BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

3e Année Secondaire : Mathématiques

الجزء

1

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

سلسلة هبــاج

الرياضيــــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمــاذج للبكالوريا

الجزء الأول

السنـة 3 ثانوي

تقني رياضي ــ رياضيات ــ علوم تجريبية

سلسلة هبــاج

يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكـل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ـ محتـــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ـ يشمل هذا الجزء من السلسلة على خمسة محاور من البرنامج :

■ الإستدلال بالتراجع
■ النهايات و الإستمرارية
■ القسمة في Z
■ الجداء السلمي
■ المستقيمات و المستويات في الفضاء

ـ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل درس ، مجموعة تطبيقـــات للتصحيح الذاتـــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبـــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 81 52 26 0773

الإستدلال بالتراجع

مبدأ الإستدلال بالتراجع

لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n

و ليكن n_0 عدد طبيعي كيفي .

للبرهان على أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$. يكفي أن نتبع الخطوات التالية :

1 ـ نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n = n_0$ أي $P(n_0)$

2 ـ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من n_0 ونبرهن صحة هذه الخاصية من أجل $n + 1$ أي $P(n + 1)$

مثال ـ 1

لنثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فان العدد $2 + 4^n$ مضاعف 3

الحـل ـ 1

لاحظ أن $n_0 = 0$ لأن نريد إثبات الخاصية من أجل كل عدد طبيعي والخاصية المطلوبة هي : العدد $2 + 4^n$ مضاعف 3

طريقة الحل :

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ـ لنتأكد أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

هل العدد $2 + 4^0$ مضاعف 3 ؟

لدينا $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ إذن : فعلا العدد $2 + 4^0$ مضاعف 3

و عليه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

2 ـ لنفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n > 0$

أي : العدد $2 + 4^n$ مضاعف 3 (فرضية التراجع)

لنبرهن أن العدد $2 + 4^{n+1}$ مضاعف 3

لدينا :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 2 &= 4 \times 4^n + 2 \\ &= (1 + 3) \times 4^n + 2 \\ &= 4^n + 3 \times 4^n + 2 \\ &= (4^n + 2) + 3 \times 4^n \end{aligned}$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $2 + 4^n$ مضاعف 3 أي يوجد عدد طبيعي k يحقق $4^n + 2 = 3k$

منه : $4^{n+1} + 2 = 3k + 3 \times 4^n$

أي : $4^{n+1} + 2 = 3(k + 4^n)$

نضع $k + 4^n = \ell$ حيث ℓ عدد طبيعي

إذن : $4^{n+1} + 2 = 3\ell$

منه : العدد $2 + 4^{n+1}$ مضاعف 3

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2 + 4^n$ مضاعف 3

مثال ـ 2

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فان العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

الحـل ـ 2

باستعمال الاستدلال بالتراجع

1 ـ هل العدد $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ مضاعف 7 ؟

لدينا : $7 = 3 + 2^2 = 3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ و 7 مضاعف 7

إذن : العدد $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ مضاعف 7

2 ـ لنفرض أن العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7 من أجل $n > 0$

هل العدد $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف 7 ؟

لدينا:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 3^{2n+2+1} + 2^{n+1+2} \\ &= 3^2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \end{aligned}$$

$$= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= (2+7) \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= 2 \times 3^{2n+1} + 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} + 7 \times 3^{2n+1}$$
$$= 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \times 3^{2n+1}$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $7\,k = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

منه : $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 2(7\,k) + 7 \times 3^{2n+1}$

$$= 7(2\,k + 3^{2n+1})$$

نضع : $\ell = 2\,k + 3^{2n+1}$ حيث ℓ عدد طبيعي .

إذن : $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7\,\ell$

أي : العدد $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف 7 .

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

ملاحظة : في بعض الحالات لاثبات صحة خاصية نستعمل الاستدلال بالتراجع مرتين .

تمارين الكتاب المدرسي

__التمرين ــ 1__

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\mathbf{0+1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

__الحـل ــ 1__

1 ــ من أجل $n = 0$ المجموع $0+1+2+3+\ldots+n$ يساوي 0 (n ينطبق على 0)

و $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ــ لنفرض أن : $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ من أجل $n > 0$

هل : $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ ؟

لدينا : $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

لأن حسب فرضية التراجع $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن : $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = (n+1)(\frac{n}{2}+1)$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

__التمرين ــ 2__

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\mathbf{0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6}}$$

الحـل ـ 2

1ـ من أجل $n = 0$ المجموع $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ يساوي 0 (n ينطبق على0)

و $0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لأن $n = 0$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

2 ـ نفرض أن : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ من أجل $n > 0$

هل $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ؟

لدينا : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

لأن حسب فرضية التراجع : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

منه :
$$0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$
$$= (n+1)\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$
$$= (n+1)\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}$$
$$= (n+1)\frac{(2n+3)(n+2)}{6}$$ لأن : $(2n+3)(n+2) = 2n^2 + 7n + 6$
$$= \frac{(n+1)(2n+2+1)(n+1+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

التمرين ـ 3

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحـل ـ 3

1 ـ من أجل $n = 0$ المجموع : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ يساوي 0 لأن n ينطبق على 0 .

و $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 0$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ـ نفرض أن : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ من أجل $n > 0$

هل : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$ ؟

لدينا : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

لأن حسب فرضية التراجع $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

إذن : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)(n+1)^2$
$$= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right]$$

$$= (n+1)^2\,\frac{n^2+4n+4}{4}$$
$$= (n+1)^2\,\frac{(n+2)^2}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

<u>التمرين ــ 4</u>

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7

<u>الحـل ــ 4</u>

1 ــ من أجل $n=0$: $2^{3(0)}-1 = 1-1 = 0$ و 0 مضاعف 7

إذن : الخاصية محققة من أجل $n=0$

2 ــ نفرض أن العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7 من أجل $n>0$

هل $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف 7 ؟

لدينا : $2^{3(n+1)}-1 = 2^{3n+3}-1$
$$= 2^3\times 2^{3n}-1$$
$$= 8\times 2^{3n}-1$$
$$= (7+1)\times 2^{3n}-1$$
$$= 7\times 2^{3n}+2^{3n}-1$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $2^{3n}-1 = 7k$

منه : $2^{3(n+1)}-1 = 7\times 2^{3n}+7k$
$$= 7(2^{3n}+k)$$
$= 7\ell$ حيث $\ell = 2^{3n}+k$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{3n}-1$ مضاعف 7

<u>التمرين ــ 5</u>

أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n}-1$ مضاعف 8

<u>الحـل ــ 5</u>

1 ــ من أجل $n=0$: $3^{2(0)}-1 = 1-1 = 0$ و 0 مضاعف 8

إذن : الخاصية محققة من أجل $n=0$

2 ــ نفرض أن $3^{2n}-1$ مضاعف 8 من أجل $n>0$

هل $3^{2(n+1)}-1$ مضاعف 8 ؟ .

لدينا : $3^{2(n+1)}-1 = 3^{2n+2}-1$
$$= 3^2\times 3^{2n}-1$$
$$= 9\times 3^{2n}-1$$
$$= (8+1)\times 3^{2n}-1$$
$$= 8\times 3^{2n}+3^{2n}-1$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن $3^{2n}-1$ مضاعف 8

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $3^{2n}-1 = 8k$

منه : $3^{2(n+1)}-1 = 8\times 3^{2n}+8k$
$$= 8(3^{2n}+k)$$
$= 8\ell$ حيث $\ell = 3^{2n}+k$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n}-1$ مضاعف 8.

التمرين ــ 6

هل الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف 7 صحيحة ؟

الحـل ــ 6

1 ــ من أجل $n = 0$: $3^{2(0)+1} - 2^{2(0)+2} = 3^1 - 2^2 = -1$

لكن (-1) ليس مضاعف 7

إذن : الخاصية ليست صحيحة من أجل $n = 0$

نتيجة : الخاصية $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف 7 من أجل كل عدد طبيعي n **ليست صحيحة .**

التمرين ــ 7

لتكن $P(n)$ الخاصية : $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 .

هل الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟.

الحـل ــ 7

لنحاول أن نبرهن عن صحة هذه الخاصية باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ــ من أجل $n = 0$: $0^3 + 2(0) = 0$ و 0 يقبل القسمة على 3

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

2 ــ نفرض أن : $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 من أجل $n > 0$

هل $(n+1)^3 + 2(n+1)$ يقبل القسمة على 3 ؟.

لدينا :
$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n+1)[(n+1)^2 + 2]\\ &= (n+1)(n^2 + 2n + 1 + 2)\\ &= n^3 + 2n^2 + 3n + n^2 + 2n + 3\\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3\\ &= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

لكن : حسب فرضية التراجع فإن $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3

أي : يوجد عدد طبيعي k يحقق $n^3 + 2n = 3k$

منه :
$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= 3k + 3(n^2 + n + 1)\\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

$= 3\ell$ حيث $\ell = k + n^2 + n + 1$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : الخاصية $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

التمرين ــ 8

1 ــ أثبت أن إذا وجد عدد طبيعي n حيث 9 يقسم $10^n + 1$ فإن 9 يقسم $10^{n+1} + 1$

2 ــ هل من أجل كل عدد طبيعي n : $10^n + 1$ مضاعف 9 ؟

الحـل ــ 8

1 ــ ليكن $10^n + 1$ قابل للقسمة على 9

أي : يوجد عدد طبيعي k حيث $10^n + 1 = 9k$

لدينا :
$$\begin{aligned}10^{n+1} + 1 &= 10 \times 10^n + 1\\ &= (9+1) \times 10^n + 1\\ &= 9 \times 10^n + 10^n + 1\\ &= 9 \times 10^n + 9k\\ &= 9(10^n + k)\\ &= 9\ell\end{aligned}$$

لأن $10^n + 1 = 9k$ ، حيث $\ell = 10^n + k$

إذن : العدد $10^{n+1} + 1$ مضاعف 9

أي 9 يقسم العدد $10^{n+1} + 1$

2 ــ لاحظ أن : من أجل $n = 0$ فإن $10^0 + 1 = 2$ و لكن 2 ليس مضاعف 9

إذن : الخاصية ليست محققة من أجل $n = 0$

و عليه : العدد $10^n + 1$ ليس مضاعف 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين ــ 9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 1$

2 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

الحـل ــ 9

1 ــ من أجل $n = 1$: $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$

بما أن $2 > 1$ فإن $u_1 > 1$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_n > 1$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 1$ ؟

لدينا: $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

لكن : $u_n > 1$ إذن حسب خواص الحصر فإن $\sqrt{u_n} > \sqrt{1}$ أي $\sqrt{u_n} > 1$

منه : $u_{n+1} > 1$ أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 1$

2 ــ من أجل $n = 1$ لدينا $u_{n+1} = u_{1+1}$

$= u_2$

$= \sqrt{u_1}$

$= \sqrt{2}$

بما أن $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ فإن $u_2 \leq \frac{3}{2}$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ من أجل $n > 1$

هل $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$ ؟

لدينا : $u_{(n+1)+1} = \sqrt{u_{n+1}}$

لكن : $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ حسب فرضية التراجع .

إذن $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

أي : $u_{(n+1)+1} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\left(\text{لاحظ أن } \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\right)$

إذن $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

التمرين ــ 10

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

الحـل ــ 10

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = u_0$

إذن : لنبرهن صحة الخاصية من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = u_0$

باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ــ من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 = \sqrt{6 + u_0}$

$= \sqrt{6 + 3}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

إذن : $u_1 = 3 = u_0$ منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

2 ــ نفرض أن $u_n = u_0 = 3$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} = u_0 = 3$ ؟

لدينا : $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n = u_0 = 3$

إذن : $u_{n+1} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

منه : $u_{n+1} = u_0 = 3$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = u_0 = 3$

منه : المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي 3

التمرين ــ 11

نضع $t_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n\,(n+1)$

1ــ أحسب $t_4 \; ; \; t_3 \; ; \; t_2 \; ; \; t_1$

2ــ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $t_n = \frac{1}{3} n\,(n+1)(n+2)$

الحـل ــ 11

1ــ

$t_1 = 1 \times 2 = 2$

$t_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$

$t_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20$

$t_4 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = 40$

2 ــ الإستدلال بالتراجع :

✓ من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{3} n\,(n+1)\,(n+2) = \frac{1}{3}(2)(3) = 2$ و $t_1 = 2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

✓ نفرض أن $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ من أجل $n > 1$

هل $t_{n+1} = \frac{1}{3}\,(n+1)(n+1+1)\,(n+1+2)$ ؟

لدينا : $t_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2)$

$= t_n + (n+1)(n+2)$

$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$ حسب فرضية التراجع $t_n = \frac{1}{3}\, n\,(n+1)(n+2)$

$= (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}\, n + 1\right)$

$= \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $t_n = \frac{1}{3}\, n(n+1)(n+2)$

التمرين ــ 12

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع :

$$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + ... + (n-1) \times 2^{n-2}$$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن :

$$S_n = (n-1)\, 2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\, n - 1\right) \times 2^n$$

الحـل ــ 12

لاحظ أن : $\left(\frac{1}{2}\, n - 1\right) \times 2^n = \frac{1}{2}\, n \times 2^n - 2^n = n\, 2^{n-1} - 2^n$

و $(n-1)\, 2^n - n\, 2^{n-1} = n\, 2^n - 2^n - n\, 2^{n-1} = n\, 2^{n-1}\,(2-1) - 2^n = n\, 2^{n-1} - 2^n$

إذن : $(n-1)\, 2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\, n - 1\right) 2^n$

منه : يكفي إثبات أن $S_n = \left(\frac{1}{2}\, n - 1\right) \times 2^n + 1$ بالتراجع كما يلي :

من أجل $n = 2$: $S_1 = 1$

و : $1 + \left(\frac{1}{2}(2) - 1\right) \times 2^2 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

لنفرض أن $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$ من أجل $n > 2$

هل : $S_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$ ؟

لدينا : $S_{n+1} = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + ... + (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}$

$= S_n + n \times 2^{n-1}$

$= 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n + n \times 2^{n-1}$ حسب فرضية التراجع .

$= 1 + n \times 2^{n-1} - 2^n + n \times 2^{n-1}$

$= 1 + 2n \times 2^{n-1} - 2^n$

$= 1 + n \times 2^n - 2^n$

$= 1 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \times 2^{n+1}$

$= 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$

التمرين ــ 13

الرمز ! n يقرأ عاملي n حيث $\begin{cases} n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n & \text{من أجل } n > 0 \\ 0! = 1 & \text{من أجل } n = 0 \end{cases}$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n+1)! - 1$$

الحل ــ 13

من أجل $n = 1$ لدينا : $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$

هل : $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) + (n+1)(n+1)! = (n+1+1)! - 1$ ؟

لدينا $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) + (n+1)(n+1)! = [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)!$

$= (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$

$= (n+1)!\,(n+2) - 1$

$= (n+2)! - 1$

$= (n+1+1)! - 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$$

التمرين ــ 14

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $n! \geq 2^{n-1}$

الحل ــ 14

من أجل $n = 1$ لدينا $1! = 1$

$2^{1-1} = 2^0 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

لنفرض أن $n! \geq 2^{n-1}$ من أجل $n > 1$

هل $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ أي هل $(n+1)! \geq 2^n$

لدينا (1) .. .. $n! \geq 2^{n-1}$ حسب فرضية التراجع .

