		-	+	-

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -u_n^2 + u_n + 6 \geq 0$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

وبالتالي : (u_n) متتالية تزايدية .

تمرين تطبيقي :

لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = u_n (1 + u_n) \end{cases}$$

1- أحسب u_1 و u_2 .

2- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

ثم استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 1$

3- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 \geq u_1$



$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} &\geq 2 u_n && \text{ثم أن} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &\geq 2^n && \text{-4 واستنتج أن :} \end{aligned}$$

الجواب :

$$u_1 = u_0 (1 + u_0) = 2 \quad \text{-1}$$

$$u_2 = u_1 (1 + u_1) = 6$$

-2 لدينا :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} ; \quad u_{n+1} - u_n &= u_n (1 + u_n) - u_n \\ &= \cancel{u_n} + u_n^2 - \cancel{u_n} \\ &= u_n^2 \end{aligned}$$

$$u_n^2 \geq 0 \quad \text{وبما أن :}$$

ومنه فإن : (u_n) **تزايدية.**

وبما أن : $u_0 = 1$ و (u_n) **تزايدية.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1 \quad \text{فإن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1 \quad \text{-3 لدينا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 \geq u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 + u_n \geq 2 u_n \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq 2 u_n \quad \text{إذن :}$$

$$u_1 \geq 2 u_0 \quad \text{-4 لدينا :}$$

$$u_2 \geq 2 u_1$$

$$u_3 \geq 2 u_2$$

$$u_n \geq 2 u_{n-1} \quad \text{ومنه :}$$

$$u_1 \cdot u_2 \dots u_n \geq 2^n \cdot u_0 \cdot u_1 \dots u_{n-1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^n u_0 \quad \text{إذن :}$$

$$u_0 = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^n \quad \text{فإن :}$$

-VI المتتاليات الحسابية ، المتتاليات الهندسية :

Suites géométriques, Suites arithmétiques

-1 المتتاليات الحسابية :

a- تضمن الحد العام للمتتالية التالية :

$$u_0 = \frac{1}{2} ; \quad u_1 = \frac{5}{6} ; \quad u_2 = \frac{7}{6} ; \quad u_3 = \frac{3}{2}$$



لدينا :

$$X \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 + \frac{1}{3} \\ u_2 = u_1 + \frac{1}{3} \\ u_3 = u_2 + \frac{1}{3} \\ u_4 = u_3 + \frac{1}{3} \\ \vdots \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + \frac{1}{3} n$$

$$u_n = u_0 + \frac{1}{3} n \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} n \quad \text{ومنه :}$$

هذه المتتالية تسمى **متتالية حسابية**.

-b تعريف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r ،

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} - u_n = r \quad \text{بحيث :}$$

العدد r يسمى **أساس المتتالية الحسابية** $(u_n)_{n \geq n_0}$

$$u_n = \frac{2n + 1}{3} \quad \text{مثال :}$$

بين أن : (u_n) متتالية حسابية وحدد أساسها.

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) + 1}{3} - \frac{2n + 1}{3} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{\cancel{2n} + 2 + \cancel{1} - \cancel{2n} - \cancel{1}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ومنه : (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$.

-c خاصية مميزة :

تمهيد :



لتكن $(u_n)_{n>n_0}$ متتالية حسابية أساسها r .

لدينا : $u_n = u_{n-1} + r$

$$u_{n+1} = u_n + r$$

إذن : $u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$

إذن : $2 u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$

إذن : $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

خاصية مميزة :

$\forall n \geq 1$ $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان :

d- صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 .

$$X \begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \vdots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$

$$u_n = u_0 + n r$$

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = u_0 + n r$

استنتاج :

لدينا :

$$u_n = u_0 + n r$$

$$u_n = u_0 + r + (n - 1) r$$

$$u_n = u_1 + (n - 1) r$$

$$u_n = u_1 + r + (n - 2) r$$

$$u_n = u_2 + (n - 2) r$$

ومنه : $u_n = u_k + (n - k) r$

خاصية :



إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية ،
فإن : $a + c = 2b$

e- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لنحسب المجموع S حيث :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\Rightarrow S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) + \dots + (u_0 + nr)$$

$$\Rightarrow S = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$X = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad \text{لنحسب :}$$

$$X = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2X = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ من العوامل}}$$

$$\Rightarrow 2X = n(n+1) \quad \text{إنن :}$$

$$\Rightarrow X = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ومنه :}$$

$$\Rightarrow S = (n+1) \left(u_0 + \frac{rn}{2} \right)$$

$$\Rightarrow S = (n+1) \frac{2u_0 + nr}{2}$$

$$\Rightarrow S = (n+1) \frac{u_0 + u_0 + nr}{2}$$

$$\Rightarrow S = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

وبالتالي :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

عدد الحدود الحد الأول الحد الأخير

بنفس الطريقة نحصل على :

$$\bullet \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$



$$\begin{aligned} \bullet \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} &= n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \\ \bullet \quad u_3 + u_4 + \dots + u_9 &= 7 \frac{u_3 + u_9}{2} \end{aligned}$$

تطبيق 1 :

أحسب u_0 وأساس المتتالية الحسابية (u_n) إذا علمت أن :

$$\begin{cases} u_4 + u_6 = 6 \\ u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 228 \end{cases}$$

$$2u_5 = 6 \quad \text{لدينا :}$$

$$u_5 = 3$$

$$u_9 + u_{13} = 114 \quad \text{ولدينا :}$$

$$(u_5 + 4r) + (u_5 + 8r) = 114$$

$$6 + 12r = 114 \quad \text{إن :}$$

$$r = \frac{108}{12} = 9$$

$$u_5 = u_0 + 5r \quad \text{ولدينا :}$$

$$3 = u_0 + 45 \quad \text{إن :}$$

$$u_0 = -42$$

تطبيق 2 :

متتالية حسابية $(u_n)_{n>0}$.

$$S_n = u_1 + \dots + u_n$$

أحسب n و S_n إذا كانت $u_1 = 23$ و $u_n = 5$ و $r = -2$

الجواب :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r \quad \text{لدينا :}$$

$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

$$2n = 18 + 2$$

$$n = 10$$

$$S_n = S_{10} = u_1 + \dots + u_{10} = 10 \cdot \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 140 \quad \text{إن :}$$

2- المتتاليات الهندسية :

1-2 : تمهيد :

تضمن الحد العام للمتتالية (u_n) .

إذا علمت أن :

$$u_0 = 2 \quad , \quad u_1 = \sqrt{2}^3 \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = \sqrt{32} \quad , \quad \dots$$

$$u_1 = u_0 \cdot \sqrt{2} \quad \text{نلاحظ أن :}$$

$$u_2 = u_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$u_3 = u_2 \cdot \sqrt{2}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2} \cdot u_n \quad \text{ومنه :}$$

$$X \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sqrt{2} \cdot u_0 \\ u_2 = \sqrt{2} \cdot u_1 \\ u_3 = \sqrt{2} \cdot u_2 \\ \vdots \\ u_n = \sqrt{2} \cdot u_{n-1} \end{array} \right. \quad \text{لدينا :}$$

$$u_n = u_0 \cdot \sqrt{2}^n$$

$$n \in \mathbb{N} ; \quad u_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^n$$

$$= 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}}$$

هذه المتتالية متتالية هندسية.

2-2 : تعريف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q ،

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = q u_n \quad \text{حيث :}$$

- العدد q يسمى أساس المتتالية الهندسية $(u_n)_{n \geq n_0}$.
- العدد q غير مرتبط بـ n .
- العدد q غير منعدم.

