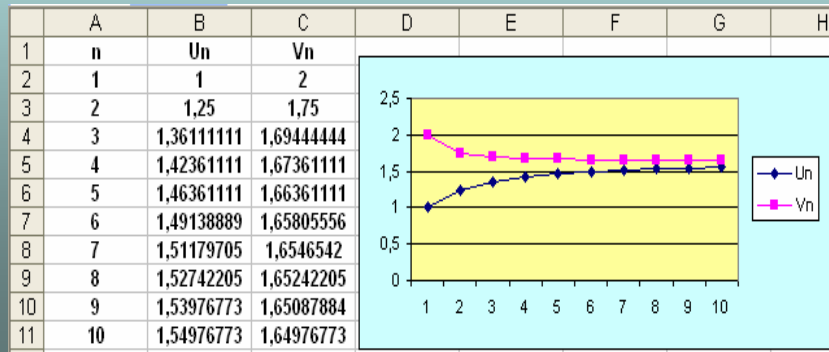


المتتاليات العددية 01

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.
- إثبات خاصية بالتراجع.
- دراسة سلوك ونهاية متتالية.
- معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية. أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي π . في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي **ليونارد فيبو ناتشي** المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ مع $u_0 = 1$ و $u_1 = 1$ ، و التي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات . المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى . في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .



نشاط أول

في القديم كان اليونان يتعاملون جيدا مع المربع التام لعدد طبيعي و وصلوا إلى النتيجة التالية:
كلما جمعنا أعدادا فردية متتابة و بالتتابع نحصل على مربع تام لعدد طبيعي .

و هكذا : 1 مربع العدد 1 ، $1+3=4$ و 4 مربع العدد 2 ، $1+3+5=9$ و 9 مربع العدد 3 ، ...

	A	B
1	العدد الفدي n	مجموع الأعداد الفردية المتتابة
2	1	
3	3	4
4	5	9
5	7	16
6	9	25
7	11	36
8	13	49
9	15	64
10	17	81
11	19	100
12	21	121
13	23	144
14		
15		

(1) أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

في العمود A و ابتداء من الخلية A2 أحجز الأعداد الفردية من 1 إلى 99 .

في الخلية B3 أحجز $= A2 + A3$

في الخلية B4 أحجز $= B3 + A4$

(2) أحسب $1+3+5+7+9+...+53+55$

(3) أحسب $1+3+5+7+9+...+85+87$

(4) خمن حساب $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n .

(5) بفرض التخمين السابق صحيحا أثبت أن :

$$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$$

نقول أن الخاصية وراثية .

نشاط ثان

A. نقترح مؤسسة عمومية عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ DA 15000 في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـ 15% نسبي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

(1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 و u_7 .

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(3) عين u_n بدلالة n .

(4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب DA 25000 ؟

B. نقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ DA 15000 في الشهر الأول و زيادة

في المرتب الشهري تقدر بـ DA 1500 بعد كل سنة نسبي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرمز بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

(1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7 .

(2) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(3) عين v_n بدلالة n .

(4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب DA 25000 ؟

نشاط ثالث

A. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{x+6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -6 . فسر بيانها النتيجة.
3. أحسب نهاية f عند $+\infty$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f .
5. أنجز جدول تغيرات الدالة f .
6. عين تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
7. أرسم (Δ) و (C_f) .

B. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = -5 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$$

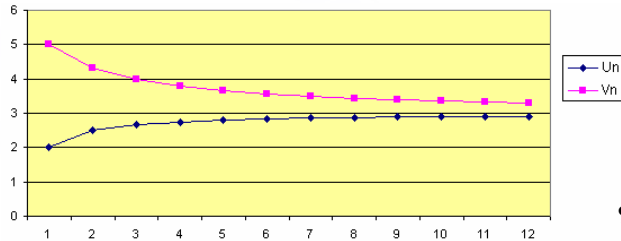
1. تحقق أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. باستعمال حاسبة بيانية عين u_1, u_2, u_3 و u_4 .
3. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4 .
4. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
5. باستعمال الحاسبة البيانية خمن من أي عدد يقترب u_n أكثر فأكثر لما يصبح n كبيرا جدا.
6. إذا فرضنا أن تخمينك السابق صحيح أثبت صحة التخمين الذي وضعته في السؤال 4.

نشاط رابع

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{3n+10}{n+2}$.

1. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.
2. أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة.
3. عين نهاية المتتالية $u_n - v_n$.
4. الرسم المقابل يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين (u_n) و (v_n) باستعمال مجلد اكسال. ماذا تلاحظ حول نهاية (u_n) و حول نهاية (v_n) ؟



١- تذكير حول المتتاليات العددية .

1. تعريف .

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

2. اتجاه تغير متتالية عددية.

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) .

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) .

متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب) .

3. المتتاليات الحسابية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{و} \quad S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

4. المتتاليات الهندسية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{و} \quad S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) \quad \text{مع } q \neq 1 \quad \text{و إذا كان } q = 1 \quad \text{فإن } S = (n+1)u_0$$

نهاية متتالية هندسية.

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة) .

تمرين محلول 1: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول.

• أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) . استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل: • الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 5(0) - 1 - 3 = -1$ ،

لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n - 1$ ، إذن : $v_n = -5n - 1$

• $v_{n+1} - v_n = -5$: إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ و حددها الأول $v_0 = -1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -1 - 5n$. $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2}(-2 - 5n)$.

$u_n = S + u_0$ نجد بالجمع طرف بطرف نجد $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ ، ... ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، $v_0 = u_1 - u_0$

و منه $u_n = \frac{n}{2}(-2 - 5n) + 3$

تمرين محلول 2: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول.

• أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) .

• ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

• أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S . استنتج نهاية (u_n) .

الحل:

• $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$

$v_0 = -1$ و حددها الأول $q = \frac{1}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حددها الأول $v_0 = -1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

• $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

• $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}$. $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• $-1 < \frac{1}{3} < 1$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = -\frac{3}{2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

١- الاستدلال بالتراجع.

1. مبدأ الاستدلال بالتراجع.

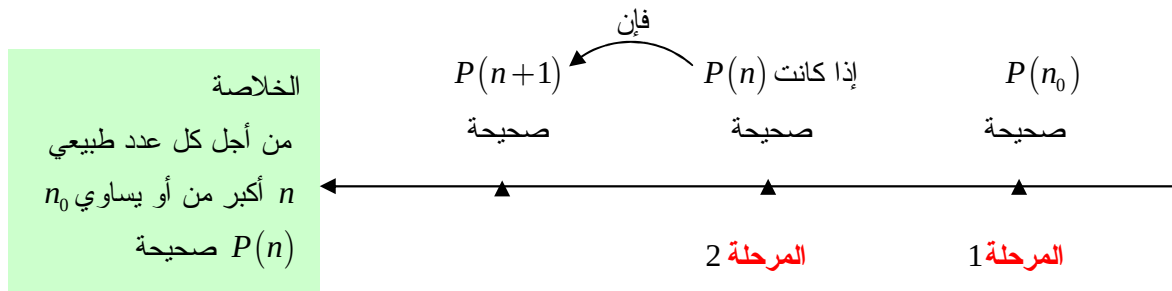
مسألة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n .

n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

- ملاحظات:** • عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .
- نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n+1$.
- التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري لأنه يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة، مثلاً : الخاصية " 3^n يقبل القسمة على 5 " خاصية خاطئة بالرغم من أنها وراثية .



2. متى يستعمل الاستدلال بالتراجع.

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية.

مثال: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .

الحل: الخاصية " $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ ، و 3 مضاعف للعدد 3 .