و (2)................ $n + 1 \geq 2$ لأن $n > 1$

بضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على $n!\,(n+1) \geq 2^{n-1} \times 2$

أي $(n+1)! \geq 2^n$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $n! \geq 2^{n-1}$

التمرين ــ 15 " متباينة برنولي "

a عدد حقيقي موجب تماما .

1ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$

2ــ استنتج أن إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

الحـل ــ 15

1ــ الاستدلال بالتراجع :

من أجل $n = 1$: $(1 + a)^n = (1 + a)^1 = 1 + a$

و $1 + n\,a = 1 + a$

إذن : $(1 + a)^n = 1 + n\,a$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$ من أجل $n > 1$

هل $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\,a$ ؟

أي هل $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$ ....(1)

نضرب طرفي هذه المتباينة في نفس العدد الحقيقي الموجب $(1 + a)$ فنحصل على :

$$(1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + n\,a)(1 + a)$$

أي : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a + n\,a^2$

لكن : $1 + n\,a + a + n\,a^2 \geq 1 + n\,a + a$ لأن $n\,a^2 > 0$

إذن : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a$

أي : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$

2 ــ إذا كان $q > 1$ فإن يوجد عدد حقيقي موجب تماما a حيث $q = 1 + a$

منه : $q^n = (1 + a)^n$

لكن $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$

أي : $q^n \geq 1 + n\,a$

بما $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + n\,a = +\infty$ و $q^n \geq 1 + n\,a$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

التمرين ــ 16

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$

1 ــ أحسب $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5$

2 ــ استنتج عبارة $3 - u_n$ بدلالة n ثم برهن صحتها بالتراجع .

3 ــ استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحـل ــ 16

$$u_1 = 2\,u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$$
$$u_2 = 2\,u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$
$$u_3 = 2\,u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$
$$u_4 = 2\,u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$
$$u_5 = 2\,u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

2 ــ لاحظ أن :

$$3 - u_0 = 3 - 2 = 1 = 2^0$$
$$3 - u_1 = 3 - 1 = 2 = 2^1$$
$$3 - u_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$$
$$3 - u_3 = 3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$3 - u_4 = 3 + 13 = 16 = 2^4$$
$$3 - u_5 = 3 + 29 = 32 = 2^5$$

نستنتج أن $3 - u_n = 2^n$

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع :

لدينا الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ و $n = 2$ و $n = 3$ و $n = 4$ و $n = 5$

نفرض أن $3 - u_n = 2^n$ من أجل $n > 5$

هل $3 - u_{n+1} = 2^{n+1}$ ؟

لدينا : $3 - u_{n+1} = 3 - (2 u_n - 3)$

$= 6 - 2 u_n$

$= 2(3 - u_n)$

$= 2 \times 2^n$ لأن $3 - u_n = 2^n$ حسب فرضية التراجع

$= 2^{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3 - u_n = 2^n$

3 ــ لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n = 2^n$ إذن $u_n = 3 - 2^n$

التمرين ــ 17

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2 n - 1)$

1 ــ أحسب S_1 ; S_2 ; S_3 ; S_4

2 ــ استنتج عبارة S_n بدلالة n ثم برهن عن صحتها بالتراجع .

3 ــ برهن عن صحة عبارة S_n السابقة باستعمال قانون مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية .

الحــل ــ 17

1 ــ من أجل $n = 1$ لدينا : $2 n - 1 = 2(1) - 1 = 1$

إذن : $S_1 = 1$ لاحظ أن $S_1 = 1^2$

من أجل $n = 2$ لدينا : $2 n - 1 = 2(2) - 1 = 3$

إذن : $S_2 = 1 + 3 = 4$ لاحظ أن $S_2 = 2^2$

من أجل $n = 3$ لدينا : $2 n - 1 = 2(3) - 1 = 5$

إذن : $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$ لاحظ أن $S_3 = 3^2$

من أجل $n = 4$ لدينا : $2 n - 1 = 2(4) - 1 = 7$

إذن : $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ لاحظ أن $S_4 = 4^2$

2 ــ نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = n^2$

لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع.

✓ الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$

✓ نفرض أن $S_n = n^2$ من أجل $n > 4$

هل $S_{n+1} = (n + 1)^2$ ؟

لدينا : $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ...+ (2 n - 1) + (2(n + 1) - 1)$

$= S_n + 2 n + 1$

$= n^2 + 2 n + 1$ لأن $S_n = n^2$ حسب فرضية التراجع

$= (n + 1)^2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $S_n = n^2$

3 ــ $S_n = 1 + 3 + 5 + ...+ (2 n - 1)$

لاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 2 لتكن (u_n) هذه المتتالية .

نضع : $u_1 = 1$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 1 + 2(n - 1)$

أي : $u_n = 2 n - 1$

منه : $1 + 3 + 5 + ... + 2 n - 1 = \dfrac{(1 + 2 n - 1)}{2} \times n$ حيث n هو عدد الحدود

أي : $1 + 3 + 5 + ..\,.+ 2 n - 1 = \dfrac{2 n}{2} \times n = n^2$

أي : $S_n = n^2$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 18

(u_n) متتالية معرفة بــ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 2$

(v_n) متتالية معرفة بــ $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_n + v_n$

1 ــ عبرعن u_n بدلالة n

2 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + n^2$

<u>الحــل ــ 18</u>

1 ــ لدينا : $u_{n+1} = u_n + 2$ إذن حسب التعريف (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول $u_0 = 1$ إذن : $u_n = 1 + 2n$

2 ــ لنبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + n^2$

✓ من أجل $n = 0$: $1 + n^2 = 1 + 0^2 = 1$ و $v_0 = 1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

✓ لنفرض أن $v_n = 1 + n^2$ من أجل $n > 0$

هل $v_{n+1} = 1 + (n+1)^2$ ؟

لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_n + v_n \\ &= 1 + 2n + 1 + n^2 \\ &= 1 + (n^2 + 2n + 1) \\ &= 1 + (n+1)^2 \end{aligned}$$

لأن $\left.\begin{array}{l} u_n = 1 + 2n \\ v_n = 1 + n^2 \end{array}\right\}$ حسب فرضية التراجع

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n = 1 + n^2$

<u>التمرين ــ 19</u>

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 2$

<u>الحــل ــ 19</u>

من أجل $n = 0$ لدينا : $2 \le 1 \le 0$ أي $0 \le u_0 \le 2$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$: $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{3}$

بما أن $0 \le \sqrt{3} \le 2$ فإن $0 \le u_1 \le 2$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $0 \le u_n \le 2$ من أجل $n > 1$

هل $0 \le u_{n+1} \le 2$ ؟

لدينا $0 \le u_n \le 2$ إذن : $0 + 2 \le u_n + 2 \le 2 + 2$

أي : $2 \le u_n + 2 \le 4$

أي $\sqrt{2} \le \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{4}$

أي : $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le 2$

أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$ لأن $0 < \sqrt{2}$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \le u_n \le 2$

<u>التمرين ــ20</u>

p دالة كثير حدود معرفة على R بـ $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

1 ــ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $p(x+1) - p(x) = x^2$

2 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in N$

3 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

<u>الحــل ــ20</u>

1 ــ ليكن $x \in R$

لدينا :

$$\begin{aligned} p(x+1) - p(x) &= \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1) - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right] \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x \end{aligned}$$

و هو المطلوب $=x^2$

لاحظ أن $N \subset R$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $p(n+1) - p(n) = n^2$

أي : $p(n+1) = p(n) + n^2$

2 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in N$

نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كما يلي :

✓ من أجل $n = 0$ لدينا $p(0) = \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(0) = 0$ و $0 \in N$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

✓ نفرض أن $p(n) \in N$ من أجل $n > 0$

هل $p(n+1) \in N$ ؟

لدينا حسب السؤال (1) : $p(n+1) = p(n) + n^2$

و حسب فرضية التراجع : $p(n) \in N$

إذن : $(p(n) + n^2) \in N$

أي : $p(n+1) \in N$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $p(n) \in N$

3 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

✓ من أجل $n = 0$ لدينا : $p(0+1) = p(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6} = 0$$

و الكتابة $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ من أجل $n = 0$ تكتب $0^2 = 0$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

✓ نفرض أن : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ من أجل $n > 0$

هل $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$ ؟

لدينا حسب السؤال (1) : $p(n+1) = p(n) + n^2$

إذن : $p[(n+1)+1] = p(n+1) + (n+1)^2$

أي : $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

التمرين ــ21

(u_n) متتالية معرفة على N^* بـ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$

2 ــ استنتج قيمة المجموع $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008}$

الحـل ــ21

1 ــ الاستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$$

✓ من أجل العنصرين u_1, u_2 لدينا :

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12}$$

في هذه الحالة $n = 2$ و $\frac{n}{n+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

بما أن $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ فإن الخاصية محققة من أجل العنصرين u_1 و u_2

✓ نفرض أن $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$

هل $u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ ؟

لدينا $u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + u_{n+1}$ حسب فرضية التراجع .

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(n + \frac{1}{(n+1+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

$= \frac{n+1}{n+1+1}$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$

2 ــ لدينا من أجل $n = 1426$ فإن : $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + ... + \frac{1}{1426 \times 1427} = \frac{1426}{1426+1} = \frac{1426}{1427}$

و من أجل $n = 2007$ فإن : $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + ... + \frac{1}{1426 \times 1427} + \frac{1}{1427 \times 1428} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008}$

منه : $\frac{1426}{1427} + \frac{1}{1427 \times 1428} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008}$

أي : $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008} - \frac{1426}{1427} = \frac{581}{2865416}$

التمرين ــ 22

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

الحل ــ 22

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

$u_0 = 1$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

✓ من أجل $n = 1$: $u_1 = \frac{u_0+1}{u_0+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{1}{2}$ و $0 \le \frac{1}{2} \le 1$

إذن : $0 \le u_1 \le 1$ منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$.

✓ لنفرض أن $0 \le u_n \le 1$ من أجل $n > 1$

هل $0 \le u_{n+1} \le 1$ ؟

لدينا : $0 \le u_n \le 1$ منه : $1 \le u_n + 1 \le 2$ (نضيف 1 إلى الطرفين)

و من جهة أخرى : $0 \le u_n \le 1$ منه : $3 \le u_n + 3 \le 4$ (نضيف 3 إلى الطرفين)

أي : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n+3} \le \frac{1}{3}$ (بتطبيق خاصية المقلوب)

إذن لدينا المتباينتين $\left.\begin{array}{l} 1 \leq u_n + 1 \leq 2 \\ \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{u_n + 3} \leq \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$

بإجراء الجداء طرف لطرف نحصل على : $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3} \leq \dfrac{2}{3}$

أي : $\dfrac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}$

و خاصة : $0 \leq \dfrac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3} \leq 1$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$.

النهايات و الإستمرارية

1 ـ النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف : f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي ℓ يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد ℓ يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي .

و نكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ و نقرأ : نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي ℓ

ملاحظة :

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$

أمثلة : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2 ـ النهاية غير المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ (على الترتيب هي $-\infty$) يعني أن كل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ (على الترتيب $]-\infty ; A[$) حيث $A \in IR$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي و نكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (على الترتيب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)

و نقرأ نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي $+\infty$ (على الترتيب نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي $-\infty$)

أمثلة : $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3 ـ المستقيم المقارب المائل :

تعريف : ليكن (C_f) المنحنى البياني لدالة f في معلم . و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$. القول أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ (على الترتيب $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$)

مثال : f دالة معرفة على IR^* بـ $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-3)] = \lim_{x \to +\infty} \left[2x - 3 + \frac{1}{x^2} - (2x-3)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

بنفس الطريقة لدينا : $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x-3)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

4 ـ النهاية المنتهية لدالة عند عدد حقيقي :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$ و $\ell \in R$

القول أن نهاية f عند x_0 هي ℓ يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد ℓ يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و نقرأ نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى x_0 هي ℓ

مثال : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1$$
$$= 2$$

إذن عندما يقترب x من 1 بالقدر الكافي فإن العدد $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ يقترب بالقدر الكافي من 2

5 ــ النهاية غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$.

القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ حيث $A \in R$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ و نقرأ نهاية f(x) لما x يؤول إلى x_0 هي $+\infty$

مثال : $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 3} (x-3)^2 = 0$

حذار ! في بعض الحالات يجب التمييز بين x يؤول إلى x_0 بقيم أكبر من x_0 أي $x - x_0 > 0$ و x يؤول إلى x_0 بقيم أصغر من x_0 أي $x - x_0 < 0$

مثال : لا يمكن حساب $\lim_{x \to 0} 1/x$ لأن نميز حالتين :

✓ لما $x \overset{>}{\to} 0$ فإن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1/x = +\infty$ لأن $1/x > 0$

✓ لما $x \overset{<}{\to} 0$ فإن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} 1/x = -\infty$ لأن $1/x < 0$

ملاحظة : إذا كان (C_f) منحنى الدالة f في معلم و كان (Δ) مستقيما معادلته $x = a$ و كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند a .

6 ــ عمليات على النهايات : لتكن f و g دالتان عدديتان .

α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و ℓ ؛ ℓ' أعداد حقيقية .

نهاية مجموع دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	ℓ / ℓ'	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة : الرمز ح ع ت يقرأ حالة عدم التعيين و معناه أنه لا يمكن إستنتاج قيم النهاية مباشرة لذلك نلجأ إلى إزالتها بطرق مختلفة بتطبيق خواص العمليات المعرفة على الأعداد الحقيقية كالعامل المشترك و الإختزال و الضرب في المرافق و تعريف العدد المشتق كما يلي :

الإختزال: نريد حساب $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

لدينا $\lim\limits_{x \to -1} (x^2-1) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -1} x+1 = 0$

إذن : حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فان $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ هي ح ع ت لإزالتها نلجأ إلى الإختزال

كمايلي :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

العامل المشترك : نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فان

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى العامل المشترك كمايلي : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} 2/x = 0$

$= +\infty$

الضرب في المرافق : نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى الضرب في المرافق كمايلي :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$

خاصية العدد المشتق: نريد حساب $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

إذن: حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فان $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى إستخدام العدد المشتق كمايلي :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـــ $f(x) = \cos x$

نعلم أن f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة 'f هي الدالة المعرفة على IR بـــ $f'(x) = -\sin x$

إذن $f'(0) = -\sin 0 = 0$

لكن حسب تعريف العدد المشتق للدالة f عند 0 فإن :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) \quad \text{لأن} \quad f(0)=1$$

نتيجة : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = f'(0) = 0$ لأن $f'(0)=0$

7 – نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة فقط .