خاصية مميزة :

تمهيد : لتكن $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q .

$$\forall n > n_0$$

$$v_n = q \cdot v_{n-1} \quad \text{لدينا :}$$

$$v_{n+1} = q \cdot v_n$$



$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

إذن :

$$v_n^2 = v_{n-1} \cdot v_{n+1}$$

خاصية مميزة :

تكون $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n > n_0 \quad v_{n+1} \cdot v_{n-1} = v_n^2$$

3-2 : صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 .

لدينا :

$$X \quad \begin{cases} v_1 = q \cdot v_0 \\ v_2 = q \cdot v_1 \\ v_3 = q \cdot v_2 \\ \vdots \\ v_n = q \cdot v_{n-1} \end{cases}$$

نحصل على : $v_n = v_0 \cdot q^n$

استنتاج وخاصية :

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 ،

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = v_0 \cdot q^n \quad \text{فإن :}$$

$$v_n = v_0 \cdot q^n \quad \text{لدينا :}$$

$$v_n = v_0 \cdot q \cdot q^{n-1} \quad \text{إذن :}$$

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{إذن :}$$

$$v_n = v_1 \cdot q \cdot q^{n-2} \quad \text{ولدينا :}$$

$$v_n = v_2 \cdot q^{n-2} \quad \text{إذن :}$$

بصفة عامة :

$$v_n = v_k \cdot q^{n-k}$$

4-2 : مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_1 .

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad \text{لنحسب المجموع}$$

$$S = v_0 + v_0 q + v_0 q^2 + \dots + v_0 q^n$$

$$= v_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$$

لدينا :

$$X = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$qX = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

لنحسب المجموع :

لدينا :

$$X = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$X - qX = 1 - q^{n+1}$$

إذن :

$$X(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$X = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

إذن :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

ومنه :

$$S = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

↑ الحد الأول ↖ عدد الحدود
↘ الأساس

إذن :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = v_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

تمرين تطبيقي :

$$n < m$$

$$S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

(1) أحسب المجموع :

(2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n>0}$ بحيث حدودها العشرة الأولى هي حدود متتالية حسابية أساسها r .

وابتداءً من u_{10} تصبح الحدود حدود متتالية هندسية أساسها q علماً أن :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \frac{-1}{27} \\ r q = 1 \end{cases}$$

(a) أحسب q و r و u_{10} و u_{11} .

(b) أحسب : $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$



في كل من الحالتين :

$$\begin{aligned} n \leq 10 & * \\ n > 10 & * \end{aligned}$$

الجواب :

(1) طريقة 1 :

$$2 < m$$

$$S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}\right) \end{aligned}$$

(2) طريقة 2 :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \frac{-1}{27} \\ r q = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$u_{16} = u_{10} \cdot q^6 \quad \text{(a) لدينا :}$$

$$u_{10} = u_1 \cdot 9 r = 9 r \quad \text{و :}$$

$$u_{16} = 9 r \cdot q^6 \quad \text{إن :}$$

$$u_{16} = 9 q^6$$

$$(r q = 1) \quad \text{لأن :}$$

$$\frac{-1}{27} = 9 q^5 \quad \text{إن :}$$

$$q^5 = \frac{-1}{27 \cdot 9} \quad \text{إن :}$$

$$q^5 = \frac{-1}{3^5}$$

$$q^5 = \left(\frac{-1}{3}\right)^5 \quad \text{إن :}$$

$$q = \frac{-1}{3}$$



$$\begin{aligned} r &= -3 && \text{ومنه :} \\ u_{10} &= -27 && \text{: و} \\ u_{11} &= 9 && \text{: و} \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{p=1}^n u_p \quad \text{(b) لنحسب :}$$

* في الحالة : $n \leq 10$

$$\begin{aligned} S_n &= n \frac{u_1 + u_n}{2} \\ &= n \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} \\ S_n &= n \frac{-3n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

* في الحالة : $n > 10$

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \dots + u_9 + u_{10} + u_{11} + \dots + u_n \\ S_n &= S_{10} + (u_{11} + \dots + u_n) \\ S_n &= S_{10} + \left(u_{11} \frac{1 - q^{(n-10)}}{1 - q} \right) \end{aligned}$$

-VII- نهايات المتتاليات :

1- تمهيد :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ المعرفة بـ $u_n = f(n) \quad \forall n \in I$

حيث f دالة عددية.