المرحلة 2 : نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n . أي: $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .

و نضع $4^n + 2 = 3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $4^n = 3k - 2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $4^{n+1} + 2$ مضاعف للعدد 3 .

$$4^{n+1} + 2 = 4^n \times 4 + 2 = (3k - 2) \times 4 + 2$$

$$4^{n+1} + 2 = 12k - 8 + 2 = 3(4k - 2)$$

و $3(4k - 2)$ مضاعف للعدد 3 و منه $4^{n+1} + 2$ مضاعف للعدد 3 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول 1: أثبت باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 :

$$3^n \geq 100n$$

	A	B	C	D
1	n	3^n	$100n$	
2	0	1	0	
3	1	3	100	
4	2	9	200	
5	3	27	300	
6	4	81	400	
7	5	243	500	
8	6	729	600	
9	7	2187	700	
10	8	6561	800	
11	9	19683	900	
12	10	59049	1000	

الحل: نسمي $P(n)$ الخاصية " $3^n \geq 100n$ "

المرحلة 1: نتأكد من صحة $P(6)$

$$\text{من أجل } n = 6, 3^6 = 729 \text{ و } 6 \times 100 = 600$$

و منه $3^6 \geq 6 \times 100$ وبالتالي $P(6)$ صحيحة .

المرحلة 2 : نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد

طبيعي n كافي أكبر من أو يساوي 6 أي $3^n \geq 100n$ (فرضية التراجع) .

ونبرهن أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

$$\text{أي } 3^{n+1} \geq 100(n+1)$$

$$\text{لدينا } 3^{n+1} = 3 \times 3^n$$

$$\text{من فرضية التراجع } 3^{n+1} \geq 3 \times 100n \text{ و منه } 3^{n+1} \geq 2 \times 100n + 100n$$

$$\text{من } n \geq 6 \text{ نستنتج أن } 2 \times 100n \geq 1200 \text{ و بالأخص } 2 \times 100n \geq 100$$

$$\text{من } 3^n \geq 100n \text{ (فرضية التراجع) و } 2 \times 100n \geq 100 \text{، نستنتج } 3^{n+1} \geq 100n + 100 \text{ و منه } 3^{n+1} \geq 100(n+1)$$

أي أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$.

تمرين محلول 2: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

الحل: الخاصية " $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

$$\text{المرحلة 1 : من أجل } n = 0, 3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7 \text{ و 7 مضاعف للعدد 7 .}$$

المرحلة 2 : نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كافي . أي: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

$$\text{و نضع } 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \text{ حيث } k \text{ عدد طبيعي . و منه } 3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$$

$$\text{ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل } n+1 \text{ أي } 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} \text{ مضاعف للعدد 7 .}$$

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$$

$$= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$$

$$= (7k - 2^{n+2}) \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$$

$$= 7k \times 9 - 2^{n+2} \times 9 + 2^{n+2} \times 2$$

$$= 7k \times 9 + 2^{n+2} \times (-7)$$

$$= 7(k \times 9 - 2^{n+2})$$

$$\text{و منه } 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} \text{ مضاعف للعدد 7 .}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

١- تقارب متتالية عددية.

نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{-4n+1}{3n+2}$.

• عين نهاية المتتالية (u_n) .

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-4x+1}{3x+2}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{4}{3}$ إذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{4}{3}$. إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة: العكس غير صحيح :

مثال: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x \cos(2\pi x)}{x+1}$ ، الدالة المرفقة

بالممتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{n}{n+1}$.

نلاحظ فعلا بأن $u_n = f(n) = \frac{n}{n+1}$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(2\pi n) = 1$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (نطبق النظريات علي النهايات) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ غير موجودة .

تعريف: (u_n) متتالية عددية .

• القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مفتوح $[\alpha, +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n)

ابتداءً من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n)

ابتداءً من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ و

α عدد حقيقي .

• إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. • إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

تمرين محلول 1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و منه $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

تمرين محلول 2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(v_n)$ حيث $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ الدالة العددية حيث

المعرفة على $[0; +\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) هي الدالة g حيث $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0; +\infty[$.

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$. وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$.

تمرين محلول 3: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

• أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \neq 1$.

• لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية ثم استنتج نهاية (u_n) .

الحل: • نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 : من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 : نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي موجب تماما. أي: $u_n \neq 1$

و نبهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \neq 1$ و نبهن بالخلف . نفرض $u_{n+1} = 1$

أي $1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و نستنتج أن $u_n = 1$ و هذا تناقض مع فرضية التراجع . إذن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \neq 1$.

• $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ و منه $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$ و بالتالي $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}$.

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ لأن $r > 0$

و نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

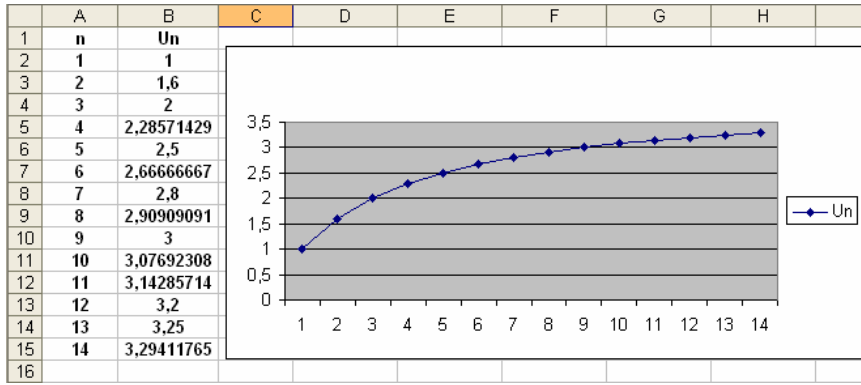
لـ متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مثال 1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_n = \frac{4n}{n+3} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم}$$



الجدول المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n) من أجل قيم n من 1 إلى 14 و يعطي التمثيل البياني للمتتالية . انطلاقا من هذا نخمن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 1 هو عنصر حاد من الأسفل . لنبرهن على صحة هذا التخمين.

لنقارن بين $4n$ و $n+3$. $4n - (n+3) = 3n - 3 = 3(n-1)$. وبما $n \geq 1$ فإن $4n - (n+3) \geq 0$.

و منه $4n \geq (n+3)$ و بالتالي $\frac{4n}{n+3} \geq 1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n \geq 1$.

و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

مثال 2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_n = \frac{2n+3}{n} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم}$$

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 5 عنصر حاد من الأعلى .

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 2 عنصر حاد من الأسفل .

و منه المتتالية (u_n) متتالية محدودة .

مبرهنة: تقبل بدون برهان .

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

تمرين محلول 1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{n^2 + n + 9}{n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل.

طريقة: لإثبات أن متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A)

يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0; +\infty[$.

الحل:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$			+

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n \geq 7$ ، و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين محلول 2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

الحل:

نحسب الفرق $u_n - 2$.

$$u_n - 2 = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4} - 2 = \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 8}{n^2 + 4} = \frac{-7}{n^2 + 4}$$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{-7}{n^2 + 4} \leq 0$ و بالتالي:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 \leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$.

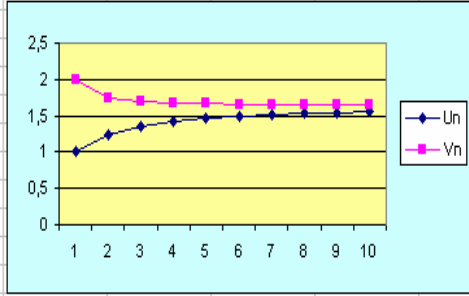
إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 2 عنصر حاد من الأعلى .

١- متتاليتان متجاورتان.