مثال : $\lim_{x\to+\infty} -x^3+2x^2-\sqrt{2}\,x-1 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$

حذار! $\lim_{x\to a} -x^3+2x^2-\sqrt{2}\,x-1 = -a^3+2a^2-\sqrt{2}\,a-1$ من أجل $a\in IR$

8 – نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام .

مثال : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

نشاط :

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+x-2}$

1 – عين مجموعة تعريف الدالة f .

2 – أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحـل :

1 – تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2+x-2\neq 0$

لنحل في IR المعادلة $x^2+x-2=0$

$\Delta = 1-4(-2)=9$ إذن : $\begin{cases} x_1=\frac{-1+3}{2}=1 \\ x_2=\frac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$

نتيجة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$

2 – النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = 0$$ (نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$)

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{2x+3}{x^2+x-2} = \lim_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{2(-2)+3}{x^2+x-2}$$

لاحظ أن :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $\lim_{x\overset{<}{\to}-2}(x^2+x-1)=0^+$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}-2}(x^2+x-1)=0^-$

$\lim_{x\overset{<}{\to}1}(x^2+x-1)=0^-$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}1}(x^2+x-1)=0^+$

منه : $\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x) = \lim_{y\overset{>}{\to}0}\frac{-1}{y} = -\infty$

ملاحظة : نقبل أن 0^+ يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم موجبة و 0^- يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم سالبة .

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2(-2)+3}{y} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ (نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$)

9 ـ نهاية دالة مركبة

مبرهنة :

$c ; b ; a$ تمثل إما أعداد حقيقية أو $(+\infty)$ أو $(-\infty)$

u ؛ v ؛ f دوال عددية حيث $f = v \circ u$ (o يرمز إلى مركب دالتين)

إذا كانت $\lim_{x \to a} u(x) = b$ و كانت $\lim_{x \to b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = c$

مثال : $u : x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ ؛ $v : x \mapsto \sin x$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \to \pi/2} v(x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

نتيجة : $\lim_{x \to +\infty} v \circ u(x) = 1$ أي $\lim_{x \to +\infty} v(u(x)) = 1$

أي $\lim_{x \to +\infty} v\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1$

أي $\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1$

10 ـ حساب النهاية بالمقارنة :

مبرهنة (1)

f ؛ g ؛ h دوال عددية معرفة على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$. ℓ عدد حقيقي .

إذا كانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ و إذا كان من أجل كل x كبير بالقدر الكافي

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

مثال : لتكن f دالة معرفة على IR^* بـ $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

نعلم أن من أجل كل x من IR فإن $-1 \le \cos x \le 1$

إذن : من أجل $x > 0$ فإن $-1/x \le \frac{\cos x}{x} \le 1/x$

أي : من أجل $x \in]0 ; +\infty[$ فإن $-1/x \le f(x) \le 1/x$

لكن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = \lim_{x \to +\infty} -1/x = 0$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

مبرهنة (2)

f ؛ g دالتان معرفتان على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \ge g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مبرهنة (3)

f ؛ g دالتان معرفتان على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \le g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة : يمكن إستعمال المبرهنات **(1)** ، **(2)** و **(3)** إذا كانت النهايات عند ∞ - أو عند عدد حقيقي .

تعريف الإستمرارية

f دالة معرفة على مجموعة D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة : إذا كانت f دالة مستمرة عند كل عنصر من المجال I نقول أن f مستمرة على I

هند سيا : تكون دالة f مستمرة على مجال I إذا كان من الإمكان رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد) أي لا يوجد إنقطاع لهذا المنحنى على المجال I .

نتائج :

- ✓ الدالة cos و الدالة sin مستمرة على IR
- ✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على IR
- ✓ الدوال الناطقة مستمرة على مجموعات تعريفها .

<u>نشاط</u> :

f دالة معرفة على المجال [3 ; 2 -] كمايلي :
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 : x \in [-2 ; 0[& \text{إذا كان} \\ x \quad : x \in [0 ; 3[& \text{إذا كان} \end{cases}$$

1 ــ هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2 ــ هل الدالة f مستمرة على المجال [3 ; 2 -] ؟

3 ــ أعط مجالا جزئيا من المجال [3 ; 2 -] تكون فيه الدالة f مستمرة .

<u>الحـــل</u> :

1 ــ لاحظ أن الدالة f معرفة على المجال [0 ; 2 -[بــ $f(x) = -x^2 + 2$ إذن يمكن حساب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ كما يلي :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -x^2 + 2 = -(0)^2 + 2 = 2$$

لاحظ أيضا أن الدالة f معرفة على المجال [3 ; 0] بــ $f(x) = x$ إذن يمكن حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ كما يلي :
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0$$

من جهة أخرى الدالة f معرفة عند 0 لأن $0 \in [0 ; 3[$ و $0 \notin [-2 ; 0[$ إذن : $f(0) = 0$

خلاصة : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ إذن : الدالة f لا تقبل نهاية محددة عند 0 و عليه فالدالة f ليست مستمرة عند 0 .

2 ــ العدد 0 عنصر من المجال [3 ; 2 -] و الدالة f ليست مستمرة عند 0 إذن فهي ليست مستمرة على المجال [3 ; 2 -]

3 ــ الدالة f معرفة على المجال [1/2- ; 1-] بــ $f(x) = -x^2 + 2$ إذن هي كثير حدود منه f مستمرة على المجال [1/2- ; 1-] .

مبرهنة القيم المتوسطة

نص المبرهنة :

f دالة معرفة و مستمرة على مجال [a ; b]

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) و f(b) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

حالة خاصة : إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن العدد $k = 0$ محصور بين f(a) و f(b)

إذن : يوجد c من المجال [a ; b] حيث $f(c) = 0$ أي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا و هو c على المجال [a ; b] .

المعادلة $f(x) = k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال [a ; b] فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) و f(b) فالمعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c حيث $c \in [a ; b]$.

مثال : $f(x) = x^3 + x - 1$

f دالة كثير حدود إذن مستمرة على IR و خاصة فهي مستمرة على [0 ; 1]

لدينا : $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي k من المجال [1 ; 1-] فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c حيث $c \in [0 ; 1]$

و خاصة $k = 0$ حيث $0 \in [-1 ; 1]$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل c من المجال [0 ; 1]

نشاط :

برهن أن المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2 ; 1]$

الحـل :

لتكن f دالة معرفة على $[-2 ; 1]$ بـ $f(x) = x^3 - 2x$

✓ f دالة كثير حدود إذن f مستمرة على $[-2 ; 1]$

✓ $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) = -8 + 4 = -4$

✓ $f(1) = 1 - 2 = -1$

نتيجة : f تحقق شروط مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-2 ; 1]$ أي من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-4 ; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2 ; 1]$

بما أن $k = -2$ هو عنصر من المجال $[-4 ; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = -2$ أي المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا c من المجال $[-2 ; 1]$

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a ; b]$

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $[a ; b]$.

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف :

الهدف من هذا العنصر هو البحث عن حل معادلة من الشكل $f(x) = 0$ على مجال $[a ; b]$ حيث f دالة مستمرة على المجال $[a ; b]$ لذلك نلجأ إلى إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة كما يلي :

إذا تحقق أن f رتيبة تماما و مستمرة على $[a ; b]$ حيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a ; b]$ إذن لدينا حصرا أولا للعدد α حيث $a < \alpha < b$ و نبحث عن حصر آخر يكون أصغر من المجال $[a ; b]$ و ذلك بأخذ m_1 منتصف المجال $[a ; b]$ أي $m_1 = \dfrac{a + b}{2}$

نقوم بحساب $f(m_1)$ ثم نلجأ إلى النتيجة التالية :

إذا كان $f(m_1) \times f(a) < 0$ فإن $a < \alpha < m_1$ إذن المجال الثاني للحصر هو $[a ; m_1]$

إذا كان $f(m_1) \times f(b) < 0$ فإن $m_1 < \alpha < b$ إذن المجال الثاني للحصر هو $[m_1 ; b]$

نعيد نفس الخطوات على المجال الثاني لنحصل على المجال الثالث و هكذا حتى نحصل على أصغر مجال يشمل العدد α.

مثال : نريد تعيين حصرا لحل المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ على المجال $]-1 ; 0[$

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $[-1 ; 0]$ بـ $f(x) = x^2 - x - 1$

لدينا $f'(x) = 2x - 1$

منه :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : f متناقصة تماما على $]-\infty ; 1/2]$ و خاصة على المجال $[-1 ; 0]$

نتيجة : f متناقصة تماما و مستمرة على المجال $[-1 ; 0]$ و $f(0) = -1$ و $f(-1) = 1$

إذن $f(-1) \times f(0) < 0$ منه المعادلة $f(x) = 0$ أي $x^2 - x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < 0$

الخطوة الأولى : ليكن m_1 منتصف $[-1 ; 0]$ أي $m_1 = -1/2$

لدينا
$$f(m_1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$$

إذن : $f(m_1) \times f(-1) < 0$

منه : الحصر الجديد $-1 < \alpha < -1/2$

الخطوة الثانية : ليكن m_2 منتصف $[-1 ; -1/2]$ أي $m_2 = -3/4$

$$f(m_2) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9 + 12 - 16}{16} = \frac{5}{16}$$

لدينا: $f(-3/4) \times f(-1/2) < 0$

إذن : الحصر الجديد $-3/4 < \alpha < -1/2$

الخطوة الثالثة : ليكن m_3 منتصف $[-3/4 ; -1/2]$ أي $m_3 = -5/8$

$$f(m_3) = f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64} + \frac{5}{8} - 1 = \frac{25+40-64}{64} = \frac{1}{64}$$

لدينا: $f(-5/8) \times f(-1/2) < 0$

إذن : الحصر الجديد $-5/8 < \alpha < -1/2$

يمكن مواصلة الحصر بهذه الطريقة حتى نحصل على أصغر مجال ممكن و ذلك بالقيام بأكبر عدد من الخطوات .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين – 1

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$

1 – أوجد عدد حقيقيا A حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

2 – بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f على IR .

3 – أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

الحـل – 1

1 – لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

إذن : من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

وعليه يمكن أخذ العدد A أكبر ما يمكن حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

2 – بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3 – الوضعية :

$$f(x) - (3) = \frac{3x-2}{x+1} - 3 = \frac{3x-2-3x-3}{x+1} = \frac{-5}{x+1}$$

لندرس إشارة $f(x) - (3)$ على IR :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-5	$-$	‖	$-$
$x+1$	$-$	‖	$+$
$\dfrac{-5}{x+1}$	$+$	‖	$-$

نتيجة : لما $x \in]-1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - 3 < 0$ إذن : (C_f) تحت (Δ)

لما $x \in]-\infty ; -1[$ لدينا $f(x) - 3 > 0$ إذن : (C_f) فوق (Δ)

التمرين – 2

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

1 – أوجد عدد حقيقيا A حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

2 – بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f على IR .

3 – أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

الحـل – 2

1 – لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

إذن : من أجل x صغير بالقدر الكافي فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

و عليه يمكن أخذ العدد A أصغر ما يمكن حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

2 – $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f

3 ــ الوضعية :

$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

لندرس إشارة $f(x) - 1$ على IR :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
2	+		+
$x - 1$	−		+
$\frac{2}{x-1}$	−		+

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 1[$ لدينا $f(x) - 1 < 0$ إذن : C_f تحت Δ

لما $x \in]1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - 1 > 0$ إذن : C_f فوق Δ

التمرين ــ 3

f دالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني

1 ــ بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2 ــ أدرس وضعية المُنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ .

الحـل ــ 3

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x-1} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1}$$

$= 0$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$

2ــ

$$f(x) - x = x + \frac{1}{x-1} - x = \frac{1}{x-1}$$

لندرس إشارة $f(x) - x$ كما يلي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	−		+
$\frac{1}{x-1}$	−		+

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 1[$ لدينا $f(x) - x < 0$ إذن : C_f تحت Δ

لما $x \in]1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - x > 0$ إذن : C_f فوق Δ

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x^2+1}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم

1 ــ بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2 ــ أدرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ .

الحـل ــ 4

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to +\infty} 2x - 1 - \frac{2}{x^2+1} - (2x-1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2+1}$$

$= 0$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x^2+1} = 0$$

إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

2 ــ الوضعية :

$$f(x) - (2x-1) = \left(2x - 1 - \frac{2}{x^2+1}\right) - (2x-1) = \frac{-2}{x^2+1}$$

بما أن $x^2+1>0$ فإن $\frac{-2}{x^2+1}<0$ أي $f(x)-(2x-1)<0$

إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم Δ .