- إذا كانت I منتهية فلا معنى لحساب النهاية.
- إذا كانت I غير منتهية فهنا يمكن حساب نهاية (u_n) عندما تؤول إلى $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) \quad \text{ولدينا :}$$

تذكير :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists B > 0) (\forall x \in D_f) \\ B < x \Rightarrow A < f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) \\ N < n \Rightarrow A < f(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) \\ N < n \Rightarrow A < u_n$$

أمثلة :

أحسب نهاية المتتالية إذا كانت المتتالية :



$$u_n = \sqrt[3]{n+1} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n+1} = +\infty$$

$$u_n = n \operatorname{Arc} \tan n \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{Arc} \tan n = +\infty \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ملاحظة:

$$\begin{aligned} \lim u_n = -\infty &\Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) \\ N < n &\Rightarrow u_n < -A \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

تذكير:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists B > 0) (\forall x \in D_f) \\ B < x &\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

2- نهاية (q^n) :

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي q نهاية q^n .

الحالة ①: $1 < q$

$$(\alpha > 0) / q = 1 + \alpha \quad \text{نضع:}$$

$$q^n = (1 + \alpha)^n \quad \text{لدينا:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{بين بالترجع أن:}$$

من أجل: $n = 0$

$$(1 + \alpha)^0 = 1 \quad ; \quad 1 + 0\alpha = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$(1 + \alpha)^0 \geq 1 + 0\alpha \quad \text{إن:}$$

من أجل: $n = 1$

$$(1 + \alpha)^1 = 1 + \alpha \quad \text{لدينا:}$$

$$(1 + \alpha)^1 \geq 1 + \alpha \quad \text{إن:}$$

من أجل: $n = 2$



$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 + \alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{نفترض أن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha \quad \text{ونبين أن :}$$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq (1 + \alpha)(1 + n\alpha) \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n\alpha = +\infty \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \alpha)^n = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad \text{ومنه :}$$

الحالة ② : q = 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$$

الحالة ③ : 0 < q < 1

$$1 < \frac{1}{q} \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad \text{ومنه :}$$

الحالة ④ : q = 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

الحالة ⑤ : -1 < q < 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-q)^n = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n q^n = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

إذن :

الحالة ⑥: $q \leq -1$
نهاية q^n غير موجودة.

خلاصة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & 1 < q \\ 1 & 1 = q \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{غير موجودة} & q \leq -1 \end{cases}$$

تطبيقات:

أحسب نهاية (u_n) في الحالات التالية :

$$u_n = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n \quad (1)$$

$$1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} < 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + 1 = \frac{1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} > -1 \quad \text{إذن :}$$

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} < +1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$



$$= \frac{1}{-1} = -1$$

مصاديق تقارب متتالية

Critère de convergence d'une suite.

نعتبر المتتاليات : $(u_n)_{n \geq n_0}$ ، $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$.

(1) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث :

$$u_n < v_n < w_n$$

$$\lim u_n = \lim w_n = l \quad \text{و :}$$

$$\lim v_n = l \quad \text{فإن :}$$

(2) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث :

$$\forall n > N \quad u_n < v_n$$

$$\lim u_n = +\infty \quad \text{و :}$$

$$\lim v_n = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\forall n > N \quad u_n < v_n \quad (3)$$

$$\lim v_n = -\infty \quad \text{و :}$$

$$\lim u_n = -\infty \quad \text{فإن :}$$

(4) إذا وجد N من \mathbb{N} حيث :

$$\forall n > N \quad |u_n| < v_n$$

$$\lim v_n = 0 \quad \text{و :}$$

$$\lim u_n = 0 \quad \text{فإن :}$$

(5) إذا وجد N من \mathbb{N} حيث :

$$\forall n > N \quad |u_n - l| < v_n$$

$$\lim v_n = 0 \quad \text{و :}$$

$$\lim u_n = l \quad \text{فإن :}$$

(6) إذا وجد N من \mathbb{N} حيث :

$$\forall n > N \quad |u_n - l| < \frac{k}{n}$$

$$\lim u_n = l \quad \text{فإن :}$$

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا فقط إذا كانت لها نهاية منتهية