تعريف: تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مثال: لنكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.
 لنكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	Un	Vn					
2	1	1	2					
3	2	1,25	1,75					
4	3	1,36111111	1,69444444					
5	4	1,42361111	1,67361111					
6	5	1,46361111	1,66361111					
7	6	1,49138889	1,65805556					
8	7	1,51179705	1,6546542					
9	8	1,52742205	1,65242205					
10	9	1,53976773	1,65087884					
11	10	1,54976773	1,64976773					



الجدول المقابل يعطي قيم المتتاليتين

(u_n) و (v_n) من أجل قيم n

من 1 إلى 10 و يعطي التمثيل البياني

للمتتاليتين . انطلاقا من هذا نخمن

أن المتتاليتين متجاورتان .

لنبرهن على صحة هذا التخمين .

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \cdot$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \text{ أي}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \cdot$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} \text{ أي}$$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

$$u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \text{ إذن}$$

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

مبرهنة: إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمرين محلول 1: لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$u_0 = 12, v_0 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$\text{نضع من أجل كل عدد طبيعي } n : w_n = u_n - v_n \text{ و } t_n = 3u_n + 8v_n$$

(1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n . ما هي نهاية (w_n) ؟

(2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n) ؟

(3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

(4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

الحل:

$$(1) \text{ لدينا } w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n \text{ أي } w_{n+1} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \frac{u_n - v_n}{12}$$

$$\text{إذن المتتالية } (w_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{12} \text{ وحدها الأول } w_0 = 11$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : w_n = 11 \left(\frac{1}{12} \right)^n \text{ . بما أن } -1 < \frac{1}{12} < 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ و } (w_n) \text{ متقاربة و } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

$$(2) t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4}$$

$$\text{أي } t_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 2u_n + 6v_n = 5u_n + 12v_n = 3u_n + 8v_n = t_n \text{ و } t_{n+1} = t_n \text{ متتالية ثابتة على } \mathbb{N} . \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$$

$$(3) u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - v_n)}{3} = -\frac{2}{3} w_n \text{ و } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} \bullet$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} - u_n = -\frac{22}{3} \left(\frac{1}{12} \right)^n \text{ و } u_{n+1} - u_n < 0 : n \text{ عدد طبيعي و } (u_n) \text{ متناقصة على } \mathbb{N} .$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(u_n - v_n)}{4} = \frac{1}{4} w_n \text{ و } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} \bullet$$

$$\text{إذن : } v_{n+1} - v_n = \frac{11}{4} \left(\frac{1}{12} \right)^n \text{ و } v_{n+1} - v_n > 0 : n \text{ عدد طبيعي و } (v_n) \text{ متزايدة على } \mathbb{N} .$$

$$\bullet \text{ نعلم أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ و أن } w_n = u_n - v_n \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

$$\text{إذن } (u_n) \text{ متناقصة و } (v_n) \text{ متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى } 0 . \text{ إذن المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متجاورتان .}$$

$$(4) \text{ المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متجاورتان .}$$

$$\text{إذن المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متقاربتان و لهما نفس النهاية .}$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44 \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n + 8v_n = 44$$

$$\text{نستنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$$

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

1. دراسة مثال: نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$$

(1) باستعمال جدول ، نحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n) .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Un	0	3	1,5	2,25	1,875	2,0625	1,96875	2,015625	1,992188	2,0039063	1,9980469	2,000977	1,999512	2,000244

ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها .

(2) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

أرسم (Δ) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$.
أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

ضع على محور الترتيب u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 . هل تخميناتك تبدو صحيحة ؟

(3) أحسب العدد α فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

نضع $v_n = u_n - \alpha$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

عين نهاية (v_n) ونهاية (u_n) .

2. الحالة العامة:

لتكن المتتالية التراجعية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول u_0 والعلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

(1) عين طبيعة المتتالية (u_n) من أجل $a = 0$.

(2) أثبت أنه إذا كان $a = 1$ ، فإن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

(3) نفرض $a \neq 1$ و $a \neq 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$ ، ليكن المستقيمان (D) و (Δ) المعرفين

بالمعادلتين $y = x$ و $y = ax + b$ على الترتيب .

• ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و (Δ) ؟

• عين α فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

• لتكن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي $v_n = u_n - \alpha$ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

(4) نضع $a = -1$ و نفرض أن u_0 غير معدوم .

أوجد الحدود السبعة الأولى بدلالة u_0 . ضع تخميناً ثم برهن صحة هذا التخمين .

♦ متتالية مقاربة نحو العدد e .

1. تعيين حصر للعدد e^x .

- (1) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - (1+x)$.
أدرس تغيرات الدالة f .
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(1) \dots 1+x \leq e^x$.
- (3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 ($x < 1$) :
$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \dots (2)$$

2. تعيين حصر للعدد e .

n عدد طبيعي غير معدوم .

- (1) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.
- (2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية.

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$.
- (2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .
- (3) باستعمال آلة حاسبة ، عين قيمة مقربة لكل من الأعداد : u_{100} ، u_{1000} ، u_{10000} .

تطبيق .

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

لتكن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$.

(1) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

(2) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

(3) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$. ماذا تستنتج؟

(4) أثبت أن (u_n) و (v_n) تتقاربان نحو e .

حساب مساحة.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين (D) و (D') المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=2$.

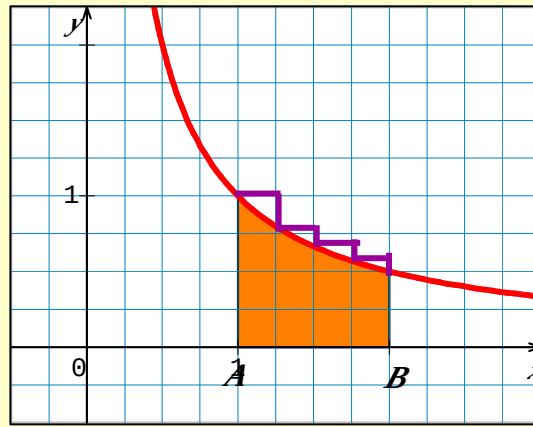
على محور الفواصل نضع النقطة A التي فاصلتها 1 و النقطة B التي فاصلتها 2.

ليكن n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2. نجزئ القطعة $[AB]$ إلى n جزء متقايسة.

ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمحورين.

نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E .

و عليه لدينا $u_n \leq S \leq v_n$



(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 لدينا:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(3) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة.

(4) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟

(5) عيّن عددا طبيعيا p حتى تكون قيمة مقربة لـ S إلى 10^{-2} .

(6) عيّن عددا طبيعيا q حتى تكون قيمة مقربة لـ S إلى 10^{-4} .

(7) باستعمال آلة حاسبة ، عيّن u_{50} ، u_{500} .

متتالية متقاربة نحو العدد: $\ln(2)$.

الجزء الأول .

(u_n) متتالية عددية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

(2) باستعمال جدول ، أحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n) .

الجزء الثاني .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ حيث أن :

$$f(x) = \ln(x)$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$ لدينا :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي p لدينا:

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

(3) n عدد طبيعي غير معدوم .

(a) أكتب الحصر السابق من أجل قيم p الآتية : n ، $n+1$ ، ... ، $2n-1$.

(b) بجمع طرفا إلى طرف المتباينات المحصل عليها ، أثبت أن :

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

(4) أثبت أن (u_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.

موضوع محلول

تمرين :

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن

$$u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3, \quad n \text{ كل عدد}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = 2^{-n} - 2n + 1$$

2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + t n - 1$:

أ- بين أنه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

ب- أثبت أنه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية

(v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر

النقط A ، B ، C و G حيث :

$$4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

عيّن λ حتى تكون النقطة G مرجّحاً للنقط A ، B و C

المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب .

حل مختصر

1. نضع $p(n)$ الخاصية " $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ " . الخاصية الابتدائية $p(0)$

محققة لأنّه $u_0 = 2^{-0} - 2 \times 0 + 1 = 2$. نفرض أنّ الخاصية $p(k)$ صحيحة من

أجل عدد طبيعي k أي $u_k = 2^{-k} - 2k + 1$. ولنبرهن صحة الخاصية $p(k+1)$

أي لنبرهن صحة المساواة $u_{k+1} = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1$. من المعطيات لدينا

$$u_k - 2u_{k+1} = 2k + 3 \text{ معناه } u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k - k - \frac{3}{2}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(2^{-k} - 2k + 1) - k - \frac{3}{2} = 2^{-k-1} - 2k - 1$$

$$u_{k+1} = 2^{-k-1} - 2k - 2 + 1 = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1$$

الخاصية الوراثية $p(k+1)$ صحيحة

إنّ حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

2. أ- $v_n = u_n + t n - 1 = 2^{-n} + (t-2)n$ وبما أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = 0$ ؛

$t \neq 2$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} |t-2|n = +\infty$. إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = +\infty$. إذن (v_n) متباعدة .

$$\text{ب- } v_{n+1} = 2^{-n-1} + (t-2)(n+1) = \frac{1}{2}2^{-n} + (t-2)n + (t-2)$$

$$v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \text{ من أجل كل } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}(t-2)n + (t-2)$$

$$\text{معناه } \frac{1}{2}(t-2)n + (t-2) = 0 \text{ ؛ وهذا يعني أن } t-2 = 0 \text{ أي } t = 2$$

إنّ $t = 2$ يكافئ أنّ (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 1$.

$$\text{ج- } S_n = v_0 \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} \text{ أي } S_n = 2-2^{-n}$$

$$2\overrightarrow{GA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ و } 2 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \neq 0 \text{ ؛ } S_2 = \frac{7}{4} \text{ و } S_1 = \frac{3}{2}, S_0 = 2 \quad (3)$$

$$\text{معناه } 4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \frac{7}{2}\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ بما أنّ } 4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ فإن}$$

$$\lambda\overrightarrow{GC} = \frac{7}{2}\overrightarrow{GC} \text{ بما أنّه لا يمكن لـ } G \text{ أن تنطبق على القطر } A, B \text{ و } C \text{ فإن } \lambda = \frac{7}{2}$$

تعاليق

مبدأ التراجع يتضمّن شرطين صحة

الخاصية الابتدائية وصحة الخاصية

الوراثية . ويستعمل في البرهان

الخاصيات المتعلقة بعدد طبيعي .

تكون المتتالية (v_n) متقاربة إذا

و فقط إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ مع

l عدد حقيقي .

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا

و فقط إذا وجد عدد حقيقي q يحقق

$$v_{n+1} = qv_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ من أجل كل}$$

يجب مراعاة عدد الحدود في

المجموع .

بكل تحفظ ، لاستعمال المرجّح يجب

التحقق من أن مجموع المعاملات غير

معدوم .

تنبيه

الهدف من هذا التمرين هو تحديد نهاية مشتركة لمتتاليتين وتوظيف البرهان بالتراجع وخاصة تجاوز متتاليتين .

تمرين

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1. أحسب الحدود $v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$.
- أعط القيمتين الظاهرتين على شاشة الحاسبة للحددين u_3 و v_3 .
2. برّر بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ و $v_n > 0$.
3. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$,
- استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.
4. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة والمتتالية (v_n) متزايدة .
5. أ- برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{21}{8}$.
- ب- برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$,
- استنتج باستعمال البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$.
6. استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان . ما هي نهايتهما المشتركة .
7. برر أن u_3 هو قيمة مقربة إلى 10^{-7} للعدد $\sqrt{7}$.
- عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون u_n قيمة مقربة إلى 10^{-100} للعدد $\sqrt{7}$.

توجيهات

2. نبرهن على الخاصيتين معا و $u_{p+1} > 0$ تستنتج من $\frac{u_p + v_p}{2}$ و $v_{p+1} > 0$ من المعطيات
3. أكمل الحساب ... $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}(u_{n+1}^2 - 7)$. الاستنتاج باستعمال السؤال 2.
4. احسب العبارتين $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ واستعمل السؤال السابق .
5. أ- لاحظ $u_n \geq v_n \geq v_1$. وبالنسبة ب- لاحظ $4u_{n+1} \geq 4 \times \frac{21}{8} \geq 10$ واستعمل 3.
6. لتعيين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$ لديك $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$ ومن $v_n = \frac{7}{u_n}$ يكون $l^2 = 7$
7. يجب تبيان أن $\sqrt{7}$ هي قيمة مقربة إلى 10^{1-2^n} للعدد u_n .

تمارين تطبيقية

1 - تذكير بالمتتاليات العددية .

1 في كل حالة من الحالات التالية ، عين بيانها الحدود الأولى للمتتالية (u_n) ، ثم أعط تخميناً حول اتجاه تغيرها ونهايتها .

أ -
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

ب -
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

2 (u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n)

متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n على الترتيب

ب : $v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$ و $w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$

بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان مطلوب تعيين الأساس لكل منهما .

3 أحسب أقياس زوايا مثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية .

4 (v_n) متتالية معرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$

1 برر أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > 0$

2 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ

$u_n = \frac{1}{v_n}$. بين أن (u_n) متتالية حسابية .

5 (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 13$ و $u_7 = 37$

أحسب u_{17} .

6 (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1 أكتب u_n بدلالة n .

2 أحسب $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

7 أحسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10$.

8 من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = \frac{5^n}{7^{n+1}}$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

9 (u_n) متتالية هندسية حيث $u_7 = \frac{1}{216}$

و $u_{10} = \frac{27}{1331}$ أحسب u_{30} .

10 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1 أكتب u_n بدلالة n .

2 أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_7$.

3 لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم $n \rightarrow v_n = u_{2n}$.

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

11 (u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة

تماماً حيث : $u_0 = 2$ و $u_3 = 9u_1$.

1 عين أساس المتتالية (u_n) .

2 أحسب u_n بدلالة n .

3 أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

2 - الاستدلال بالتراجع .

12 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

13 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

14 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

15 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$

و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

أ) $u_n > 1$ ب) $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

16 المتتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ و من أجل

$$u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \quad n \text{ عدد طبيعي}.$$

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

17 لنكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0,5$

$$u_{n+1} = (u_n)^2 \text{ و}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < 1$,

(2) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

18 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$2^{3n} - 1 \text{ مضاعف للعدد } 7.$$

19 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$3^{2n} - 1 \text{ مضاعف للعدد } 8.$$

20 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$3^{2n+1} - 2^{2n+2} \text{ مضاعف للعدد } 7.$$

21 p_n هي الخاصية " $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3".

هل الخاصية p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟

22 (1) أثبت أنه إذا وجد عدد طبيعي n بحيث 9 يقسم

$$10^n + 1 \text{ فإن } 9 \text{ يقسم } 10^{n+1} + 1.$$

(2) هل من أجل كل عدد طبيعي n , $10^n + 1$

مضاعف للعدد 9 ؟

3 - تقارب متتالية عددية .

23 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n \text{ بـ } u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن

$$-10^{-3} < u_n < 10^{-3}.$$

24 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$u_n = n\sqrt{n}$$

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n > n_0$, فإن $u_n > 10^6$.