التمرين – 5

في كل حالة من الحالات التالية أوجد معادلة للمستقيم المقارب لمنحنى الدالة f_n عند $+\infty$ و عند $-\infty$

1 – $f_1(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ 5 – $f_5(x) = x + 3 - \frac{2}{|x|}$

2 – $f_2(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$ 6 – $f_6(x) = \frac{\sin x}{x} - x + 1$

3 – $f_3(x) = 2x + 1 + \frac{5}{x-3}$ 7 – $f_7(x) = \frac{x^2+x-1}{1-2x}$

4 – $f_4(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2-1}$ 8 – $f_8(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$

الحل – 5

1 – $$\lim_{x\to\infty} f_1(x) - 1 = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}} - 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_1 عند $+\infty$ و $-\infty$ أي عند $+\infty$ و $-\infty$

2 – $$\lim_{x\to\infty} f_2(x) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -1/3$ مقارب لمنحنى الدالة f_2 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

3 – $$\lim_{x\to\infty} f_3(x) - (2x+1) = \lim_{x\to\infty} 2x + 1 + \frac{5}{x-3} - (2x+1) = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x-3} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_3 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

4 – $$\lim_{x\to\infty} f_4(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب لمنحنى الدالة f_4 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

5 – $$\lim_{x\to\infty} f_5(x) - (x+3) = \lim_{x\to\infty} x + 3 - \frac{2}{|x|} - (x+3) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{|x|} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب لمنحنى الدالة f_5 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

6 – $\lim_{x\to\infty} f_6(x) - (-x+1) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x+1)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

لكن : $-1 \le \sin x \le 1$

منه : $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$ أو $\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{-1}{x}$ (حسب إشارة x)

بما أن $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ و $\lim_{x\to\infty} -1/x = 0$ فان بالحصر $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

نتيجة : $\lim_{x\to\infty} f_6(x) - (-x+1) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_6 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

7 – $f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{l|l} x^2 + x - 1 & 1 - 2x \\ \hline -\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) & -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ 0 + \frac{3}{2}x - 1 & \\ -\left(+\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) & \\ \hline 0 - \frac{1}{4} & \end{array}$$

نتيجة : $x^2 + x - 1 = (1 - 2x)\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}$

منه : $\frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1/4}{1 - 2x}$

أي : $f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1 - 2x}$

إذن : $\lim_{x\to\infty} f_7(x) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/4}{1 - 2x}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ مقارب لمنحنى الدالة f_7 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

8 – $f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 1 & x^2 - 1 \\ \hline x^3 - x & x \\ \hline x + 1 & \end{array}$$

نتيجة : $x^3 + 1 = (x^2 - 1)(x) + (x + 1)$

إذن : $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

منه : $f_8(x) = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

أي : $\lim_{x\to\infty} f_8(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب لمنحنى الدالة f_8 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

التمرين – 6

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x + 3$

1 – أحسب $\lim_{x\to 2} f(x)$ ثم إستنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى $]6{,}99\,;\,7{,}01[$

2 – α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$. في أي مجال يجب إختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha\,;\,7 + \alpha[$ ؟

الحـل – 6

1 – $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$ لأن f كثير حدود مستمر على IR

$6{,}99 < f(x) < 7{,}01$ يكافئ $6{,}99 < 2x + 3 < 7{,}01$

يكافئ $3{,}99 < 2x < 4{,}01$

6 – $\lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x+1)$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

لكن : $-1 \leq \sin x \leq 1$

منه : $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ أو $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x}$ (حسب إشارة x)

بما أن $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} -1/x = 0$ فإن بالحصر $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_6 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

7 – $f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 1 & 1 - 2x \\ \hline -\ x^2 - \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ 0 + \frac{3}{2}x - 1 & \\ -\ +\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} & \\ 0 - \frac{1}{4} & \end{array}$$

نتيجة : $x^2 + x - 1 = \left(1 - 2x\right)\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}$

منه : $\frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1/4}{1 - 2x}$

أي : $f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1 - 2x}$

إذن : $\lim\limits_{x \to \infty} f_7(x) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1/4}{1 - 2x}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ مقارب لمنحنى الدالة f_7 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

8 – $f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 1 & x^2 - 1 \\ \hline x^3 - x & x \\ x + 1 & \end{array}$$

نتيجة : $x^3 + 1 = (x^2 - 1)(x) + (x + 1)$

إذن : $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

منه : $f_8(x) = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

أي : $\lim\limits_{x \to \infty} f_8(x) - x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب لمنحنى الدالة f_8 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

التمرين – 6

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x + 3$

1 – أحسب $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ثم إستنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى $]6,99 ; 7,01[$

2 – α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$. في أي مجال يجب إختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha ; 7 + \alpha[$ ؟

الحل – 6

1 – $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$ لأن f كثير حدود مستمر على IR

$6,99 < f(x) < 7,01$ يكافئ $6,99 < 2x + 3 < 7,01$

يكافئ $3,99 < 2x < 4,01$

يكافئ $1,995 < x < 2,005$

يكافئ $x \in]1,995 ; 2,005[$

2 ـ $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha ; 7 + \alpha[$ هذا يعني أن $7 - \alpha < f(x) < 7 + \alpha$

أي : $7 - \alpha < 2x + 3 < 7 + \alpha$

أي : $7 - \alpha - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 + \alpha - 3$

أي : $4 - \alpha < 2x < 4 + \alpha$

أي : $\frac{4 - \alpha}{2} < x < \frac{4 + \alpha}{2}$

منه : $x \in \left]\frac{4 - \alpha}{2} ; \frac{4 + \alpha}{2}\right[$ و هو المجال المطلوب .

التمرين ـ 7

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$

1 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

2 ـ أوجد مجالا I يشمل 4 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in]2,99 ; 3,10[$

الحـل ـ 7

1 ـ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \frac{4 + 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$ (f معرفة عند 4)

2 ـ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$ إذن : x يقترب بالقدر الكافي من 4 كما يلي :

$2,99 < f(x) < 3,10$ يكافئ $2,99 < \frac{x + 2}{x - 2} < 3,10$

يكافئ $2,99(x - 2) < x + 2 < (x - 2)\,3,10$ لأن $x - 2 > 0$.

يكافئ $2,99\,x - 5,98 < x + 2 < 3,10\,x - 6,20$

يكافئ $\begin{cases} x + 2 < 3,10\,x - 6,20 \\ x + 2 > 2,99\,x - 5,98 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 8,20 < 2,10\,x \\ 7,98 > 1,99\,x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x > \frac{8,20}{2,10} \\ x < \frac{7,98}{1,99} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x > 3,904 \\ x < 4,01 \end{cases}$

يكافئ $x \in]3,904 ; 4,01[$ و هو المجال المطلوب .

التمرين ـ 8

1 ـ أدرس النهايات عند $+\infty$ ، $-\infty$ و عند 1 للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$

2 ـ حدد المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f

الحـل ـ 8

1 ـ f معرفة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$ (نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$)

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{2(1) + 5}{x - 1} = \lim\limits_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{7}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $x - 1 \overset{<}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2(1) + 5}{x - 1} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{7}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $x - 1 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

2 – $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f على يسار 1

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f على يمين 1

التمرين – 9

فيما يلي عين مجموعة تعريف كل دالة ثم أدرس النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

1 – $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x - 2}$ 3 – $h(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^2}$

2 – $g(x) = \frac{-4x + 1}{3 - x}$ 4 – $\ell(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)(4 - x)}$

الحل – 9

1 – f معرفة على المجال $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2(2)^2 + 5}{x - 2} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{13}{y} = -\infty$$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $x - 2 \overset{<}{\to} 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{2(2) + 5}{x - 2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{13}{y} = +\infty$$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $x - 2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

2 – g معرفة على المجال $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \frac{-4(3) + 1}{3 - x} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{-11}{y} = -\infty$$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 3$ فإن $3 - x \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to}} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{-4(3) + 1}{3 - x} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-11}{y} = +\infty$$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 3$ فإن $3 - x \overset{<}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

3 – h معرفة على المجال $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2 + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{y} = +\infty$$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $(x - 2)^2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{2 + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{y} = +\infty$$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $(x - 2)^2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

4 ـ ℓ معرفة على المجال $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$

ميز بين الحالات التالية :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{<}{\to} 0$

لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{>}{\to} 0$

لما $x \overset{<}{\to} 4$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{>}{\to} 0$

لما $x \overset{>}{\to} 4$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{<}{\to} 0$

منه النتائج التالية :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \ell(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \ell(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} \ell(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} \ell(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

التمرين ـ 10

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

1 ـ $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$ 3 ـ $h(x) = (1-x)(2-\sqrt{-x})$

2 ـ $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ 4 ـ $\ell(x) = \dfrac{2}{x} - \cos x$

الحــل ـ 10

1 ـ f معرفة من أجل : $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

منه : $D_f = [0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} + 2 = -\infty$$
لأن لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $x-1 \overset{<}{\to} 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} + 2 = +\infty$$
لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $x-1 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$$
لأن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$

2 ـ g معرفة من أجل : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

منه : $D_g = [0\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$
لأن لما $x \overset{<}{\to} 4$ فإن $(\sqrt{x}-2) \overset{<}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \dfrac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{5}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 4$ فإن $(\sqrt{x}-2) \overset{>}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ لأن لما $x \to +\infty$ فإن $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$

3 – h معرفة من أجل : $-x \geq 0$ أي : $x \leq 0$

منه : $D_h =]-\infty ; 0]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)(2-\sqrt{-x}) = -\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 1-x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2-\sqrt{-x} = -\infty \end{array}\right\}$

4 – ℓ معرفة من أجل : $x \neq 0$ إذن : $D_\ell =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} - \cos x = \lim\limits_{x \to -\infty} - \cos x$ (غير معرفة) لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \ell(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{2}{x} - \cos(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ell(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{2}{x} - \cos(0) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \cos x = \lim\limits_{x \to +\infty} - \cos x$ (غير معرفة)

التمرين – 11

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

1 – $f(x) = \sin 2x + x$ 　　 **3 – $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$**

2 – $g(x) = \sqrt{x} - 1 - 2x$ 　　 **4 – $\ell(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$**

الحل – 11

1 – f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$ لأنها مجموع دالتين معرفتين على IR .

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ لأن $-1 \leq \sin 2x \leq +1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ لأن $-1 \leq \sin 2x \leq 1$

2 – g معرفة من أجل $x \geq 0$ إذن $D_g = [0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} - 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

3 – h معرفة من أجل $\left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array}\right\}$ أي : $x \geq 1$

منه $D_h = [1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \times \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ (خاصية الضرب في المرافق)

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$= 0$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = +\infty$

4 ــ ℓ معرفة من أجل $x^2 - x + 1 \geq 0$

لندرس إشارة كثير الحدود $x^2 - x + 1$ كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x^2 - x + 1$	$+$

إذن : $\Delta = 1 - 4 < 0$

منه : من أجل كل x من IR فإن $x^2 - x + 1 > 0$ إذن : $D_\ell =]-\infty \,; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x = +\infty$ لأن $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{array} \right.$

$$\lim_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$ الضرب في المرافق

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$= \frac{-1}{1+1}$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$= -1/2$

التمرين ــ 12

أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} \sqrt{\dfrac{3x + 4}{x - 3}}$ $\qquad$ 3 ــ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$

2 ــ $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{\dfrac{3 - 6x}{1 - x}}$ $\qquad$ 4 ــ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3}$

الحل ــ 12

1 ــ $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} \sqrt{\dfrac{3x+4}{x-3}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} \sqrt{\dfrac{3(3)+4}{x-3}} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\dfrac{13}{y}} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 3$ فإن $(x - 3) \overset{>}{\to} 0$

2 ــ $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{\dfrac{3-6x}{1-x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{\dfrac{3-6(1)}{1-x}} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \sqrt{\dfrac{-3}{y}} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $(1 - x) \overset{<}{\to} 0$

3 ــ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$

4 ــ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to -\infty} -x^3 + x - 3 = +\infty$

التمرين ــ 13

f دالة معرفة بــ $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف :

الحــل ــ 13

f معرفة من أجل $4 - x^2 > 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن : $D_f =]-2\,;2[$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} -2} \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$$ لأن لما $x \underset{>}{\to} -2$ فإن $4-x^2 \underset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$$ لأن لما $x \underset{<}{\to} 2$ فإن $4-x^2 \underset{>}{\to} 0$

التمرين ــ 14

أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right)$

2 ــ $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 1}{2x}\right)$

3 ــ $\lim_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4 ــ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x}$

الحــل ــ 14

1 ــ $$\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{x}{x^2}\right)$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{x^2-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \cos(0)$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

$$= 1$$

2 ــ $$\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x}\right)$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x - 1}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x}{2x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \cos(\pi/2)$$

$$= 0$$

3 ــ $$\lim_{x \to -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2} \times -1\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{y}$$ لأن لما $x \to -1$ فإن $(x+1)^2 \underset{>}{\to} 0$

$$= +\infty$$ لأن $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$.

4 ــ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x} = ?$

لنعتبر الدالة f المعرفة على IR بــ $f(x) = \sin x$

f قابلة للإشتقاق على IR و $f'(x) = \cos x$ منه $f'(0) = \cos(0) = 1$

و حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

إذن : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

منه : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x} = \pi$ و هو المطلوب

التمرين — 15

برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > -1$ فإن : $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$

إستنتج نهاية الدالة $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ **عند** $+\infty$

الحـل — 15

لدينا : $x > -1$ إذن : $x + 1 > 0$ أي $\frac{1}{x+1} > 0$

من جهة أخرى لدينا : $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن : بضرب أطراف هذه المتباينة في نفس العدد الموجب $\frac{1}{x+1}$ نحصل على :

$$-1 \times \frac{1}{x+1} \leq \cos x \times \frac{1}{x+1} \leq 1 \times \frac{1}{x+1}$$

أي $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ و هو المطلوب .

نتيجة : بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$ و هو المطلوب .

التمرين — 16

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ فإن $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

هل f تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل — 16

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\cos x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \frac{\cos x}{x} = 3$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

نتيجة :

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$ و $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

فإن حسب مبرهنة الحصر f تقبل نهاية عند $+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

التمرين — 17

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل — 17

من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$

أي : $\frac{-1}{x^2+1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x^2+1}$ لأن $\frac{1}{x^2+1} > 0$

منه : $3 - \frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2+1}$

بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 3$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

فإن حسب مبرهنة الحصر الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

التمرين — 18

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) \leq -2x^3$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل — 18

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$ و $f(x) \leq -2x^3$ من أجل $x > 0$

فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين – 19

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل – 19

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x^4 + x = +\infty$ و $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$ من أجل $x > 0$

فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين – 20

1 – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x يكون $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$

2 – هل الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{3+2\cos x}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل – 20

1 – من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

منه : $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

منه : $3 - 2 \leq 3 + 2\cos x \leq 3 + 2$

منه : $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$ و هو المطلوب

2 – حسب السؤال الأول فإن : $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$

منه : $1/5 \leq \dfrac{1}{3+2\cos x} \leq 1/1$ .... (1)

نضع $\alpha = \dfrac{1}{3+2\cos x}$ إذن : $1/5 \leq \alpha \leq 1$ أي $\alpha > 0$

منه : الدالة f معرفة بـ $f(x) = \alpha(x-1)$

أي $f(x) = \alpha x - \alpha$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha x = +\infty$ لأن $\alpha > 0$

التمرين – 21

1 – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$

2 – هل تقبل الدالة $f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل – 21

1 – من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\sin x \leq 1$

منه : $-3\sin x \geq -3$

منه : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$ و هو المطلوب

2 – بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3 = +\infty$ و $f(x) \geq x^2 - 3$ من أجل $x > 0$ فإن

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين – 22

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 + 2x\sin x$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟ و عند $-\infty$ ؟

الحـل – 22

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x\sin x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(x + 2\sin x)$$

$$= +\infty \quad \text{لأن} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x + 2\sin x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 2x\sin x$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x(x + 2\sin x)$$

$= +\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} x + 2\sin x = -\infty \end{array}\right\}$

لاحظ أن $-2 \le 2\sin x \le 2$ إذن يمكن وضع $\alpha = 2\sin x$ حيث $-2 < \alpha < 2$

منه : $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} x + 2\sin x = \lim_{x \to +\infty} x + \alpha = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} x + 2\sin x = \lim_{x \to -\infty} x + \alpha = -\infty \end{array}\right\}$

التمرين ــ 23

f دالة عددية معرفة على المجال $]-1/2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{2x+1}$

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x > -1/2$: $\dfrac{x-1}{2x+1} < f(x) < \dfrac{x+1}{2x+1}$

2 ــ هل الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحــل ــ 23

1 ــ $x > -1/2$ إذن : $2x > -1$ أي $2x + 1 > 0$ منه $\dfrac{1}{2x+1} > 0$ .... (1)

من جهة أخرى : من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \le \sin x \le 1$

إذن : $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$ .... (2)

بضرب أطراف المتباينة (2) في العدد الموجب $\dfrac{1}{2x+1}$ نحصل على :

$\dfrac{x-1}{2x+1} \le \dfrac{x+\sin x}{2x+1} \le \dfrac{x+1}{2x+1}$ من أجل $x > -1/2$ و هو المطلوب .