ونقول أنها متباعدة إذا كانت غير متقاربة.

خاصيات :

إذا كانت $\lim u_n = l$ و $\lim v_n = l'$

فإن : $\lim u_n + v_n = l + l'$

$\lim u_n \cdot v_n = l \cdot l'$

$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$

مبرهنة :

كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نهايتها موجبة.

مبرهنة :

إذا كان لك $u_n < v_n$ ، $N < n$

و $\lim u_n = l$ و $\lim v_n = l'$

فإن : $l < l'$

مبرهنة :

كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة.
كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة.

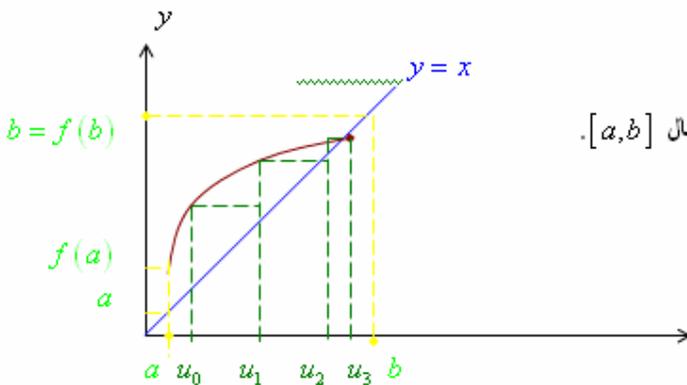
استنتاج :

- كل متتالية موجبة وتناقصية هي متتالية متقاربة.
- كل متتالية سالبة وتزايدية هي متتالية متقاربة.

متتاليات من نوع : $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال ① :

ليكن (f_r) المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[a, b]$.



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :



الأستاذ محمد الرقبة ثانوية أبي العباس السبتي مراكش

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

نلاحظ أن : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \in [a, b]$

يعني أن : $f([a, b]) \subset [a, b]$

وبما أن : (l_f) يوجد فوق المنصف.

فإن : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \geq x$

لنبين بالترجع أن (u_n) مكبورة.

- من أجل $n=0$ $a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a, b]$ ، $f(x) \in [a, b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$ إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} ; a \leq u_n \leq b$ ①

ونبين أن : (u_n) تزايدية.

لدينا : $\forall x \in [a, b] f(x) \geq x$

و : $\forall n \in \mathbb{N} a \leq u_n \leq b$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} f(u_n) \geq u_n$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \geq u_n$

وبالتالي : (u_n) تزايدية ②.

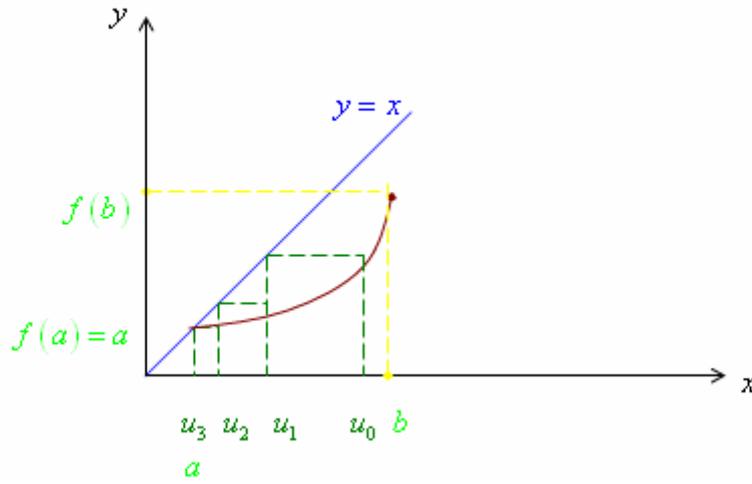
ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربة.