25 المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$u_0 = 3. \text{ ابتداء من أي دليل يكون } u_n < 10^{-5} \text{ ؟}$$

26 المتتالية (u_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول

$$u_0 = 1. \text{ ابتداء من أي دليل يكون } u_n > 10^{12} \text{ ؟}$$

في التمارين من **27** إلى **30** المطلوب حساب نهاية

المتتالية (u_n) المقترحة .

$$\textbf{27} \quad (1) \quad u_n = \frac{3n+2}{2n-1} \quad (2) \quad u_n = \frac{5n-2}{4n-3}$$

$$(3) \quad u_n = 2n - \frac{2}{n+1} \quad (4) \quad u_n = \frac{n}{3} - 4 + \frac{n+2}{n^2+1}$$

$$\textbf{28} \quad (1) \quad u_n = \frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}$$

$$(2) \quad u_n = \frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}$$

$$(3) \quad u_n = \frac{-3n+12}{n^2+1}$$

$$(4) \quad u_n = \frac{n^2+2n}{4n+3}$$

$$\textbf{29} \quad (1) \quad u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}} \quad (2) \quad u_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}$$

$$(3) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}+2}{2n+1} \quad (4) \quad u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$$

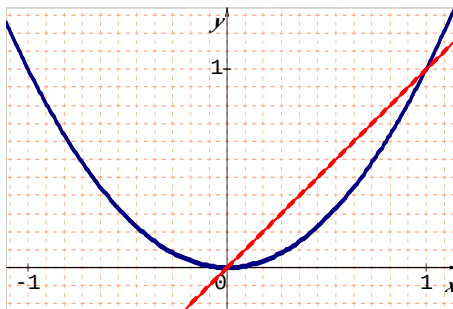
$$\textbf{30} \quad (1) \quad u_n = \sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)$$

$$(2) \quad u_n = \cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)$$

$$(3) \quad u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{17}$$

31 في الشكل لدينا $\mathcal{C}$ التمثيل البياني للدالة $f: x \mapsto x^2$

و Δ المستقيم ذو المعادلة $y = x$



(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

(2) أثبت أن العدد $\frac{1}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 بـ : $u_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$.

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

38 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{-1}{2n+4}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$.
أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

39 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{n-1}{n}$ و $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.
أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

40 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه ، هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين ؟
أ - (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
 $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

ب - (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$.

41 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :
 $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

42 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$.
أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

$u_n = f(n)$ ، $v_{n+1} = f(v_n)$ و v_0 عدد حقيقي معلوم .
(1) عين إحداثيي نقطتي تقاطع المنحني $\mathcal{C}$ والمستقيم Δ .
(2) ما القول عن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟
هل هي مقاربة ؟

(3) بتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (v_n) ، أعط تخميناً حول رتابتها ونهايتها في الحالات التالية :

$$v_0 = 0, 8 \quad , \quad v_0 = -1, 1 \quad , \quad v_0 = 1, 1$$

(4) هل يمكن اختيار v_0 حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

4 - المتتاليات المحدودة .

32 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$.

من بين الأعداد الحقيقية التالية : 0 ؛ 6 ؛ 4,99999 ؛ 5 ، ما هي العناصر الحاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

في كل من التمارين من 33 إلى 36 ، أذكر إن كانت المتتالية (u_n) المقترحة تقبل عنصراً حاداً من الأسفل ، عنصراً حاداً من الأعلى . هل هي محدودة ؟

33 أ - $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)$ ب - $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

ج - $u_n = 1 + \frac{1}{n+2}$ د - $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

34 أ - $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ب - $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

ج - $u_n = \frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$

35 أ - $u_n = 2^n$ ب - $u_n = n\sqrt{3} - 2$

ج - $u_n = n^2 + n - 1$

36 أ - $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$ ب - $u_n = n + \cos n$

ج - $u_n = (-1)^n \times n^2$

37 (1) أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

ب - استنتج v_n بدلالة n وعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n > 6023$.

(2) (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها d .
نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

عين u_1 و d حتى يكون $2S_n = n(3n+7)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0 = -4$.

(1) أكتب u_n بدلالة n .

(2) أحسب المجموع $S = u_{26} + u_{27} + \dots + u_{125}$.

51 لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن

أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ،
 $v_n = 2u_n - 9$.

أ - أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

ب - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية بطلب تعيين أساسها.

ج - جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د - أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم

استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

52 لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 14$ ومن

أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 3$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_n + 1$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 علما أن $u_0 = \frac{2}{9}$

أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$.

43 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

44 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمارين للتعمق

1 - تذكير بالمتتاليات العددية.

45 برهن أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{\ln n}{n}$$

هي متناقصة ابتداء من الرتبة 3.

46 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها.

47 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها.

48 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

و أن المتتالية (v_n) متناقصة.

49 بكالوريا

(1) (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_1 وأساسها r

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74 \end{cases}$$

أ - عين v_1 و r علما أن

54 أحسب المجموع :

$$S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \dots + 312,5$$

55 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد حقيقي n :-

$$u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$$

أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$

56 لتكن المتتالية (u_n) ذات الحد الأول $u_1 = 1$ ،

وحيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1،

$$u_{n+1} = 2u_n + 3$$

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، نضع :

$$v_n = u_n + 3$$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

- أثبت أن $u_1 + u_2 + \dots + u_n + 3n$ مضاعف للعدد 4

وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

57 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0 = \frac{1}{6}$ ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8} , n \text{ كل عدد طبيعي}$$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = 2u_n + \frac{5}{3} :-$$

(1) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 ثم v_0, v_1, v_2 .

(2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$$t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n , s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

58 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة :-

$$\begin{cases} u_0 = 2 , u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} : n \geq 1 \end{cases}$$

(1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - au_n$.
برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها b .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_{n+1} - bu_n$.
برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها a .

(4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

59 a, b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

(1) بين أنه إذا كانت a, b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتالية لمتتالية هندسية فإن :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

(2) جد ثلاث حدود متتالية لمتتالية هندسية علماً أن

مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

60 a, b و c ثلاث حدود متتالية من متتالية هندسية .

$$\begin{cases} a+b+c=36,75 \\ abc=343 \end{cases}$$

61 a, b و c ثلاث أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

نفرض أن a, b و c تشكل ثلاث حدود متتالية من

متتالية هندسية أساسها q ؛ و $3a, 2b, c$ تشكل ثلاث

حدود متتالية لمتتالية حسابية . أحسب q .

62 a عدد حقيقي معطى .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = a$ ومن أجل كل

$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n , n \text{ عدد طبيعي غير معدوم}$$

(1) (v_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

$$v_n = 13u_n - 4 :-$$

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q .

(2) عبر عن v_n بدلالة a و n ؛ ثم استنتج عبارة

بدلالة a و n .

(3) أحسب بدلالة a و n المجموع :

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

في الخليتين C 2 و B 3 وباستعمال اللمسة = نحجز
العبارتين الموضوعتين في الشكل ثم أسحب كل منهما إلى
اليمين باستعمال الفأرة واللمسة ctrl .

	A	B	C	D
1	n	0	1	2
2	u _n	5	5*B2-7*B1	
3	v _n	B2-7/4*B1-7/16		
4				

بملاحظتك للسطر الثالث ، أعط تخمينا لطبيعة المتتالية
(v_n) .

(2) برهن التخمين الموضوع في السؤال السابق ثم عبر عن
v_n و u_n بدلالة n .

(3) أحسب s_n = u₀ + u₁ + ... + u_n .

67 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ u₀ = -2 ومن أجل

كل عدد طبيعي n ، u_{n+1} = αu_n + β ، α و β عدنان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

(1) جد علاقة تربط بين العددين α و β التي تجعل
المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة ونعتبر المتتالية
(v_n) المعرفة من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي n بـ

v_n = u_n + γ حيث γ عدد حقيقي غير معدوم .