أي $\dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x+1}$

2 ــ بما أن $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x+1}$

فإن حسب مبرهنة الحصر : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$

التمرين ــ 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2 ; 4[$ بـ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \in [-2 ; 1[\\ x - 1 & : x \in [1 ; 4[\end{cases}$

1 ــ هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2 ــ هل الدالة f مستمرة على المجال $]-2 ; 4[$ ؟ علل .

3 ــ أذكر مجالا I تكون الدالة f مستمرة عليه .

الحــل ــ 24

1 ــ لما $x \in [-2 ; 1[$ فإن $f(x) = x^2 + x$ إذن : $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x^2 + x = 1^2 + 1 = 2$

لما $x \in [1 ; +\infty[$ فإن $f(x) = x - 1$ إذن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x - 1 = 1 - 1 = 0$

إذن : $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \ne \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ منه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1

2 ــ الدالة f ليست مستمرة على المجال $]-2 ; 4[$ لأن يوجد عنصر و هو 1 من المجال $]-2 ; 4[$ حيث الدالة f ليست مستمرة عند 1 (الدالة لا تقبل نهاية عند 1)

3 ــ على المجال $[2 ; 3]$ الدالة f معرفة بـ $f(x) = x - 1$ و هي دالة كثير حدود .

إذن : فهي مستمرة على IR و خاصة على $[2 ; 3]$ و هو المجال المطلوب (مثلا) .

التمرين — 25

لتكن f دالة معرفة على IR كمايلي : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & : x\le 2\\ x^2+x-5 & : x>2\end{cases}$

1 — أدرس إستمرارية الدالة f عند 2 .

2 — هل الدالة f مستمرة على IR ؟ علل .

الحـل — 25

1 — من أجل $x\in]-\infty;2]$ فإن $f(x)=x^2-2x+1$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} x^2-2x+1$

$=(2)^2-2(2)+1$

$=1$

من أجل $x\in]2;+\infty[$ فإن $f(x)=x^2+x-5$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} x^2+x-5$

$=(2)^2+2-5$

$=1$

بما أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$

من جهة أخرى لدينا الدالة f معرفة عند 2 بالعبارة $f(x)=x^2-2x+1$

منه : $f(2)=(2)^2-2(2)+1=1$

نتيجة : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$ إذن : الدالة f مستمرة عند 2

2 — الدالة f مستمرة على IR لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;2]$ و $]2;+\infty[$ لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

التمرين — 26

أدرس إستمرارية الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & : x\le 1\\ \frac{1}{2}x+1 & : x>1\end{cases}$

الحـل — 26

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} -x^2+x+2=-1+1+2=2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{2}x+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

نتيجة : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)\neq\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ إذن : f ليست مستمرة عند 1

إذن : فهي ليست مستمرة على IR .

و لكن f مستمرة على $]-\infty;1]$ و على المجال $]1;+\infty[$ كل على حدا .

التمرين — 27

f دالة عددية معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} & : x\neq 1\\ f(1)=3\end{cases}$

1 — أدرس إستمرارية f عند 1 .

2 — هل الدالة f مستمرة على IR ؟

الحـل — 27

1 — من أجل $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ فإن $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1\\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+x+1\\ x^2-1 & \\ \underline{x^2-x} & \\ x-1 & \\ \underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

من أجل $x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فإن $f(x) = x^2 + x + 1$

إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

بما أن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 3$ فإن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

نتيجة : بما أن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$ فإن f مستمرة عند 1

2 ــ بما أن f دالة ناطقة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فهي مستمرة على هذا المجال و لكن f مستمرة أيضا عند 1 إذن f مستمرة عند كل عنصر من IR أي f مستمرة على IR .

التمرين ــ 28

أدرس إستمرارية الدالة g المعرفة على $R - \{1\}$ بــ $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

الحـل ــ 28

f دالة ناطقة إذن معرفة و مستمرة على مجال تعريفها أي f مستمرة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = (x^2 - x) \sin x$

لماذا الدالة f مستمرة على IR .

الحـل ــ 29

لنعرف الدالتين u و v كمايلي : $u : R \to R$, $x \mapsto \sin x$; $v : R \to R$, $x \mapsto x^2 - x$

الدالة u معرفة و مستمرة على IR

الدالة v معرفة و مستمرة على IR

إذن جداء الدالتين u و v هو دالة مستمرة على IR أي :

الدالة المعرفة بــ $x \mapsto (x^2 - x) \sin x$ معرفة و مستمرة على IR

و منه f مستمرة على IR .

التمرين ــ 30

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$. أدرس إستمرارية f على IR .

الحـل ــ 30

لدينا f هو جداء الدالتين المستمرتين على IR و المعرفتين بــ : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$

إذن : f هي دالة مستمرة على IR .

التمرين ــ 31

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2 ; 1[$ كما يلي : $f(x) = x(x + E(x))$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة جزء الصحيح للعدد x .

1 ــ عين عبارة f(x) على كل من المجالات التالية : $[-2 ; -1[$ ؛ $[-1 ; 0[$ ؛ $[0 ; 1[$

2 ــ هل الدالة f مستمرة على $[-2 ; -1[$ ؛ $[-2 ; 0[$ ؛ $[-2 ; 1[$

الحـل ــ 31

1 ــ نعلم أن الدالة جزء صحيح معرفة كما يلي :

$$E(x) = \begin{cases} -2 & : x \in [-2 ; -1[\\ -1 & : x \in [-1 ; 0[\\ 0 & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

إذن الدالة f معرفة كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & : x \in [-2 ; -1[\\ x(x-1) & : x \in [-1 ; 0[\\ x(x+0) & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

أي

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-2 ; -1[\\ x^2 - x & : x \in [-1 ; 0[\\ x^2 & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

2 ـ الدالة f معرفة على المجال $]-2\,;-1[$ بـ $f(x)=x^2-2x$ إذن هي دالة كثير حدود

منه f : مستمرة على $]-2\,;-1[$

الدالة f معرفة على المجال $]-2\,;0[$ كمايلي : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & : x\in\,]-2\,;-1[\\ x^2-x & : x\in[-1\,;0[\end{cases}$

إذن : f مستمرة على $]-2\,;-1[$ و f مستمرة على $]-1\,;0[$

لكن هل f مستمرة عند 1 - ؟

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} x^2-2x=(-1)^2-2(-1)=3$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x^2-x=(-1)^2-(-1)=2$

إذن : الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 - إذن : f ليست مستمرة عند 1-

نتيجة : f ليست مستمرة على $]-2\,;0[$ لأن f ليست مستمرة عند -1 .

بما أن الدالة f ليست مستمرة عند 1 - و 1 - عنصر من المجال $]-2\,;1[$ فإن f ليست مستمرة على المجال $]-2\,;1[$

التمرين ـ 32

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة برهن أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-3\,;-2]$

الحـل ـ 32

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3\,;-2]$ بـ $f(x)=x^3-4x$

لدينا : $f(-3)=(-3)^3-4(-3)=-15$ و $f(-2)=(-2)^3-4(-2)=0$

بما أن f مستمرة على المجال $[-3\,;-2]$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3\,;-2]$ من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k\in[f(-3)\,;f(-2)]$ أي $k\in[-15\,;0]$

بما أن $k=-2$ عنصر من المجال $[-15\,;0]$ فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3\,;-2]$

أي المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3\,;-2]$ و هو المطلوب

التمرين ـ 33

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0\,;2]$ بـ $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : 0\le x<1 \\ -2x+3 & : 1\le x\le 2 \end{cases}$

1 ـ هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلول في المجال $[0\,;2]$ ؟

2 ـ تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0\,;2]$

الحـل ـ 33

1 ـ f معرفة على المجال $[0\,;1[$ بـ $f(x)=2x+1$ (كثير حدود) إذن هي مستمرة على $[0\,;1[$

f معرفة على المجال $[1\,;2]$ بـ $f(x)=-2x+3$ (كثير حدود) إذن هي مستمرة على $[1\,;2]$

لكن هل f مستمرة عند 1 ؟

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} 2x+1=2(1)+1=3$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} -2x+3=-2(1)+3=1$

إذن : الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 منه f ليست مستمرة عند 1

نتيجة : f ليست مستمرة عند 1 و 1 عنصر من المجال $[0\,;2]$ إذن f ليست مستمرة على المجال $[0\,;2]$.

إذن : f لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0\,;2]$ و عليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة

2 ـ حل المعادلة $f(x)=0$

لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 & : x\in[0\,;1[\\ \text{أو} & \\ -2x+3=0 & : x\in[1\,;2] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/2 & \text{مرفوض لا ينتمي إلى } [0\,;1[\\ \text{أو} & \\ x=3/2 & \text{مقبول لأن } 3/2\in[1\,;2[\end{cases}$

نتيجة : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 3/2 على المجال $[0\,;2]$

التمرين – 34

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$

1 – أحسب $f(-1)$ ؛ $f(-1/2)$ ؛ $f(0)$ ؛ $f(1)$

2 – إستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $[-1 ; 1]$

الحــل – 34

1 –

$$f(1) = 3(1) - 2(1) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(0) = 0 - 0 - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{-3}{8} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{-3+8-2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 2(-1) - \frac{1}{4} = -3 + 2 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

2 – الدالة f كثير حدود إذن هي مستمرة على IR و خاصة فهي مستمرة على كل من المجالات $[-1 ; -1/2]$ ؛ $[-1/2 ; 0]$ ؛ $[0 ; 1]$ كل على حدا .

و من جهة أخرى : $f(-1) \times f(-1/2) < 0$

و $f(-1/2) \times f(0) < 0$

و $f(0) \times f(1) < 0$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في كل مجال من المجالات $[-1 ; -1/2]$ ؛ $[-1/2 ; 0]$ و $[0 ; 1]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة و عليه فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول على المجال $[-1 ; 1]$

التمرين – 35

f دالة معرفة على المجال $[-3 ; 6]$ بـ : $f(x) = x^3 - 12x$

1 – أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2 – ماهو عدد حلول المعادلة $f(x) = 30$

الحــل – 35

1 – f معرفة و قابلة للإشتقاق على $[-3 ; 6]$ و $f'(x) = 3x^2 - 12$

إشارة $f'(x)$: $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

x	-3		-2		2		6
$3(x^2-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

منه : جدول إشارة $f'(x)$ على المجال $[-3 ; 6]$ كما يلي :

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن جدول تغيرات الدالة f على $[-3 ; 6]$:

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	144

30

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16$$

$$f(6) = (6)^3 - 12(6) = 36(6-2) = 36 \times 4 = 144$$

2 – حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-3 ; 6]$ فإن الدالة f تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد k حيث $2 < k < 6$ لأن من أجل $x \in [2 ; 6]$ فإن $f(x) \in [-16 ; 144]$ و العدد 30 عنصر من المجال $[-16 ; 144]$

منه المعادلة $f(x)= 30$ تقبل حلا وحيدا .

التمرين – 36

بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا

الحــل – 36

لتكن f دالة كثير حدود حيث $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

حيث $a_0 ; a_1 ; \ldots\ldots ; a_{n-1} ; a_n$ معاملات حقيقية و n عدد طبيعي فردي حيث $a_n \neq 0$

نعلم أن f مستمرة على IR لأنها دالة كثير حدود .

و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$

إذن نميز حالتين كما يلي :

	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
$a_n > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n < 0$	$+\infty$	$-\infty$

نتيجة :

إذا كان $a_n < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

إذا كان $a_n > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a_n فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$ و f مستمرة على IR

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيا . و هو المطلوب

التمرين –37

f دالة مستمرة على المجال $]-3 ; +\infty[$ و جدول تغيراتها كما يلي :

x	-3		0		2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

بين أن المنحنى C_f الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما

الحــل – 37

f مستمرة على $]-3 ; +\infty[$ إذن f مستمرة على $]-3 ; 0]$ و مستمرة أيضا على $[0 ; 2]$

من جهة أخرى و حسب جدول التغيرات لدينا :

لما $x \in]-3 ; 0]$ فإن $f(x) \in [-2 ; +\infty[$

لما $x \in [0 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-2 ; 4[$

لكن $0 \in [-2 ; +\infty[$ و $0 \in [-2 ; 4[$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد $x_0 \in]-3 ; 0]$ يحقق $f(x_0) = 0$ و يوجد $x_1 \in [0 ; 2]$ يحقق $f(x_1) = 0$

إذن النقط ذات الإحداثيات $A(x_0 ; 0)$ و $B(x_1 ; 0)$ تنتمي إلى المنحنى C_f و ترتيبها معدوم إذن فهي تنتمي إلى محور الفواصل.