إذن لها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهاية (u_n) هي حل المعادلة :

$$a \leq x \leq b ; f(x) = x$$

مثال ② :



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

لدينا : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \in [a, b]$

يعني أن : $a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq f(x) \leq b$

ولدينا : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \leq x$

لنبين بالترجع أن : (u_n) مصغورة.

- من أجل $n=0$ $a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a, b]$ ، $f(x) \in [a, b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$

إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} ; a \leq u_n \leq b$ ①

لنبين أن : (u_n) تناقصية.

لدينا : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \leq x$

و : $\forall n \in \mathbb{N} ; a \leq u_n \leq b$

$\forall n \in \mathbb{N} ; f(u_n) \leq u_n$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$

وبالتالي : (u_n) تناقصية ②.



الأستاذ محمد الرقية ثانوية أبي العباس السبتي مراكش

ومن ① و ② نستنتج أن: (u_n) متقاربة.

إذن لها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهاية (u_n) هي حل المعادلة:

$$a \leq x \leq b ; \quad f(x) = x$$

خلاصة وخصائص:

إذا كانت (u_n) متتالية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$

و f متصلة على مجال I

مع: $u_0 \in I$ و $f(I) \subset I$

إذا كانت (u_n) متقاربة.

فإن نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ ، $x \in I$

مثال:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

① مثل مبيانيا الدالة المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{1}{2} x + 1$$

② بين أن: $\forall x \in [0, 2]$ ، $f(x) \in [0, 2]$

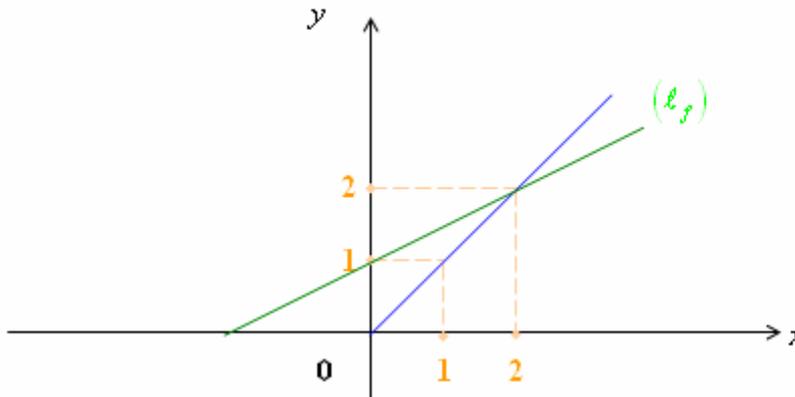
③ بين أن: $\forall x \in [0, 2]$ ، $f(x) \geq x$

④ بين أن: (u_n) مكبورة.

⑤ بين أن: (u_n) تزايدية.

⑥ استنتج نهاية (u_n) .

الجواب:
①



① بما أن f متصلة وتزايدية على $[0, 2]$.

فإن: $f([0, 2]) = [1, 2] \subset [0, 2]$

ومنه: $\forall x \in [0, 2]$ ، $f(x) \in [0, 2]$

② لنبين: $\forall x \in [0, 2]$ ، $f(x) \geq x$



الأستاذ محمد الرقية ثانوية أبي العباس السبتي مراكش

على المجال $[0, 2]$ ، ℓ_f يوجد فوق المنصف.