أ - عين γ بدلالة α و β حيث تكون المتتالية (v_n)
هندسية .

ب - نضع α = 3 ، β = 2 ، γ = 1 .

أحسب المجموعين s_n و t_n حيث

t_n = u₀ + u₁ + ... + u_n ، s_n = v₀ + v₁ + ... + v_n .

2 - الاستدلال بالتراجع .

68 بكالوريا

نضع s_n = 1² + 2² + 3² + ... + n² حيث n عدد طبيعي
غير معدوم .

(1) أ - أحسب s₁ ، s₂ ، s₃ و s₄ .

ب - عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n .

63 يرمز (α_n) إلى متتالية هندسية غير منتهية ، كل

حدودها موجبة حيث حدّها الأول : α₁ = 3 ،
و α₃ + α₅ = 15/16 .

(1) عين أساس المتتالية (α_n) .

(2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

s_n = α₁ + α₂ + ... + α_n .

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع

β_n = ln(α_n) (ln هو اللوغاريتم النيبيري) .

أ - برهن أن (β_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين
أساسها .

ب - أحسب بدلالة n المجموع t_n حيث :

t_n = β₁ + β₂ + ... + β_n .

64 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$A_n = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ رقم}}$$

(عدد من n رقم مساويا لـ 1 مثلا A₄ = 1111) .

أحسب s_n = A₁ + A₂ + ... + A_n .

65 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$A_n = \underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ رقم}}$$

(عدد من n رقم مساويا لـ 3 مثلا A₅ = 33333) .

أحسب s_n = A₁ + A₂ + ... + A_n .

66 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على N بـ u₀ = 5

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، u_{n+1} = 5u_n - 7n ،

$$v_n = u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16}$$

(1) باستعمال جدول إكسل نريد حساب الحدود العشر

الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ولهذا ، أحجز في الخلية B1 العدد 0 ثم باستعمال الفأرة

واللمسة ctrl نسحب إلى اليمين ؛ نحجز في الخلية B2

العدد 5 .

(1) برهن أنه أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :
 $(1+a)^n \geq 1+na$.

(2) استنتج أنه إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ (تبرير المبرهنة المقبولة في السنة الثانية)

77 (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $3n^2 \geq (n+1)^2$.

(2) نسمي P_n الخاصية : " $3^n \geq 2^n + 5n^2$ " .

أ — ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة ؟

ب — برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 5 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

78 من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي P_n الخاصية :

$$3^n \geq (n+2)^2$$

(1) من بين الخواص P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 عين منها الصحيحة .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

79 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ و من أجل

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ؛ أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

80 الهدف التعبير عن u_n بدلالة n .

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = 10u_n - 18$$

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 .

لاحظ النتائج هي أعداد تتكون من أرقام وسطها أسفار ؛

أعط العلاقة بين عدد الأسفار و n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

69 نضع $t_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) أحسب t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 . عبر عن t_{n+1} بدلالة t_n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

70 من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ،

نضع :

$$s_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + (n-1)2^{n-2}$$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$s_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)2^n$$

71 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

❖ الرمز $n!$ يقرأ عاملي n ومعرف بـ :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

72 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n ،

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

73 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n ، $n! \geq 2^{n-1}$.

74 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو

يساوي 4 لدينا : $2^n \geq n^2$.

75 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر

من أو يساوي 2 ، $5^n \geq 4^n + 3^n$.

76 متباينة برنولي (Bernoulli)

a عدد حقيقي موجب تماماً .

86 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل

$$u_{n+1} = u_n + 2, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

(v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$v_{n+1} = v_n + u_n, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) عبر عن u_n بدلالة n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$v_n = 1 + n^2$$

87 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أدرس رتبة المتتالية (u_n) .

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > n^2$.

88 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 \in]0; 1[$ ومن أجل كل

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \quad n \text{ طبيعي}$$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < 1$.

89 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \quad n \text{ طبيعي}$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$0 \leq u_n \leq 2$$

أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة ماما.

90 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 0$ و من أجل

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) تحقق من أن الحدود u_1, u_2, u_3 تنتمي إلى

$$[0; 4].$$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n < 4$.

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

91 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$

$$u_{n+1} = 0,6 u_n - 1,2 \text{ و}$$

(1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n > -3$$

(2) أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n , ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

81 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = 2u_n - 3, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أحسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . أعط تخميناً لعبارة

$$(3 - u_n) \text{ بدلالة } n.$$

(2) برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقاً, ثم استنتج

عبارة u_n بدلالة n .

82 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = 4 - u_n, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أحسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . أعط تخميناً لعبارة

$$u_n \text{ بدلالة } n.$$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_{2n+1} = 1 \text{ و } u_{2n} = 3$$

83 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع،

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

(1) أحسب s_1, s_2, s_3, s_4 . أعط تخميناً لعبارة S_n

$$\text{بدلالة } n.$$

(2) برهن هذا التخمين بالتراجع.

(3) لاحظ المجموع S_n وأعط برهاناً آخراً للتخمين.

84 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = n + u_n, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط

تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

(2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n .

85 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}, \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط

تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

(2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n .

92 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$.$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

(2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

93 θ عدد حقيقي من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2 \cos \theta$ ومن أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} .$$

(1) أ - أحسب u_1 و u_2 .

ب - أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n > 0 .$$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n} .$$

94 (u_n) متتالية معرفة بـ :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \text{ و } u_0 = 5$$

(1) باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم برهن

هذا التخمين باستعمال البرهان بالتراجع .

95 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع :

$$u_n = n \times 2^{n-1}$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + (n-1)2^n$$

96 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم لدينا :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$$

(2) استنتج قيمة المجموع

$$\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + \dots + \frac{1}{2007 \times 2008}$$

97 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عددان

$$\text{طبيين } p_n \text{ و } q_n \text{ حيث } (2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n \sqrt{3} .$$

98 (1) المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ ومن

$$\text{أجل كل } n \in \mathbb{N}^* , u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n .$$

أ - أحسب الحدود u_3 ، u_4 و u_5 . أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

ب - برهن بالتراجع هذا التخمين .

(2) المتتالية (v_n) معرفة بـ $v_0 = \frac{2}{5}$ ، $v_1 = 1$ ومن

$$\text{أجل كل عدد طبيعي } n , v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n ,$$

$$\text{برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n , v_n = \frac{2^n + 3^n}{5} .$$

99 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ومن

$$\text{أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n , u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n .$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = \frac{1}{2} \left[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right]$$

100 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n , u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} ,$$

برهن أن :

$$\text{أ - من أجل كل عدد طبيعي } n , u_n > -1 .$$

ب - المتتالية (u_n) رتيبة .

$$\text{ج - من أجل كل عدد طبيعي } n , u_n \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

101 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n , u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2} ,$$

$$\text{نضع من أجل كل عدد طبيعي } n , v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4} .$$