منه C_f يقطع محور الفواصل في نقطتين متمايزتين A و B فواصلهما على الترتيب $-3 \leq x_0 \leq 0$ و $0 \leq x_1 \leq 2$

التمرين – 38

إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على IR كما يلي :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

برر لماذا المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل ثلاثة حلول على الأقل في IR

الحـل ـ 38

المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تكافئ $f(x) = -2$ و حسب جدول تغيرات الدالة f على IR لدينا :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$ (-2)	$\frac{13}{6}$	$\searrow$ (-2)	$-\frac{7}{3}$	$\nearrow$ (-2)	$+\infty$

لما $x \in]-\infty ; -1]$ فإن $f(x) \in]-\infty ; 13/6]$

لما $x \in [-1 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-7/3 ; 13/6]$

لما $x \in [2 ; +\infty[$ فإن $f(x) \in [-7/3 ; +\infty[$

بما أن f مستمرة على IR و العدد 2 - هو عنصر من المجالات $]-\infty ; 13/6]$ ؛ $[-7/3 ; 13/6]$ و $[-7/3 ; +\infty[$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل حلا على الأقل في كل مجال من المجالات $]-\infty ; -1]$ $[-1 ; 2]$ ؛ $[2 ; +\infty[$ أي المعادلة $f(x) = -2$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR منه المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR

التمرين ـ 39

f دالة معرفة على المجال $[-1 ; 2]$ بـ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 ـ أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 ـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $[1 ; 2]$

الحـل ـ 39

1 ـ $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على $[-1 ; 2]$

x	-1		0		1		2
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 = -2 - 3 - 1 = -6$

$f(0) = -1$

$f(1) = 2(1) - 3(1) - 1 = -2$

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لما $x \in [1 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-2 ; 3]$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-2 ; 3]$ و f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1 ; 2]$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

التمرين ـ 40

f دالة معرفة على المجال $[0 ; \pi]$ بـ $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

الحـل ـ 40

لندرس تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$

f قابلة للإشتقاق على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3(-\sin x)(\cos^2 x) - 3(-\sin x)$$
$$= -3\sin x(\cos^2 x - 1)$$
$$= -3\sin x(-\sin^2 x)$$
$$= 3\sin x \times \sin^2 x$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ أي موجب تماما لأن $\sin x$ موجب على المجال $]0 ; \pi[$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow \sqrt{2} \nearrow$	4

$$f(0) = \cos^3(0) - 3\cos(0) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$
$$f(\pi) = \cos^3(\pi) - 3\cos(\pi) + 2 = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 5 = 4$$

نتيجة :
- f مستمرة و متزايدة تماما على $[0 ; \pi]$
- لما $x \in [0 ; \pi]$ فإن $f(x) \in [0 ; 4]$
- العدد $\sqrt{2}$ عنصر من المجال $[0 ; 4]$

إذن المعادلة $f(x) = \sqrt{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0 ; \pi[$ أي يوجد $\alpha \in]0 ; \pi[$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

التمرين – 41

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

1 – أدرس تغيرات الدالة f .

2 – بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على كل من المجالات $[-1 ; 0]$ ؛ $[0 ; 1]$ ؛ $[2 ; 3]$

الحل – 41

1 – f معرفة و قابلة للإشتقاق على IR .

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$$
$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

$$f(0) = -1$$
$$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 1 = -8 + 12 - 1 = 3$$

لنحسب $f(-1)$ و $f(1)$ و $f(3)$ كما يلي :

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$$
$$f(1) = -(1) + 3(1) - 1 = 1$$
$$f(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 - 1 = -1$$

نتائج :

(1)
- f مستمرة على $[-1 ; 0]$
- $f(-1) \times f(0) < 0$
- f متناقصة تماما على $[-1 ; 0]$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[-1 ; 0]$

(2)
- f مستمرة على $[0 ; 1]$
- $f(0) \times f(1) < 0$
- f متزايدة تماما على $[0 ; 1]$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[0 ; 1]$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [2\,;\,3] \\ f(2)\times f(3)<0 \\ f \text{ متناقصة تماما على } [2\,;\,3] \end{array}\right.$$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[2 ; 3]$

التمرين – 42

f دالة معرفة على المجال $[0 ; \pi]$ بـ $f(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0 ; \pi]$ بحيث $f(\alpha) = \alpha$

الحـل – 42

نعرف الدالة g على المجال $[0 ; \pi]$ بـ $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x - x$

لندرس تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; \pi]$:

$$g(0) = 2 + \frac{1}{2}\sin(0) - 0 = 2$$

$$g(\pi) = 2 + \frac{1}{2}\sin(\pi) - \pi = 2 - \pi$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cos x - 1$$

إشارة $g'(x)$:

إذن : $-1 \le \cos x \le 1$ $\qquad -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos x \le \frac{1}{2}$

إذن : $-\frac{1}{2} - 1 \le \frac{1}{2}\cos x - 1 \le \frac{1}{2} - 1$

أي $-3/2 \le g'(x) \le -1/2$

منه : $g'(x) < 0$

إذن : جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; \pi]$:

x	0		π
g'(x)		−	
g(x)	2	↘	$2-\pi$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

$$\left\{\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0\,;\,\pi] \\ g(0)\times g(\pi)<0 \\ g \text{ متناقصة تماما على } [0\,;\,\pi] \end{array}\right.$$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $g(\alpha) = 0$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $2 + \frac{1}{2}\sin\alpha - \alpha = 0$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $2 + \frac{1}{2}\sin\alpha = \alpha$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $f(\alpha) = \alpha$ و هو المطلوب .

التمرين – 43

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2$

1 – بين أن f متناقصة تماما على المجال $D =]0 ; 2[$

لتكن g دالة معرفة على D بـ $g(x) = f(x) - x$

2 – بين أن g متناقصة تماما على D .

3 – أحسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم إستنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

الحـل – 43

1 – f قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; 2[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)$$

إذن : $f'(x)$ من إشارة $\sqrt{x} - \sqrt{2}$

لكن : $0 < x < 2$ إذن : $0 < \sqrt{x} < \sqrt{2}$

منه : $0-\sqrt{2} < \sqrt{x}-\sqrt{2} < \sqrt{2}-\sqrt{2}$

أي : $-\sqrt{2} < \sqrt{x}-\sqrt{2} < 0$

أي : $f'(x) < 0$

إذن : f متناقصة تماما على المجال $]0 ; 2[$

2 ـ لدينا : f متناقصة تماما على D حسب السؤال (1)

و الدالة $x \mapsto -x$ متناقصة تماما على المجال D

إذن : الدالة g متناقصة تماما على المجال D لأنها مجموع دالتين متناقصتين .

3 ـ $$g(0) = (\sqrt{0}-\sqrt{2})^2 - 0 = 2$$

$$g(2) = (\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 - 2 = -2$$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0 ; 2] \\ g(0)\times g(2) < 0 \\ g \text{ متناقصة تماما على }]0 ; 2[\end{array}\right.$

إذن : المعادلة $g(x) = 0$ أي $f(x) - x = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

التمرين ـ 44

نعتبر الدالتين $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g : x \mapsto -x^3$

بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-7/8 < x_0 < -3/4$

الحل ـ 44

إذا وجدت نقطة تقاطع بين (C_f) و (C_g) فإن فاصلتها x تحقق المعادلة $f(x) = g(x)$ أي $f(x) - g(x) = 0$

لنعرف الدالة h كمايلي : $h : x \mapsto f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} + x^3$

لندرس تغيرات الدالة h على IR :

h معرفة على $[-1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

h قابلة للإشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة كما يلي :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3x^2$$

لدينا : من أجل كل x من $]-1 ; +\infty[$ فإن $\left.\begin{array}{l} 3x^2 \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \end{array}\right\}$

إذن : $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + 3x^2 > 0$ أي $h'(x) > 0$

أي h متزايدة تماما على $]-1 ; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة h :

x	-1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$h(-1) = \sqrt{-1+1} + (-1)^3 = -1$$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن لما $x \in [-1 ; +\infty[$ فإن $h(x) \in [-1 ; +\infty[$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-1 ; +\infty[$ و الدالة h مستمرة على المجال $[-1 ; +\infty[$ فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل على المجال $]-1 ; +\infty[$ و بما أن h متزايدة تماما فإن هذا الحل وحيد .

من جهة أخرى :

$$h\left(\frac{-7}{8}\right) = \sqrt{\frac{-7}{8} + 1} + \left(\frac{-7}{8}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{8}} - \left(\frac{7}{8}\right)^3 < 0$$

$h(\frac{-3}{4}) = \sqrt{\frac{-3}{4} + 1} + (\frac{-3}{4})^3 = \frac{1}{2} - \frac{27}{64} = \frac{32-27}{64} = \frac{5}{64}$

إذن $\begin{cases} h \text{ مستمرة على } [-7/8 \,;\, -3/4] \\ h(-7/8) \times h(-3/4) < 0 \end{cases}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على المجال $[-7/8 \,;\, -3/4]$

أي يوجد $\alpha \in [-7/8 \,;\, -3/4]$ حيث $h(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = g(\alpha)$

منه النقطة ذات الفاصلة α مشتركة بين المنحنين (C_f) و (C_g) و هي وحيدة .

التمرين ـــ 45

f دالة عددية معرفة على IR بـ $f(x) = a\,x + b + \frac{c}{x+d}$ حيث $a \,;\, b \,;\, c \,;\, d$ أعداد حقيقية. نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم .

عين الأعداد $a \,;\, b \,;\, c \,;\, d$ التي تحقق الشروط التالية في آن واحد :

- ✓ **المنحنى (C) يشمل النقطة $A(0 \,;\, 4)$**
- ✓ **المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y = 2\,x + 3$**
- ✓ **المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 1$**

الحـل ـــ 45

تكون النقطة $A(0\,;\,4)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذا وفقط إذا كان

$f(0) = 4$ أي : $a(0) + b + \frac{c}{0+d} = 4$

أي : $b + \frac{c}{d} = 4 \,.....\, (1)$ حيث $d \neq 0$

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C) إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ أي $\lim\limits_{x \to 1} x + d = 0$

أي $d = -1$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 2\,x + 3$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ إذا كان $a\,x + b = 2\,x + 3$ من أجل كل x من IR . أي $a = 2$ و $b = 3$

إذن المساواة (1) تصبح : $3 + \frac{c}{-1} = 4$ أي : $3 - c = 4$

أي : $c = -1$

خلاصة : $a = 2 \,;\, b = 3 \,;\, c = -1 \,;\, d = -1$ إذن : $f(x) = 2\,x + 3 - \frac{1}{x-1}$

التمرين ـــ 46

f دالة معرفة على $R - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 6\,x + 3}{(x+1)^2}$

1 ـــ عين الأعداد الحقيقية $a \,;\, b \,;\, c \,;\, d$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) = a\,x + b + \frac{c\,x + d}{(x+1)^2}$

2 ـــ إستنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

3 ـــ حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

الحـل ـــ 46

1 ـــ $f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 6\,x + 3}{(x+1)^2}$ إذن $f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 6\,x + 3}{x^2 + 2\,x + 1}$

لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3\,x^2 + 6\,x + 3 & x^2 + 2\,x + 1 \\ \underline{x^3 + 2\,x^2 + x} & x + 1 \\ \quad x^2 + 5\,x + 3 & \\ \quad \underline{x^2 + 2\,x + 1} & \\ \qquad 3\,x + 2 & \end{array}$$

نتيجة :

$$x^3+3x^2+6x+3=(x+1)(x^2+2x+1)+(3x+2)$$

منه :
$$\frac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=x+1+\frac{3x+2}{x^2+2x+1}$$

أي :
$$f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$ و هو المطلوب .

إذن : $a=1\ ;\ b=1\ ;\ c=3\ ;\ d=2$

2 ـ لدينا :
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2}$$

$=0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

3 ـ لدينا
$$f(x)-(x+1)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

إذن إشارة $f(x)-(x+1)$ من نفس إشارة $3x+2$ لأن $(x+1)^2>0$

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	

خلاصة :

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$f(x)-(x+1)$		$-$	0	$+$	

لما $x\in]-\infty\,;-2/3[$: $f(x)-(x+1)<0$ إذن : (C) تحت (Δ)

لما $x\in\{-2/3\}$: $f(x)-(x+1)=0$ إذن : (C) يقطع (Δ)

لما $x\in]-2/3\,;+\infty[$: $f(x)-(x+1)>0$ إذن : (C) فوق (Δ)

التمرين ـ 47

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ـ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$

2 ـ إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ـ أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4 ـ عين العددان الحقيقيان α و β حيث $\alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\beta=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]$

5 ـ إستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ') عند $-\infty$ - يطلب معادلته .

الحـل ـ 47

1 ـ لنتحقق أن f معرفة على IR :

f معرفة إذا كان $x^2+4x+5\geq 0$

$\Delta=16-20=-4<0$ إذن : من أجل كل $x\in R$ فإن $x^2+4x+5>0$

منه : f معرفة على IR.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+4x+5} - (x-2)\right] \times \frac{\sqrt{x^2+4x+5} + (x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2}$$

$$= 0$$

2 ـ حسب السؤال (1) : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

4 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$ لأن لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن $|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$= -1$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

نتيجة : $\alpha = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \to -\infty} f(x) + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+4x+5} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+4x+5} + x\right] \times \frac{\sqrt{x^2+4x+5} - x}{\sqrt{x^2+4x+5} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} - x}$$

لأن في جوار $-\infty$ $|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} + 1\right)}$$

$= \frac{4}{-2}$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x} = 0$

$= -2$

نتيجة : $\beta = -2$

5 ــ لدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = -2$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x + 2 = 0$

أي : $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-2)] = 0$

منه : المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$

التمرين ــ 48

f و g دالتان معرفتان على الترتيب على IR و IR^+ كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} \quad ، \quad g(x) = \sqrt{x^2+4x}$$

1 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **ثم** $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

2 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$ **و** $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$

ماذا تستنتج بالنسبة للسلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$.

الحــل ــ 48

1 ــ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

2 ــ $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1} - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1} - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \times \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3/4}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x}\right)} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1} + 1} \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}$$

نتيجة :

✓ عند $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0$ إذن منحنى الدالة f عند $+\infty$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x + \frac{1}{2}$ أي في جوار $+\infty$ الدالة f تسلك سلوك دالة تألفية من الشكل $f(x) = x + \frac{1}{2}$

✓ عند $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \neq 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ ليس مقارب لمنحنى الدالة g عند $+\infty$ و للبحث عن سلوك تقاربي للدالة g عند $+\infty$ لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

أي :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

أي : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$

أي : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - (x + 2) = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب لمنحنى الدالة g عند $+\infty$

منه الدالة g تسلك سلوك دالة تألفية من الشكل $g(x) = x + 2$ عند $+\infty$

التمرين ـــ 49

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

نسمي (C) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم .

1 ـــ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2 ـــ أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (Δ)

الحـل ـــ 49

ـــ 1

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= 0$$

نتيجة : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

2 ـــ لندرس إشارة الفرق : $f(x) - (2x + 3)$ على $]0 ; +\infty[$:

$$f(x) - (2x + 3) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x} - x - 2$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

لنبحث عن قيم x من المجال $]0 ; +\infty[$ حتى يكون $f(x) - (2x + 3) \geq 0$

$$f(x) - (2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} \geq (x + 2) \; .... \; (1)$$

بما أن $\sqrt{x^2 + 4x} \geq 0$ و $x + 2 > 0$ لأن $x \in [0 ; +\infty[$

فإن المتباينة (1) تكافئ $\left(\sqrt{x^2 + 4x}\right)^2 \geq (x + 2)^2$

تكافئ $x^2 + 4x \geq x^2 + 4x + 4$

تكافئ $0 \geq 4$ و هذا مستحيل

نتيجة : المتراجحة $f(x) - (2x + 3) \geq 0$ لا تقبل حلول على $]0 ; +\infty[$

إذن : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $f(x) - (2x + 3) < 0$

أي : المنحنى (C) دائما تحت المستقيم (Δ) من أجل $x \in [0 ; +\infty[$

التمرين ـــ 50

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

نسمي (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ـــ عين D مجموعة تعريف الدالة f

2 ـــ أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

3 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]$

4 ـ إستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') . يطلب تعيين معادلتيهما

5 ـ حدد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ')

الحل ـ 50

1 ـ من أجل كل $x \in R$ فإن $|x^2 - 1| \geq 0$

إذن : f معرفة على IR أي $D = R$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 ـ لنكتب $f(x)$ دون القيمة المطلقة :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} & : x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\\ -\frac{1}{2}x + \sqrt{1 - x^2} & : x \in [-1 ; 1] \end{cases}$$

إذن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$ لأن $|x| = x$ في جوار $+\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$ لأن $|x| = -x$ في جوار $-\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= +\infty$$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

3 ـ

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{2}x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$$= 0$$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

$$= 0$$

4 ــ نتائج :

❖ $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right] = 0$ إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{3}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$

❖ $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = 0$ إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

5 ــ لندرس إشارة $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)$ على IR

$$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|} + \frac{3}{2}x$$

$$= \sqrt{|x^2-1|} + x$$

منه : $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} + x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} \geq -x \text{ ...... (1)}$$

إذن : نميز حالتين :

الحالة (1) $x > 0$ إذن المتراجحة (1) دائما محققة

الحالة (2) $x \leq 0$ إذن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2 \geq (-x)^2$

تكافئ $|x^2 - 1| \geq x^2$

تكافئ $\begin{cases} x \leq -1 \text{ و } x^2 - 1 \geq x^2 \\ \text{أو} \\ -1 \leq x \leq 0 \text{ و } 1 - x^2 \geq x^2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x \leq -1 \text{ و } -1 \geq 0 \text{ مستحيل} \\ \text{أو} \\ -1 \leq x \leq 0 \text{ و } 2x^2 \leq 1 \end{cases}$

تكافئ $-1 \leq x \leq 0$ و $x^2 \leq 1/2$

تكافئ $-1 \leq x \leq 0$ و $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

تكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0$

خلاصة : لما $x > 0$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $\frac{-1}{\sqrt{2}} < x \leq 0$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = 0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) < 0$ إذن (C) تحت (Δ)

لندرس إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ على IR

$$f(x) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|} - \frac{1}{2}x$$
$$= \sqrt{|x^2 - 1|} - x$$

إذن : $f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} - x \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} \geq x$ ...... (1)

نميز حالتين :

الحالة (1) $x < 0$ إذن المتراجحة (1) دائما محققة

الحالة (2) $x \geq 0$ إذن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right)^2 \geq x^2$

تكافئ $|x^2 - 1| \geq x^2$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} x \geq 1 \text{ و } x^2 - 1 \geq x^2 \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ و } 1 - x^2 \geq x^2 \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} (\text{مستحيل})\ x \geq 1 \text{ و } -1 \geq 0 \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ و } x^2 \leq 1/2 \end{array}\right\}$

تكافئ $0 \leq x \leq 1$ و $\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

تكافئ $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

خلاصة : لما $x < 0$: $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ إذن المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ')

لما $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ إذن المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ')

لما $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ إذن المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ')

لما $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$ إذن المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ')

التمرين ــ 51

f دالة معرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+1}{x+2}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x^2]$

ليكن (P) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ في نفس المعلم

2 ــ إشرح لماذا المنحنيان (C) و (P) يتقاربان عندما يؤول x إلى $+\infty$

الحـل ــ 51

1 ــ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x^2] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x+2} - x^2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+1-x^2(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2 ــ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x^2] = 0$ فإن كلما إقتربت الفاصلة x من $+\infty$ إقترب العدد f(x) من x^2 أي نقط المنحنى (C) متقاربة من نقط المنحنى (P) و عليه يمكن القول أن المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$

التمرين ــ 52

f دالة معرفة على $]1\,;+\infty[$ بـ $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x-1}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ــ أبحث عن منحنى (P) مقارب لمنحنى (C) عند $+\infty$ ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

2 ــ هل المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$ ؟

الحـل ــ 52

1 ــ بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 - \frac{2}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(3x^2)] = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 - \frac{2}{x-1} - 3x^2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x-1} = 0$$

فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (P) ذو المعادلة $y = 3x^2$ عند $+\infty$

وضعية (P) بالنسبة لـ (C)

لندرس إشارة $f(x) - 3x^2$ على IR :

$$f(x) - 3x^2 = \frac{-2}{x-1} = \frac{2}{1-x}$$

خلاصة : لما $x < 1$: $f(x) - 3x^2 > 0$ إذن : (C) فوق (P)

لما $x > 1$: $f(x) - 3x^2 < 0$ إذن : (C) تحت (P)

2 ـ لدينا f معرفة على المجال $]-\infty ; 1[$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و أيضا $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 3x^2] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{x-1} = 0$

إذن : فعلا المنحنيان (P) و (C) متقاربان أيضا عند $-\infty$.

التمرين ـ 53

f دالة معرفة على المجال R^* بـ $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$ و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب لمنحنى (C) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

الحـل ـ 53

$\lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - \dfrac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ (∞ يعني $+\infty$ أو $-\infty$)

إذن : المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto 1/x$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضعية النسبية : $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+1}$ من إشارة x كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - \dfrac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

خلاصة : لما $x < 0$: $f(x) - \dfrac{1}{x} < 0$ إذن : (C) تحت (P)

لما $x > 0$: $f(x) - \dfrac{1}{x} > 0$ إذن : (C) فوق (P) .

التمرين ـ 54

f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

الحـل ـ 54

بما أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \sqrt{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}$$
$$= 0$$

فإن المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto \sqrt{x}$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

الوضعية النسبية : $f(x) - \sqrt{x} = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

بما أن $x > 0$ فإن $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} > 0$ أي $f(x) - \sqrt{x} > 0$

منه : المنحنى (C) فوق المنحنى (P) من أجل $x > 0$

التمرين ـ 55

f دالة معرفة على المجال $R - \{-1 ; 4\}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x - 4}$

1 ـ أوجد الأعداد الحقيقية a ; b ; c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-1 ; 4\}$

يكون : $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-4}$

2 ـ أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحــل ـ 55

1 ـ
$$a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}=\frac{a(x+1)(x-4)+b(x-4)+c(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$
$$=\frac{a\,x^2-3\,a\,x-4\,a+b\,x-4\,b+c\,x+c}{x^2-3\,x-4}$$
$$=\frac{a\,x^2+(b+c-3\,a)\,x-4\,a-4\,b+c}{x^2-3\,x-4}$$

إذن : يكون $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}$ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{-1\,;4\}$ إذا وفقط

إذا كان : $\left\{\begin{array}{l} a=1\\ b+c-3\,a=2\\ -4\,a-4\,b+c=0\end{array}\right.$ أي $\left.\begin{array}{l} a=1\\ (1)\;.....\;b+c=2+3\\ (2)\;....\;-4\,b+c=4\end{array}\right\}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $b+c-(-4\,b+c)=5-4$

أي : $5\,b=1$

أي : $b=1/5$

منه حسب العلاقة (1) $c=5-b=5-\frac{1}{5}=\frac{24}{5}$

نتيجة : $f(x)=1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$

2 ـ لدينا مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}=1$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}-1} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0} 1+\frac{1/5}{y}+\frac{24/5}{-1-4}$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-1} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{>}{\to}0} 1+\frac{1/5}{y}+\frac{24/5}{-1-4}$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}4} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0} 1+\frac{1/5}{4+1}+\frac{24/5}{y}$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}4} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{>}{\to}0} 1+\frac{1/5}{4+1}+\frac{24/5}{y}$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}=1$$

التمرين ــ56

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

2 ــ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

3 ــ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

4 ــ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3}$

5 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

6 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

7 ــ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

الحـل ــ 56

1 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

إذن :

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = f'(0) = 1/2$$

2 ــ نفس الدالة f المعرفة في (1) قابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق $f'(3)$ هو :

تعريفا :

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3+1}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

إذن :

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = 1/4$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = f'(3) = 1/4$$

3 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 1 و عددها المشتق $f'(1)$ هو كما يلي:

تعريفا :

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

إذن : $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

نتيجة : $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto x\sqrt{x+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق $f'(3)$ هو كما يلي :

تعريفا : $\displaystyle f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 3\sqrt{3+1}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 \times \sqrt{x+1} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

منه : $f'(3) = \dfrac{3(3)+2}{2\sqrt{3+1}} = 11/4$

نتيجة : $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} = f'(3) = 11/4$

5 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sin x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا : $\displaystyle f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \cos x$

إذن : $f'(0) = \cos 0 = 1$

نتيجة : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) = 1$

6 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto 1 - \cos x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا : $\displaystyle f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x) - (1 - \cos 0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

منه :

$$f'(0) = \sin(0) = 0$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = f'(0) = 0$$

7 ـــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \cos x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند $\pi/2$ و عددها المشتق $f'(\pi/2)$ هو كما يلي :

تعريفا :

$$f'(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = -\sin x$$

إذن :

$$f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

التمرين ـــ 57

باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\pi/3$ لكل من الدالتين $f : x \mapsto \sin 3x$; $g : x \mapsto 2\cos x - 1$

أحسب $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$

الحـل ـــ 57

لاحظ أن :

$$\lim_{x \to \pi/3} \sin 3x = \sin\left[3 \times \frac{\pi}{3}\right] = 0$$

و

$$\lim_{x \to \pi/3} 2\cos x - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$$

إذن : $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$ هي حالة عدم التعيين

إذن لنحسب هذه النهاية باستعمال العدد المشتق للدوال f و g عند $\pi/3$ كما يلي :

تعريفا لدينا :

$$f'(\pi/3) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{f(x) - f(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x - \sin 3 \times \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

إذن :

$$f'(\pi/3) = 3\cos 3 \times \frac{\pi}{3} = 3\cos \pi = -3$$

نتيجة (1) :

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = f'(\pi/3) = -3$$

تعريفا لدينا :
$$g'(\pi/3) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{g(x) - g(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{(2\cos x - 1) - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)}{x - \frac{\pi}{3}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الدالة المشتقة :
$$g'(x) = -2\sin x$$

إذن :
$$g'(\pi/3) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

نتيجة (2) :
$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} = g'(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

نرجع الآن إلى السؤال :
$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} \times \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{f'(\pi/3)}{g'(\pi/3)}$$ حسب النتيجة (1) و النتيجة (2)
$$= \frac{-3}{-\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{3}$$ و هو المطلوب .

ملاحظة هامة : الدالتين f و g قابلتان للإشتقاق عند $\pi/3$ لذلك هذه النتيجة صحيحة و إلا فلا يمكن حساب النهاية بهذه الطريقة

<u>التمرين ــ 58</u>

أثبت أن
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = 2\sqrt{2}$$

<u>الحـل ــ 58</u>

لأن $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

لأن لما $x \overset{>}{\to} 0$: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos^2 x}\,.\cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}\,.\cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos x}\,.\sqrt{1 + \cos x}\,.\cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 2\sqrt{1 + \cos x}\,.\cos x$$

$$= 2\sqrt{1+\cos 0}\ .\ \cos 0$$

$$= 2\sqrt{2}$$ و هو المطلوب

التمرين – 59

أحسب النهايات التالية :

1 – $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 4 – $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x + 1}\right)$

2 – $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi}$ 5 – $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$

3 – $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1 + x}\right)$

الحـل – 59

1 – $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \cos y = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2 – $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to \pi} x - \pi = 0$

3 – $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1 + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin \pi = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x + 3}{1 + x} = \pi$

4 – $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x + 1}{2x + 1} = \frac{\pi}{2}$

5 – $$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\tan x}{\tan x\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)}$$

$$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{1}{\tan x + \frac{1}{\tan x}}$$

$$= \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y + \frac{1}{y}}$$ لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \tan x = +\infty$

$$= \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y}$$ لأن $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$

$$= 0$$

التمرين – 60

أحسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ علما أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

الحـل – 60

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \times \frac{3}{3}$$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

التمرين –61

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1 – بين أن إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

2 – إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

الحل – 61

1 – لدينا $x > 1$ إذن : $x + x > 1 + x$ (نضيف x إلى الطرفين)

أي : $2x > x + 1$

منه : $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$

أي : $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

أو : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ و هو المطلوب

2 – لدينا $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ من أجل $x > 1$

بضرب هذه المتباينة في العدد الموجب $2x$ نحصل على :

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ من أجل $x > 1$ أي $x >> 0$

أي $f(x) > \sqrt{2x}$ من أجل $x > 1$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} f(x) > \sqrt{2x} \text{ لما } x > 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التمرين – 62

1 – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$

2 – إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2}$

الحل – 62

1 – من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ .... (1)

و : $-1 \leq \cos x \leq 1$ .... (2)

إذن : $-1 - 1 \leq \sin x + \cos x \leq 1 + 1$

أي : $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$ .... (3)

2 – من أجل x يؤول إلى $+\infty$ فإن $\frac{1}{x^2} > 0$ إذن : نضرب أطراف المتباينة (3) في $\frac{1}{x^2}$ فنحصل على

$$\frac{-2}{x^2} \leq \frac{\sin x + \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2} = 0$

التمرين – 63

1 – بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $1/2 \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 – إستنتج النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

الحل – 63

–1

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x - 1}{2(x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{2(x+1)}$$

بما أن $x \geq 1$ فإن $\left.\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+1>0 \end{array}\right\}$

منه : $\frac{x-1}{2(x+1)} \geq 0$ أي $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ أي $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ .... (1)

من جهة أخرى : $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x-x-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$

بما أن $x \geq 1$ فإن $x+1>0$ أي $\frac{-1}{x+1} < 0$ أي $\frac{x}{x+1} < 1$ .....(2)

من (1) و (2) فإن $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 ـ لدينا $1 \leq \frac{x}{x+1} < 1$ ... إذن : $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$ إذن : $\frac{1}{2}\sqrt{x} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x}$ من أجل $x>0$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x} = +\infty$ إذن : حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty$

أيضا $1 \leq \frac{x}{x+1} < 1$ ... إذن : $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$ إذن : $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ من أجل $x>0$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ إذن : حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$

التمرين ـ 64

أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 في كل حالة ممايلي :

1 ـ
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

2 ـ
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل ـ 64

1 ـ
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1}$$
$$= 0$$

بما أن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$

فإن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

أي الدالة f مستمرة عند 0 .

2 –
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|}$$

نميز حالتين :

الأولى :
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x}\sqrt{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$$

الثانية :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x}{x}\sqrt{-x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -\sqrt{-x} = 0$$

منه :
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

لكن
$$f(0) = 2$$

أي
$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

منه : الدالة f ليست مستمرة عند 0 .

التمرين – 65

f دالة معرفة على IR بـ
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0 .