ومنه : $\forall x \in [0, 2] \quad , \quad f(x) \geq x$

(3) من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 2$

نفترض أن : $0 \leq u_n \leq 2$

بما أن : $\forall x \in [0, 2] \quad , \quad f(x) \in [0, 2]$

فإن : $0 \leq f(u_n) \leq 2$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

ومنه : $\forall x \in [0, 2] \quad , \quad 0 \leq u_n \leq 2$

إذن : (u_n) مكبورة.

(4) لدينا : $\forall x \in [0, 2] \quad , \quad f(x) \in [0, 2]$

و : $f(x) \geq x$

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \in [0, 2]$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad f(u_n) \geq u_n$

ومنه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايدية.

(5) بما أن : (u_n) تزايدية ومكبورة .

فإنها متقاربة.

ونهايتها هي حل المعادلة :

$$x \in [0, 2] \quad , \quad f(x) = x$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = x \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

وبما أن : $2 \in [0, 2]$

فإن : $\lim u_n = 2$

تمرين تطبيقي :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{2 \cdot u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

(1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$

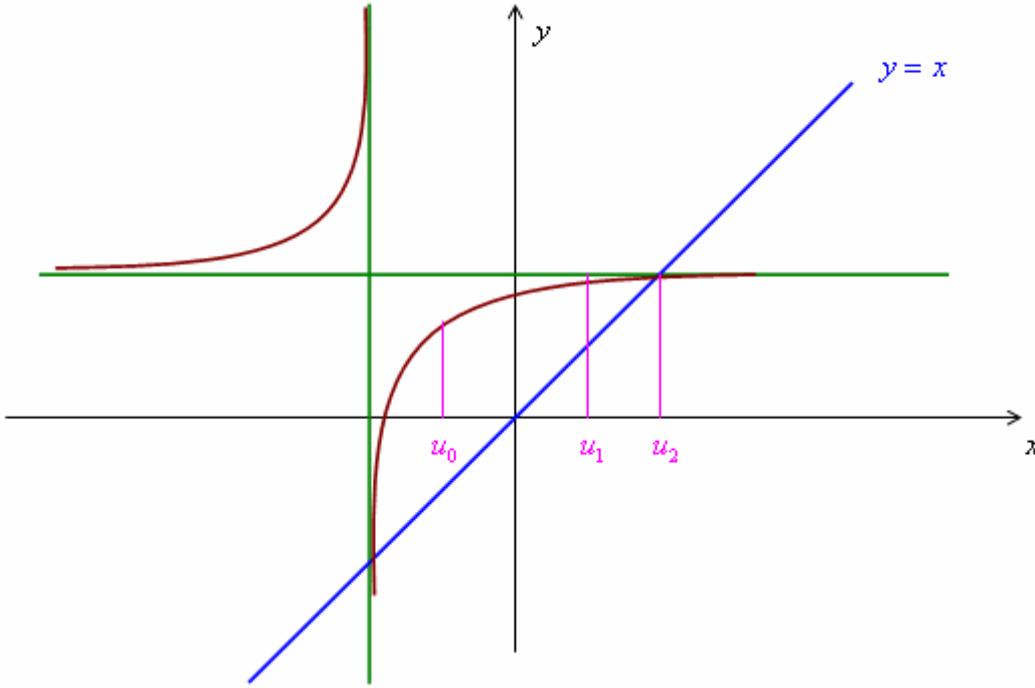
ثم أنشئ (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم ، ثم انشئ الحدود الأولى للمتتالية (u_n) .

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; \quad -1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

(3) استنتج رتبة (u_n) ، u_0 . (u_n) متقاربة.

(4) حدد نهاية (u_n) .

الجواب:
(1)



(1) لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; -1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0 = -1$

$$-1 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$$

من أجل $n=1$ ، لدينا : $u_1 = 1$

$$-1 \leq u_1 \leq \sqrt{3} \quad \text{إذن :}$$

نفترض أن : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

ونبين أن : $-1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

لدينا : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

إذن : $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$

إذن : $1 \leq f(u_n) \leq \sqrt{3}$

إذن : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

ومنه : $-1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

وبالتالي : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$