(1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

(2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

102 الدالة كثيرات الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$106 \quad (1) \quad u_n = e^{1-n} \quad (2) \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$(3) \quad u_n = (n+2)e^{-n} \quad (4) \quad u_n = \ln(3 + e^{2-n})$$

$$(5) \quad u_n = \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} \quad (6) \quad u_n = \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1}$$

$$(7) \quad u_n = \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) \quad (8) \quad u_n = \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right)$$

$$107 \quad (1) \quad u_n = n^2 \left(\sqrt{3 + \frac{2}{n+1}} - \sqrt{3} \right)$$

$$(2) \quad u_n = \sqrt{3n^2 - 1} - \sqrt{3}n$$

$$(3) \quad u_n = \frac{n}{\sqrt{n+2}} - \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

$$(4) \quad u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$$

$$108 \quad (1) \quad u_n = \frac{2^n}{5^n} \quad (2) \quad u_n = \frac{3 \cdot 01^n}{3^n}$$

$$\rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$109 \quad (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل}$$

$$\text{كل عدد طبيعي } n : u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}$$

$$\text{و } v_n = \frac{1}{u_n}$$

$$(1) \text{ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n > 0$$

$$(2) \text{ برهن أن } (v_n) \text{ متتالية حسابية}$$

$$(3) \text{ استنتج نهاية المتتالية } (u_n)$$

$$110 \quad (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل}$$

$$\text{كل عدد طبيعي } n : u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$$

$$\text{و } v_n = u_n + 3 \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

$$s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(1) \text{ برهن أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية}$$

$$(2) \text{ عين نهاية لكل من المتتاليات } (u_n), (s_n) \text{ و } (t_n)$$

$$p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$(1) \text{ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x,$$

$$p(x+1) - p(x) = x^2$$

$$(2) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

$$p(n) \in \mathbb{N}$$

$$(3) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

$$p(n+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$103 \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ } u_1 = 0 \text{ ومن أجل كل}$$

$$\text{عدد طبيعي غير معدوم } n, u_{n+1} = \frac{-1}{u_n - 2}$$

$$\text{أعط القيمة المضبوطة للحد } u_{2006}$$

$$104 \text{ برهن بالتراجع أنه كل عدد طبيعي } n \text{ أكبر من أو}$$

$$\text{يساوي } 24 \text{ يمكن كتابته } n = 5a + 7b \text{ مع } a \text{ و } b$$

$$\text{عددين طبيعيين}$$

$$105 \quad (1) \quad (u_n) \text{ المتتالية المعرفة بـ } u_1 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل}$$

$$\text{كل عدد طبيعي غير معدوم } n, u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n} \right) u_n$$

$$\text{أ - أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية } (u_n)$$

$$\text{ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير}$$

$$\text{معدوم } n, u_n = \frac{n}{2^n}$$

$$(2) \quad k \text{ عدد طبيعي غير معدوم, } (v_n) \text{ المتتالية المعرفة بـ}$$

$$v_1 = \frac{1}{k} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n,$$

$$v_{n+1} = \left(\frac{n+1}{kn} \right) v_n$$

$$\text{أعط تخميناً لعبارة } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم برهن بالتراجع هذا}$$

$$\text{التخمين}$$

$$3 - \text{تقارب متتالية عددية}$$

$$\text{في التمارين 106 إلى 108 المطلوب حساب نهاية}$$

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ المقترحة}$$

(2) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 ، يكون $u_n \geq 2^n$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

117 (1) أكتب برنامجا للمتتالية u المعرفة بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

(2) ابتداء من أي دليل تصبح حدود المتتالية مستقرة على شاشة الحاسبة .

ما هو التخمين الذي يمكن وضعه ؟

(3) أثبت أنه إذا كانت المتتالية u مقاربة فإن نهايتها هي العدد الذهبي $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

118 عين نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1 = 0,57$ ، $u_2 = 0,5757$ ، ... ، $u_n = 0,57\ldots57$ (رقم 2n)

119 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

(1) باستعمال جدول أو حاسبة بيانية ، أعط القيمة العشرية المقربة للحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، ثم للحدود u_{10^n} حيث العدد n يتغير من 1 إلى 13 .

(2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$.

استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(3) اشرح لماذا يظهر تناقض في النتيجةين للسؤالين السابقين .

120 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

(1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$

111 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (v_n) ، (w_n) و (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n \rightarrow : u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} ; v_n = \frac{u_n}{n}$$

$$w_n = u_n - n ; t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$$

112 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (v_n) و (w_n)

المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n \rightarrow :$

$$u_n = \frac{3n^2 - 4}{n + 1} ; v_n = \frac{u_n}{n} ; w_n = u_n - 3n$$

113 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n \rightarrow : u_n = \frac{1}{n!}$$

(نذكر من أجل $n \geq 1$ ، $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$)

(1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) .

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n} ; \text{ ثم استنتج نهاية المتتالية } (u_n)$$

114 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n \rightarrow : u_n = \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}}$$

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} ; \text{ ثم استنتج نهاية المتتالية } (u_n)$$

115 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = n + 1 - \cos \frac{n\pi}{5} \rightarrow :$$

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n \leq u_n \leq n + 2$ ؛

ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

116 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n \rightarrow : u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$$

(1) أعط القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من المتتالية

(u_n) .

124 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ والعلاقة

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ التراجعية}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

(2) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l أكبر من أو

تساوي 2 .

(3) بين أن l تحقق $l = \sqrt{2+l}$. استنتج قيمة l .

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \ln(x+1) - x$

المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$.

(2) استنتج أن : من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ،

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

ثم من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1) \leq u_n$ ،

ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) أكتب برنامجا الذي يحدد أصغر عدد طبيعي n يحقق:

$$u_n \geq 10$$

4 - المتتاليات المحدودة .

126 المتتاليان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل

$$\text{عدد طبيعي غير معدوم بـ : } u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ و } v_n = \frac{1}{n}$$

(1) أثبت أن 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n < v_n$.

(3) هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) محدودتين ؟

127 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم بـ :

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(1) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

(2) أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

(3) هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

(3) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ، فما هي نهايتها ؟

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 7$ ،

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، أكتب عبارة الحد

العام v_n بدلالة n ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

121 (1) برهن أنه ابتداء من رتبة مطلوب تعيينها ، يكون

$$2^n \leq (n-1)!$$

(2) بين أن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_0 = a \text{ والعلاقة التراجعية : } u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$$

(1) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$ ،

(2) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $|u_n| \leq \frac{|a|}{2^n}$.

(3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

123 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ والعلاقة

$$\text{التراجعية : } u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$$

(1) أ - برر أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، u_n موجب تماما .

ب - إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فما هي نهايتها ؟

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ،

أنشئ $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$ ، ثم

المستقيم Δ ذي المعادلة $y = x$ (يقصر الرسم على

المجال $[0; 2,2]$) . مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

(3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية متقاربة ثم عبر عن

v_n بدلالة n .

ب - عبر عن u_n بدلالة v_n ثم برر التخمين الموضوع

سابقا .

128 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

(1) هل العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

(2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، استنتج أنها مقاربة .

(3) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

129 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول u_0 ومن

$$u_{n+1} = e^{-u_n} , n \text{ عدد طبيعي}$$

برهن أنه ابتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة بالعدد 0 و 1 وهذا مهما كان اختيارا الحد الأول u_0 .

130 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

(1) ما هو اتجاه التغير للمتتالية (u_n) ؟

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة . هل العدد

1,333333 هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

131 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ u_0 عدد حقيقي

معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 5$$

(1) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ،

ماذا تستنتج ؟

(2) نفترض أن المتتالية (u_n) مقاربة ونهايتها l . أكتب

معادلة من الدرجة الثانية تكون محقق من أجل l .

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة . هل هي محدودة ؟

ما القول عن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ؟

132 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل

$$u_{n+1} = 3u_n - 4 , n \text{ عدد طبيعي}$$

(1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

(2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = 4u_n + \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي .}$$

أ - عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

ب - باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا ، أكتب v_n

بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

ج - هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$$

برهن أن المتتالية (w_n) مقاربة .

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ بـ :}$$

(1) برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(2) استنتج عددا طبيعيا p حيث p تكون قيمة مقربة إلى

10^{-3} بالنقصان للنهاية l المشتركة بين المتتاليتين (u_n)

و (v_n) .

أعط قيمة u_p على شكل كسر غير قابل للاختزال وكذلك

قيمته المقربة المحصل عليها بالحاسبة .