الحـل – 65

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} \times \frac{x + 2 + \sqrt{4 + x^2}}{x + 2 + \sqrt{4 + x^2}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^2 - (4 + x^2)}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x + 4 - 4 - x^2}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{4}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}}$$
$$= \frac{4}{0 + 2 + \sqrt{0 + 4}}$$
$$= 1$$

نتيجة : تكون f مستمرة عند 0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ أي $1 = f(0)$

منه : $\alpha = 1$ و هو المطلوب .

التمرين – 66

f دالة معرفة على IR بـ
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - a & : x > 2 \\ \dfrac{2x^2 - a + b}{x} & : x \leq 2 \end{cases}$$

عين علاقة بين العددان الحقيقيان a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

الحـل – 66

لدينا
$$f(2) = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$$

و
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2x^2 - a + b}{x} = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$$

و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} x^2 + 2x - a = (2)^2 + 2(2) - a = 8 - a$

نتيجة : تكون f مستمرة عند 2 إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = f(2)$

أي : $\dfrac{8 - a + b}{2} = 8 - a$

أي : $8 - a + b = 16 - 2a$

أي : $2a - a + b = 16 - 8$

أي : $a + b = 8$ و هي العلاقة المطلوبة .

التمرين ــ 67

f دالة مستمرة على المجال $[0 ; 1]$ حيث من أجل كل x من $[0 ; 1]$ فإن $f(x) \in [0 ; 1]$
بين أن يوجد على الأقل عدد حقيقي α من $[0 ; 1]$ حيث $f(\alpha) = \alpha$

الحــل ــ 67

لنعتبر الدالة g على المجال $[0 ; 1]$ حيث $g(x) = f(x) - x$

لدينا g هي مجموع دالتين مستمرتين على $[0 ; 1]$ هما : $f : x \mapsto f(x)$ و $x \mapsto -x$

إذن : g هي دالة مستمرة على $[0 ; 1]$

من جهة أخرى : $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$

و $g(1) = f(1) - 1$

بما أن $f(x) \in [0 ; 1]$ من أجل $x \in [0 ; 1]$ فإن $\begin{cases} 0 \le f(0) \le 1 \\ 0 \le f(1) \le 1 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(1) - 1 \le 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} g(0) \ge 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases}$

خلاصة : $\begin{cases} g \text{ مستمرة على } [0 ; 1] \\ g(0) \times g(1) \le 0 \end{cases}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل α من $[0 ; 1]$

حيث $g(\alpha) = 0$

أي $f(\alpha) - \alpha = 0$

أي $f(\alpha) = \alpha$ و هو المطلوب

التمرين ــ 68

f دالة معرفة على المجال $[-\pi ; 0]$ بـ $f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$

1 ــ تحقق أن f تقبل الإشتقاق على المجال $[-\pi ; 0]$ ثم أحسب دالتها المشتقة .

2 ــ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi ; 0]$

3 ــ ماذا تستنتج بالنسبة لحلول المعادلة $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} x$ على المجال $[-\pi ; 0]$

الحــل ــ 68

1 ــ f هي مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $[-\pi ; 0]$ و هما : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$

إذن : f قابلة للإشتقاق على $[-\pi ; 0]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 ــ إشارة $f'(x)$ على $[-\pi ; 0]$

$$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$$

$\Leftrightarrow \sin x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و هذا محقق دائما من أجل $x \in [-\pi ; 0]$ لأن $\sin x \le 0$

إذن : f متزايدة على المجال $[-\pi ; 0]$

جدول التغيرات :

x	$-\pi$		0
$f(x)$	$-1-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1

$$f(-\pi) = \cos(-\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\pi) = -1 - \pi\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = \cos(0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0) = 1$$

3 ـــ حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi\,;0]$ لدينا مايلي :

f مستمرة على $[-\pi\,;0]$
f متزايدة تماما على $[-\pi\,;0]$
$f(-\pi)\times f(0) < 0$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi\,;0]$

أي : المعادلة $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi\,;0]$

أي : المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi\,;0]$ و هو المطلوب .

التمرين ـــ 69

n عدد طبيعي غير معدوم

1 ـــ بين أن المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2 ـــ هل المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل حلا على IR ؟ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل .

الحـل ـــ 69

1 ـــ نعرف الدالة f على IR بـ $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ حيث $n \in N^*$.

لاحظ أن من أجل $n \in N^*$ فإن $2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2-2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} > 0$

إذن : $2 > \frac{2n}{n+1}$

لندرس الأن تغيرات الدالة f على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$

f كثير حدود إذن قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (n+1)x^n - 2n\,x^{n-1}$$
$$= x^{n-1}\left[(n+1)x - 2n\right]$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$ حيث $n \in N^*$:

بما أن $x > 0$ فإن $x^{n-1} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(n+1)x - 2n$ كما يلي :

x	$-\infty$		$\frac{2n}{n+1}$		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		

إذن على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$ فإن $f'(x) > 0$ أي f متزايدة .

ليكن $n > 1$:

منه جدول تغيرات الدالة f على $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$ كما يلي :

x	1		$\frac{2n}{n+1}$		2
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	1

لاحظ أن $f(1) = (1)^{n+1} - 2(1)^n + 1 = 0$

$f(2) = (2)^{n+1} - 2(2)^n + 1 = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 1$

إذن : بما أن f متناقصة على $\left[1\ ;\ \frac{2n}{n+1}\right]$ فإن $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < f(1)$

أي : $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

خلاصة : $\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } \left[\frac{2n}{n+1}\ ;\ 2\right] \\ f\left(\frac{2n}{n+1}\right) \times f(2) < 0 \end{array}\right.$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

أي المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\ ;\ 2\right]$ من أجل $n > 1$

من أجل $n = 1$ فإن $f(x) = x^2 - 2x + 1$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا مضاعفا هو $x = 1$

2 ـــ لاحظ أن المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تكتب من الشكل :

$x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$

إذن : هي معادلة السؤال (1) من أجل $n = 7$

و عليه فالمعادلة $x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل على الأقل حلين أحدهما يساوي 1 و الأخر محصور بين $\frac{2(7)}{7+1}$ و 2

أي محصور بين 7/4 و 2

التمرين ـــ70

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ و ليكن (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J})$ حيث $OI = 2\ cm$ و $OJ = 1\ cm$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ـــ عين الأعداد الحقيقية $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d$ حيث : من أجل كل $x \in R - \{1\}$:

$$f(x) = a\,x + b + \frac{c\,x + d}{(x-1)^2}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$

3 ـــ أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (d) و لتكن A نقطة تقاطعهما .

4 ـــ أرسم كل من (C) و (d)

5 ـــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty\ ;\ 1[$.

6 ـــ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي .

7 ـــ ناقش تحليليا (دون إستعمال البيان) عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

الحـل ـــ 70

1 ـــ التغيرات : f معرفة على $]-\infty\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1 - 4 + 8 - 4}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (x-1)^2 = 0^+$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1 - 4 + 8 - 4}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$ لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-1)^2 = 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)[3x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$$ من إشارة $x^2(x-1)(x-3)$

إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		+	0	+	‖	+		+	
$x-1$		−		−	‖	+		+	
$x-3$		−		−	‖	−	0	+	
الجداء		+	0	+	‖	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

$$f(3) = \frac{27 - 36 + 24 - 4}{4} = \frac{27 - 36 + 20}{4} = \frac{47 - 36}{4} = \frac{11}{4}$$

2 ـ تعيين الأعداد a ; b ; c ; d :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

لنجري القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - 2x^2 + x & x - 2 \\ \hline -2x^2 + 7x - 4 & \\ -2x^2 + 4x - 2 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

نتيجة : $$\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x - 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

أي : $$f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

منه : $a = 1$; $b = -2$; $c = 3$; $d = -2$

بما أن $$\lim_{x \to \infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \to \infty} \left[x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} - (x-2)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^2}$$
$$= 0$$

فإن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$

3 ـــ وضعية (C) بالنسبة لـــ (d) :

$$f(x) - (x - 2) = \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

إذن : إشارة $f(x) - (x - 2)$ هي إشارة $3x - 2$ لأن المقام موجب .

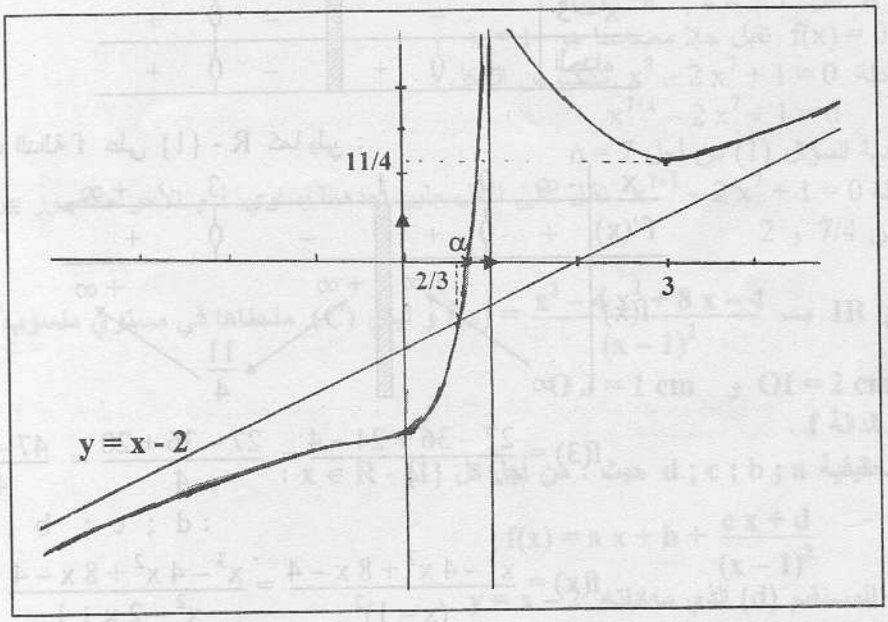
x	$-\infty$		$2/3$		1		$+\infty$
$3x - 2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

خلاصة :

لما $x \in]-\infty ; 2/3[$: $f(x) - (x - 2) < 0$ إذن (C) تحت (d)

لما $x = 2/3$: $f(x) - (x - 2) = 0$ إذن (C) يقطع (d)

لما $x \in]2/3 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x) - (x - 2) > 0$ إذن (C) فوق (d)



ملاحظة : النقطة ذات الإحداثيات (0 ; 4 -) هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) (تنعدم المشتقة الأولى و لا تغير إشارتها)

5ـــ حسب منحنى الدالة f على المجال $]-\infty ; 1[$ فإن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2/3 < \alpha < 1$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty ; 1[$

6 ـــ ليكن (Δ_m) المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

لاحظ أن ميل المستقيم (Δ_m) ثابت يساوي 1

إذن لما الوسيط m يتغير فإن المستقيم (Δ_m) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ أي المستقيم المقارب منه المناقشة التالية:

(1) لما $m = -2$: (Δ_m) ينطبق على (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطة واحدة فاصلتها 2/3 إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا هو 2/3

(2) لما $m < -2$: (Δ_m) يمكن أن يكون مماس لـــ المنحنى (C) إذن لنبحث عن معادلة المماس ذات الميل الذي يساوي 1

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-3) = (x-1)^3$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$$
$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1/3$$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/3 هي : $y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

لنحسب $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$
$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{47}{12}$$

إذن معادلة المماس هي : $y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$

أي : $y = x + \frac{-4 - 47}{12}$

أي : $y = x - \frac{51}{12}$

أي : $y = x - \frac{17}{4}$

إذن : لما $m = -17/4$: (Δ_m) مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $m < -17/4$: (Δ_m) تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما $-17/4 < m < -2$: (Δ_m) فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما $m > -2$: (Δ_m) يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين مختلفين

7 ــ حل المعادلة $f(x) = x + m$ في $R - \{1\}$

$$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m \quad \text{حيث } x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$$
$$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0 \ \ldots\ldots (1)$$

المناقشة :

لما $m = -2$ المعادلة تكافئ : $-(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$

أي : $-3x + 2 = 0$

أي : $x = 2/3$

إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا $x = 2/3$

لما $m \neq -2$ المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط m و المجهول x

$$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$$
$$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$$
$$= 49 + 28m + 4m^2 - 24m - 4m^2 - 32$$
$$= 4m + 17$$

منه

x	$-\infty$		$-17/4$		-2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	

إذن : لما $\Delta < 0$: $m \in]-\infty ; -17/4[$ إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR

لما $\Delta = 0$: $m = -17/4$ إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .

لما $\Delta > 0$: $m \in]-17/4 ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

التمرين ــ 71

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أكتب f(x) دون رمز القيمة المطلقة .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ــ بين أن المستقيمان $(\Delta) : y = x + 1$ و $(\Delta') : y = -x - 1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

4 ــ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') .

5 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1 ; 1[$

الحـل ــ 71

1 ــ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 ; +\infty[\\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

2 ــ **التغيرات :**

f معرفة على $R - \{-1 ; 1\}$ أي $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} -1} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} -(-1) - 1 + \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} -1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \underset{<}{\to} 0} -1 + 1 + \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \underset{<}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ -1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ -\left(1 + \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

على المجال $]-\infty ; -1[$: لدينا $f'(x) = -\left(1 + \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ إذن : $f'(x) < 0$

لأن $1 + \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} > 0$

على المجال $]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = 1 - \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ لندرس إشارتها

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq (x^2-1)^2$$ لأن $1 + x^2 > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) \geq 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+		+		+	0	+		+	
x^2-3		+	0	−		−		−	0	+	
الجداء		+	0	−		−	0	−	0	+	

إذن على المجال $]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا :

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	‖	−	0	+	

خلاصة : إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

3 –

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (-x-1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (x+1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 ــ وضعية (Δ) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') :

على المجال $]-1 ; +\infty[$: $f(x) - (x+1) = \dfrac{x}{x^2-1}$

x	-1		0		1	+∞
x	‖	−	0	+	‖	+
$x^2 - 1$	‖		−		‖	+
$\dfrac{x}{x^2-1}$	‖	+	0	−	‖	+

لما $x \in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x) - (x+1) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = 0$: $f(x) - (x+1) = 0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x \in]0 ; 1[$: $f(x) - (x+1) < 0$ إذن (C) تحت (Δ)

على المجال $]-\infty ; -1[$ $f(x) - (-x-1) = \dfrac{x}{x^2-1}$

x	-∞	-1
x	−	‖
$x^2 - 1$	+	‖
$\dfrac{x}{x^2-1}$	−	‖

لما $x \in]-\infty ; -1[$: $f(x) - (-x-1) < 0$ إذن (C) تحت (Δ')

5 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

f مستمرة على $]-1 ; 1[$

f متناقصة تماما على $]-1 ; 1[$

f تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1 ; 1[$ حيث $f(\alpha) = 0$