134 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 0$ ،

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \text{ و } v_0 = 2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \text{ و}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n \leq 1 \leq v_n$$

(2) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وجد

نهایتها المشتركة .

(2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $v_{n+1} = f(v_n)$.

باستعمال حاسبة بيانية مثل منحنى الدالة والمستقيم ذي المعادلة $y = x$.

أعط تخميناً حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) برهن بالترجع عن الخواص التالية :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$ ؛

" $1 \leq v_n \leq 2$ " ؛ " $u_n \leq u_{n+1}$ " و " $v_n \geq v_{n+1}$ " .

(4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_n - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \geq 0$ ،

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ و}$$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

عين القيمة المضبوطة للعدد l .

138 a و b عدنان حقيقيان حيث $0 < a < b$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ ،

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

u_{n+1} يسمى الوسط الهندسي لـ u_n و v_n ؛ v_{n+1}

يسمى وسطهما الحسابي .

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n \leq v_n$.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

استنتج أن $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$.

135 نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بـ : $u_0 = 1$ ،

$v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} ، u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $w_n = u_n - v_n$.

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية . عين نهايتها ثم عبر

عن w_n بدلالة n .

(2) عبر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ؛ استنتج

اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ولهما نفس النهاية

يرمز لها l .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $t_n = 3u_n + 10v_n$.

برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة . استنتج قيمة l .

136 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :

$u_0 = 3$ ، $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} ؛ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

(1) أحسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $w_n = v_n - u_n$.

بين أن المتتالية (w_n) هندسية وعين نهايتها .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج

أنهما مجاورتان .

(4) برهن أن (t_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \text{ بـ : } t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .

عين l ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

137 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بـ :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه إذا كان

$x \in [1; 2]$ ، فإن $f(x) \in [1; 2]$.

(3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(4) نفرض أن $a=2$ و $b=5$, والعدد l هو النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

استعمل نتيجة السؤال الثاني لتعيين القيمة المقربة إلى 10^{-3} للنهاية l .

139 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = -1$,

$v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$,

$v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$.

(1) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n < v_n$$

ب - برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n , نضع $x_n = u_n + av_n$, $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين .

جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n)

هندسيتين ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n .

(3) جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

مسائل

140 لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n)

المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$$

(1) هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية

حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

(2) تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين α و β تكون

المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n$

هي عنصر من المجموعة (E) .

(3) عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام

$$u_n = \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

و $u_0 = 3$ علما أن $u_1 = -\frac{4}{35}$. أحسب نهاية هذه المتتالية .

141 $(1 - I)$ أدرس اتجاه تغير الدالتين f و g

المعرفتين على المجال $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$$

$$g(x) = \ln(1+x) - x$$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$$

II - في هذا الجزء نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة

بـ : $u_1 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ,

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$u_n > 0, n$$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ,

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$(3) \text{ نضع : } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{و } T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

باستعمال العلاقة (1) برهن أن :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

(4) أ - أحسب S_n و T_n بدلالة n .

ب - استنتج نهاية لكل من المتتاليتين (S_n) و (T_n) .

(5) دراسة تقارب المتتالية (u_n) .

أ - برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب - استنتج أنها متقاربة .

ج - نقبل النتيجة التالية: إذا كانت المتتاليتان (α_n) و (β_n)

متقاربتين حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha_n \leq \beta_n$ ،

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

أعط حصرا لنهاية المتتالية (u_n) .

142 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد

طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) متقاربة ونهايتها هي $\frac{1}{2}$.

(2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال

$$[0; +\infty[: x \mapsto x - \sin x$$

$$g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

أدرس اتجاه تغير لكل من الدوال f ، g و h مبيّنا أن كل

من هذه الدوال موجبة .

(3) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$$

(4) أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة ، وما هي نهايتها ؟

143 - I لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} : \text{بـ}$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1+x + \ln x$ ؛ ثم بين أن

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$$0,27 \leq \beta \leq 0,28$$

(2) من أجل $x > 0$ عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$.

— استنتج تغيرات الدالة f .

— أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

II - نريد دراسة المعادلة $f(x) = n$ حيث n عدد

طبيعي غير معدوم .

(1) بين أنه من أجل كل n هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا

$$\alpha_n$$

(2) المقارنة بين α_n و e^n .

أ - بين أن $f(e^n) \leq n$ ، استنتج أن $\alpha_n \geq e^n$.

ب - أثبت أن العلاقة $f(\alpha_n) = n$ يمكن كتابتها على

$$\text{الشكل } \ln \left(\frac{\alpha_n}{e^n} \right) = \frac{n}{\alpha_n} \dots (1)$$

استعمل (أ) لاستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n}$.

(3) المقارنة بين α_n و $e^n + n$.

نضع $\alpha_n = e^n (1 + \varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_n \geq 0$. . . (2)

أ - باستعمال العلاقة (1) عبر عن $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n)$

بدلالة n .

ب - بين أنه من أجل كل $t \geq 0$ ،

$$0 \leq (1+t) \ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$$

ج - استنتج من (أ) و (ب) أنه من أجل كل $n \geq 1$ ،

$$0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n} \dots (3)$$

د - باستعمال (2) و (3) عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n + n - \alpha_n)$.

اختيار من متعدد

144 في كل سؤال اقتراحات موضوعية يمكن أن تكون أكثر من جملة صحيحة؛ المطلوب اختيار الجمل الصحيحة.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

نعرف المتتاليتين (v_n) و (w_n) بـ $v_n = u_{n+1} - u_n$ و

$$w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

(1) أ - المتتالية (v_n) حسابية. ب - المتتالية (w_n) حسابية.

ج - المتتالية (v_n) هندسية. د - المتتالية (w_n) هندسية.

$$(2) \quad \text{أ - } v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{ب - } v_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{ج - } w_n = 1$$

$$(3) \quad \text{أ - } u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$\text{ب - } u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$$

ج - المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية.

د - المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 في كل من السؤالين ، بالضبط اقتراحين صحيحين

المطلوب تعيينهما .

(1) المتتاليات التالية متقاربة :

$$\text{أ - } \frac{2^n}{n^{2008}} \quad \text{و } n > 0 \quad \text{ب - } \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$$

$$\text{ج - } n \sin \frac{1}{n} \quad \text{و } n > 0 \quad \text{د - } \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \quad \text{و } n > 1$$

(2) المتتاليات u ، v و w تمتاز بالخواص التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$\text{أ - } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

ب - المتتالية v محدودة من الأسفل .

ج - من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < v_n < 1$.

د - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحح أم خطأ ؟

146 ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة .

(1) كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى .

(2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0

فتكون نهايتها معدومة .

(3) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي محدودة .

(4) إذا كانت نهاية متتالية هي $+\infty$ فإن هذه المتتالية تكون

غير محدودة من الأعلى .

(5) كل متتالية متقاربة هي محدودة .

(6) إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و تحققان

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < v_n$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

147 أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرراً ذلك

(1) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا

كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإن المتتالية

$(u_n + v_n)$ لا تقبل نهاية حقيقية .

(2) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا

كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإن المتتالية

$(u_n \times v_n)$ لا تقبل نهاية حقيقية .

(3) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ، فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

(4) كل المتتالية تكون محدودة من الأسفل أو من الأعلى .

148 بكالوريا

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1,5$ ومن أجل

كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

المطلوب تمييز بن الجمل الصحيحة والخاطئة مبرراً ذلك.

(1) المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة

تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y = x$ و $y = 2x - 1$.

(2) المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$ ،

هي متتالية هندسية .

(3) المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى .