

النهايات و الاستمرارية 01

الكفاءات المستهدفة

- ◆ حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- ◆ حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- ◆ دراسة السلوك التقاربي لدالة
- ◆ استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x) = k$ ، k عدد حقيقي معطى.

كوشي أوغسطين لويس: عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789م إلى 1857م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرار، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية. شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس و العالم لاغرانج و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفى مع حفيد تشارلز العاشر ، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.



كوشي أوغسطين لويس

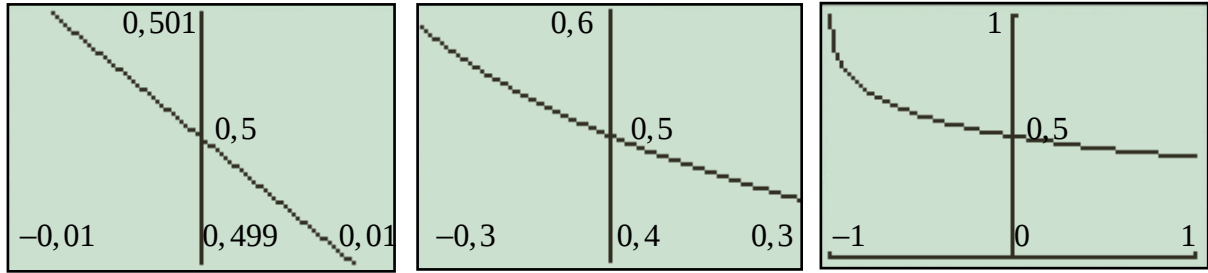
لقد نشر ما مجموعه 789 عملا ، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.

نشاط أول

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

(1) وضع تخمين

- أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني (C_f) ثم أنجز التكبيرات (zoom) التالية:



- الدالة f غير معرفة عند 0 إلا أنه بإمكان x أخذ قيم قريبة من 0 بالقدر الذي نريد. ضع في هذه الحالة تخميناً بخصوص قيم $f(x)$.

(2) إثبات صحة التخمين

نعلم أن الدالة $g: x \mapsto \sqrt{x+1}$ قابلة للاشتقاق عند 0.

- عين العدد المشتق للدالة g عند 0.
- استنتج نهاية الدالة f عند 0

نشاط ثان

(1) دراسة مثال

نعتبر الدالة u المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $u(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ و لتكن v الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $v(x) = x^2 + 1$

- عرف الدالة $v \circ u$.

	A	B	C
1	x	u(x)	v(u(x))
2	100		
3	200		
4	300		
5			
6			
7			

- لاحظ على شاشة حاسبة بيانية أو مجدول سلوك كل من $u(x)$ و $v \circ u(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.
- ضع تخميناً بخصوص نهاية الدالة $v \circ u$ عند $+\infty$.
- عين b نهاية الدالة u عند $+\infty$ ثم نهاية الدالة v عند b .
- ماذا تلاحظ ؟

(2) وضع تخمين

a, b و c تمثل أعداداً حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u, v و f دوال حيث $f = v \circ u$.
إذا فرضنا أن $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ ضع تخميناً بخصوص نهاية الدالة f عند a .

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \leq x < n+1$ ونرمز لها بالرمز E أو $[]$.

(1) أحسب $[-2, 3]$ ، $E(-1)$ ، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$.

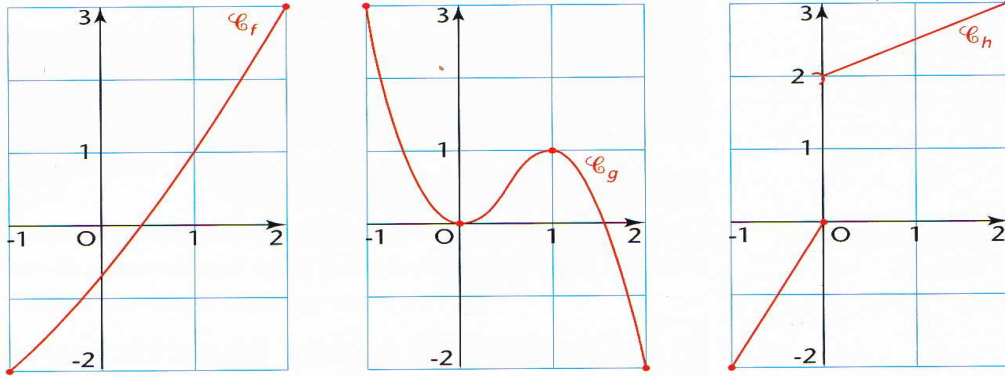
(2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2; 1]$ كما يلي:

$f(x) = [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ ، $h(x) = x^2 + 1$ و لتكن (C_h) ، (C_g) ، (C_f) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_h) و (C_g) و (C_f) .
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_h) ، (C_g) و (C_f) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة.

نشاط رابع

إليك المنحنيات (C_h) ، (C_g) و (C_f) الممثلة على التوالي لثلاث دوال f ، g و h معرفة على المجال $[-1; 2]$ و ليكن k عددا حقيقيا من المجال $[-2; 3]$.



1. هل الدوال f ، g و h مستمرة على المجال $[-1; 2]$ ؟
2. بواسطة قراءة بيانية حدد، حسب قيم العدد الحقيقي k ، عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية:

$$f(x) = k \quad (1) \quad g(x) = k \quad (2) \quad h(x) = k \quad (3)$$
3. ماذا تمثل القيمتان -2 و 3 حدود المجال $[-2; 3]$ ؟
4. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-2; 3]$ ،
 - هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2)، (3) حلا على الأقل في المجال $[-1; 2]$ ؟
 - هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2)، (3) حلا وحيدا في المجال $[-1; 2]$ ؟

١- نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

1. نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

نتيجة: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ *

2. نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف 1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف 2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty; B]$ ($B \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = -\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ *

3. المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$

القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\text{على الترتيب } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$

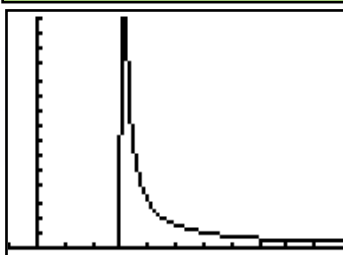
فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2}{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

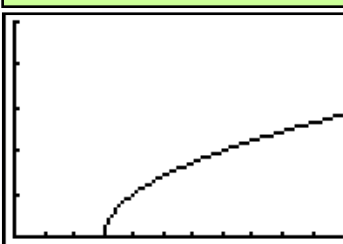


الحل: ليكن $I =]a; b[$ حيث $a < 0 < b$ (I مجال مفتوح يشمل 0).

من أجل x من $]3; +\infty[$ ، $f(x) \in I$ يعني $\frac{2}{x-3} < b$ أي $x > 3 + \frac{2}{b}$.
نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي (أكبر من $3 + \frac{2}{b}$)، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$. ومنه نهاية f عند $+\infty$ هي 0.

تمرين محلول 2: لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



الحل: ليكن A عددا حقيقيا موجبا.

$\sqrt{x-3} \geq A$ يعني $x \geq A^2 + 3$ ومنه المجال $[A^2 + 3; +\infty[$

يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

لدينا إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

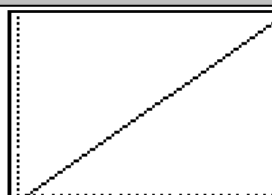
تمرين محلول 3: لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها

البياني في معلم.

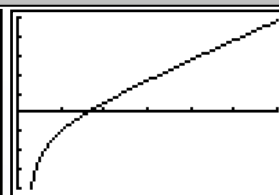
1. بعد تمثيل (C_f) على شاشة حاسبة بيانية، ضع تخمينا بصدد وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .
2. بين أن المستقيم $y = x - 1$: مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

طريقة: لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D): y = ax + b$ ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$.

WINDOW
Xmin=0
Xmax=50
Xscl=1
Ymin=20
Ymax=50
Yscl=1
Xres=1



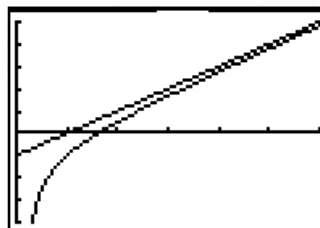
WINDOW
Xmin=0
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=-4
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1



الحل: 1.

يظهر و أن المنحني (C_f) يقترب من مستقيم من أجل قيم x كبيرة بالقدر الكافي و منه يمكن أن نضمن بوجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ و منه المستقيم $y = x - 1$: مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.



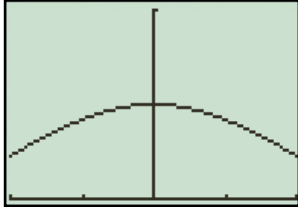
3. $[f(x) - (x - 1)] = -\frac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ،

$[f(x) - (x - 1)] < 0$. إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) .

١- نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a; x_0[\cup]x_0; b[$ و l عدد حقيقي. القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0 .



مثال: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

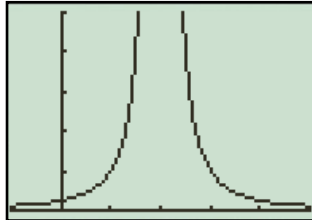
نبين شاشة الحاسبة البيانية أنه كلما اقترب x من 0 إلا و اقتربت $f(x)$ من 1.

بإجراء تكبيرات أو باستعمال جداول قيم بواسطة الحاسبة يتضح أكثر أنه يمكننا جعل $f(x)$ قريب من 1 بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 0 بالقدر الكافي. لدينا إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(يمكن إثبات صحة التخمين بإتباع نفس المنهجية المتبعة في النشاط الأول)

2. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

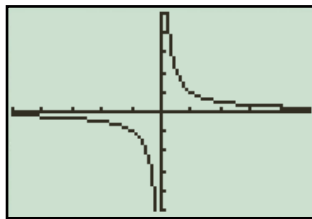
تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a; x_0[\cup]x_0; b[$. القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0 .



مثال 1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

يتضح جليا أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2

بالقدر الكافي. لدينا هكذا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$



مثال 2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{1}{x}$. نعتبر الدالتين f_1 و f_2

المعرفتين على الترتيب على $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$ بـ $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$

من الواضح أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = -\infty$

نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$ و أن نهاية f عند 0 من اليمين

هي $+\infty$ و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x = a$. القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند x_0 (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ $f(x) = (x+1)^2 - 2$ نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. ضع تخميننا.
2. في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[1, 99; 2, 01]$ ؟
3. r عدد حقيقي حيث $0 < r < 1$.
- في أي مجال يجب اختيار x بحيث $f(x) \in [2-r; 2+r]$ ؟
- ماذا تستنتج علما أنه يمكن اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

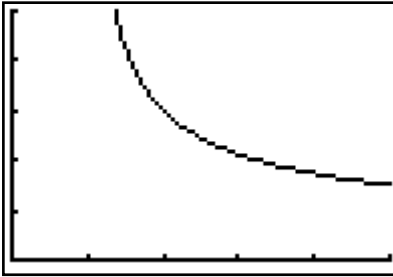
الحل:

1. يظهر و أنه كلما اقترب x من 1 اقترب $f(x)$ من $(1+1)^2 - 2$ أي من العدد 2.
2. $1, 99 \leq f(x) \leq 2, 01$ يعني $3, 99 \leq (x+1)^2 \leq 4, 01$ يمكن اختيار x بحيث $1, 998 \leq x+1 \leq 2, 002$ أي $0, 998 \leq x \leq 1, 002$ و منه $x \in [0, 998; 1, 002]$.
3. * $2-r \leq f(x) \leq 2+r$ يعني $4-r \leq (x+1)^2 \leq 4+r$ يمكن اختيار x بحيث $-1+\sqrt{4-r} \leq x \leq -1+\sqrt{4+r}$ أي $\sqrt{4-r} \leq x+1 \leq \sqrt{4+r}$ و منه $x \in [-1+\sqrt{4-r}; -1+\sqrt{4+r}]$.
- * يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من 2 بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي 2.

تمرين محلول 2: لتكن f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}-1}$

- نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى $+\infty$.
1. مثل منحنى الدالة f على شاشة حاسبة بيانية ثم ضع تخميننا بخصوص نهاية f عند 1.
2. A عدد حقيقي موجب تماما.
- في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x) \geq A$ ؟
- أثبت صحة التخمين الموضوع في السؤال 1.

الحل:



1. نخمن بأن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.
2. $f(x) \geq A$ يعني $\frac{3}{\sqrt{x}-1} \geq A$ أي $\sqrt{x}-1 \leq \frac{3}{A}$ أي $x-1 \leq \frac{9}{A^2}$ و أخيرا $x \leq 1 + \frac{9}{A^2}$.
- حتى يكون $f(x) \geq A$ نختار x في المجال $\left[1; 1 + \frac{9}{A^2}\right]$.
- علما أنه يمكن أخذ A كبيرا بالقدر الذي نريد يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

١- تتمات على النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty & * \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty & * \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty & * & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 & * \end{array}$$

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

• نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

- قواعد إجرائية**
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ و $-\infty$.
 - النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ و $-\infty$.

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

تمرين محلول 1: أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = -x^3 + 2x - 2$

2. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3x^2 + x - 3$

3. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

الحل:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

تمرين محلول 2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.

2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.

3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. لكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذران هما -2 و 1. و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 3 نجد:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
x^2+x-2	+	0	-	0	+

2. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 3) = -1$ و بما أنه من أجل $x < -2$ ، $x^2 + x - 2 > 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 3) = -1$ و بما أنه من أجل $-2 < x < 1$ ، $x^2 + x - 2 < 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ و بما أنه من أجل $-2 < x < 1$ ، $x^2 + x - 2 < 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ و بما أنه من أجل $x > 1$ ، $x^2 + x - 2 > 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

١- نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a, b, c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، u, v, f دوال حيث $f = v \circ u$.

$$\text{إذا كانت } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ وإذا كانت } \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$ ونريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

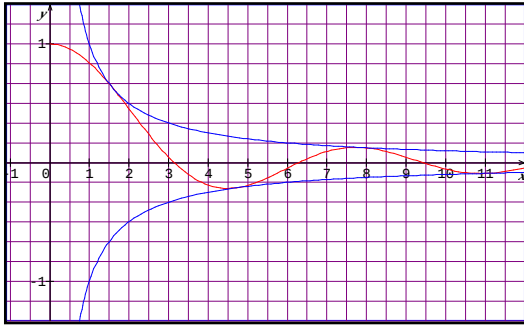
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ و $v(x) = \sin x$ و $f = v \circ u$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} v(x) = 1 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة 1: f, g, h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ وإذا كان من

$$\text{أجل } x \text{ كبير بالقدر الكافي } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه فإن

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad x \in]0; +\infty[$$

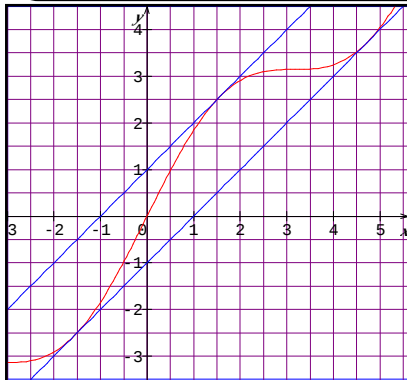
$$\text{و بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

مبرهنة 2: f, g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر

$$\text{الكافي } f(x) \geq g(x) \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مبرهنة 3: f, g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر

$$\text{الكافي } f(x) \leq g(x) \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



ملاحظة: تمتد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sin x$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه فإن

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \rightarrow]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[\text{ على } \mathbb{R} \text{ الدالة المعرفة على }]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

الحل:

- نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $v(x) = \sqrt{x}$ و $(f = v \circ u)$
- * بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{2}$ نجد كذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$
- * بما أن $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} u(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = 0$
- * بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

$$f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2} \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ على } \mathbb{R}^* \text{ الدالة } f \text{ نعتبر المعرفة على } \mathbb{R}^*$$

$$1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^* \text{ من } x \text{ كل أجل كل } x$$

2. أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
- و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$ أي $1 - \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{\cos x}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2}$
2. بما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{x}{2 + \sin x} \rightarrow \mathbb{R} \text{ على } \mathbb{R} \text{ الدالة } f \text{ نعتبر المعرفة على } \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1, \mathbb{R} \text{ من } x \text{ كل أجل كل } x$$

2. استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ أي $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$
2. لدينا $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x}$ و من أجل x من $]-\infty; 0]$ لدينا $\frac{x}{2 + \sin x} \leq \frac{x}{3}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- لدينا $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x}$ و من أجل x من $[0; +\infty[$ لدينا $\frac{x}{2 + \sin x} \geq \frac{x}{3}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

١- الاستمرارية

1. تعريف الاستمرارية

تعريف: f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f .

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

$$(f \text{ مستمرة عند } a) \text{ يعني } (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a))$$

ملاحظة: القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I .

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيتها البياني على هذا المجال دون

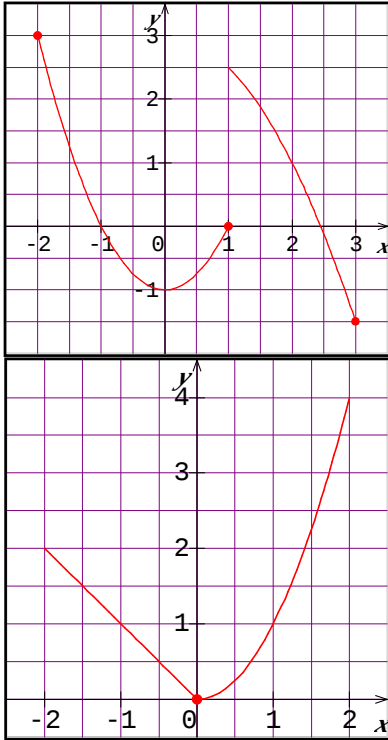
رفع القلم (اليد).

مثال 1:

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال

$[-2; 3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيتها البياني دون رفع القلم.

في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2; 1]$ و $[1; 3]$.



مثال 2:

الدالة f المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x \text{ إذا كان } x \in [-2; 0] \\ f(x) = x^2 \text{ إذا كان } x \in [0; 2] \end{array} \right\}$$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $[-2; 2]$ لأنه

باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. خواص (تقبل دون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

• الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

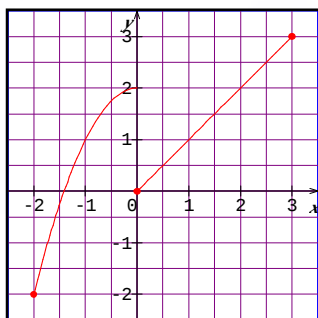
• الدالة $x \mapsto \frac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty; -1[$ ، $]-1; 1[$ و $]1; +\infty[$.

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} x \in [-2;0[\quad f(x) = -x^2 + 2 \\ x \in [0;3] \quad f(x) = x \end{array} \right\}$$

1. مثل بيانيا الدالة f . هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟
2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ ولدينا من جهة ثانية $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.
2. الدالة غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.
نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.
الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x^2 + x + 1) \cos x$ بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

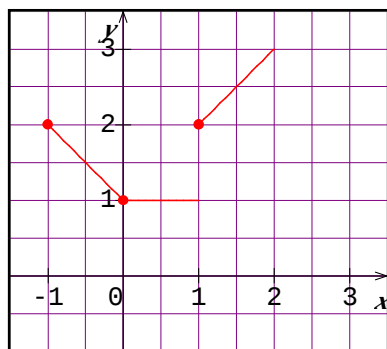
الحل:

الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto x^2 + x + 1$ مستمרותان على $\mathbb{R}$.
الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بـ: $f(x) = xE(x) + 1$ حيث الدالة $E(x) \mapsto x$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f .
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ ؟ على المجال $[-1;2[$ ؟

الحل:



1. من أجل $x \in [-1;0[$ لدينا $E(x) = -1$ ومنه $f(x) = -x + 1$
من أجل $x \in [0;1[$ لدينا $E(x) = 0$ ومنه $f(x) = 1$
من أجل $x \in [1;2[$ لدينا $E(x) = 1$ ومنه $f(x) = x + 1$
2. انظر الشكل المقابل.
3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

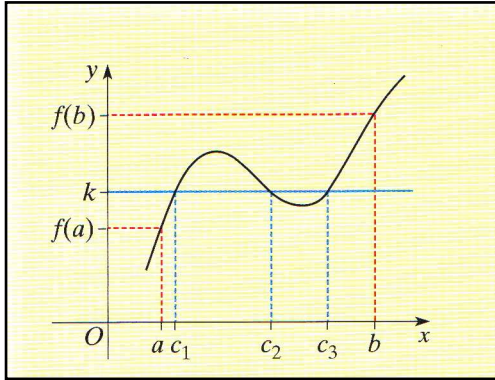
الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

١- مبرهنة القيم المتوسطة

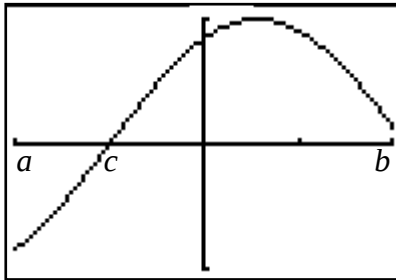
1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.

2. التفسير البياني



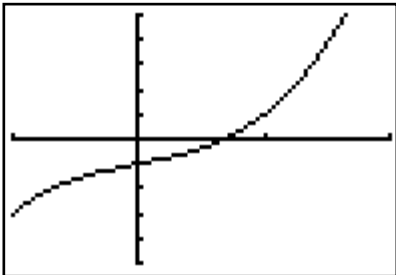
f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$ و ليكن (C) منحنيا البياني في معلم $(O; I, J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،
المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة
المنحني (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .
(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على
الترتيب c_1, c_2 و c_3).



حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$
و كان $f(a) \times f(b) < 0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)
فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$.
أي أن f تتعدم على الأقل مرة واحدة على $[a; b]$.

3. المعادلة $f(x) = k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،
المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b .
ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 + x - 1$
 f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$ ،
العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ ومنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة،
المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين محلول 1: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2; 1]$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a; b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

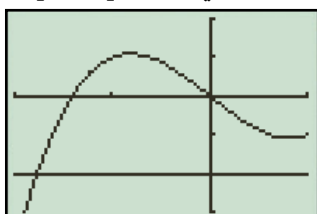
الحل: يمكن كتابة المعادلة $x^3 - 2x = -2$ على الشكل $f(x) = -2$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^3 - 2x \quad (\text{يمكن اختيار كتابة أخرى مماثلة})$$

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من تم على $[-2; 1]$.

لدينا $f(-2) = -4$ و $f(1) = -1$ كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين -4 و -1 .

إن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2; 1]$.



ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم

تمثيل الدالة f و المستقيم ذا المعادلة $y = -2$ ثم ملاحظة تقاطعهما.

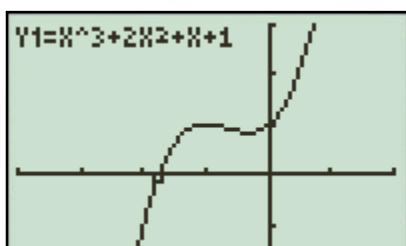
تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

1. أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f .

2. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.

الحل:

1. نحصل مثلا على الشكل المقابل.



```
WINDOW
Xmin=-4
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=3
Yscl=1
Xres=1
```

2. يوحي الشكل بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا محصورا بين -2 و -1 .

بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2; -1]$.

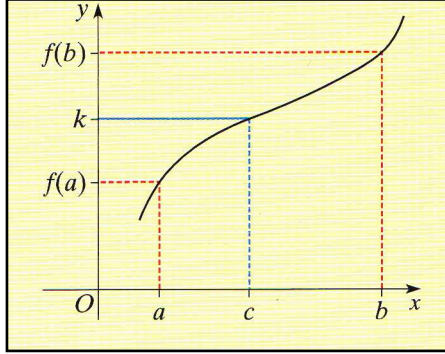
لدينا من جهة ثانية $f(-2) = -1$ و $f(-1) = 1$ و بما أن 0 محصور بين -1 و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$

إن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2; -1]$.

١- الدوال المستمرة و الرتبية تماما

1. الدوال المستمرة و الرتبية تماما على مجال $[a; b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتبية تماما على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a; b]$.



البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتبية تماما على المجال $[a; b]$.
و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.
لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c ، محصور بين a و b و يحقق $f(c') = k$.

يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c) = f(c')$ و هذا يناقض الرتبة التامة للدالة f على المجال $[a; b]$.
و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a; b]$ بحيث $f(c) = k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = k$.

2. ملاحظات

ملاحظة 1: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتبية تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a; b]$ فإن

جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a; b]$.

ملاحظة 2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتبية تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح

من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتبة الدالة على المجال المعتبر.

مثال:

$$f(x) = \frac{2}{x+1} \text{ على }]-1; +\infty[$$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-1; +\infty[$ و لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

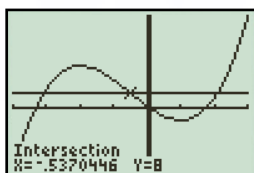
إن من أجل كل عدد حقيقي k من $]0; +\infty[$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-1; +\infty[$.

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x + 1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
2. أرسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $f(x) = 8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2} .

الحل:

1. من أجل كل x من $[-4;3]$ ، $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$



WINDOW
Xmin=-4
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-31
Ymax=46
Yscl=1
Xres=1

x	-4	-2	1	3
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-31	21	-6	46

أنظر الشكل المقابل.

2. لدينا $f(-2) = 21$ ، $f(1) = -6$ و $-6 \leq 8 \leq 21$. دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $[-2;1]$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 8$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2;1]$. و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن c وحيد.
3. لتعيين حصرا للحل c يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y = 8$ ، إظهار قيم مقربة لإحداثيي نقطة التقاطع و هكذا نقرأ $c \approx -0,5370446$ و منه نستنتج الحصر التالي: $-0,54 < c < -0,53$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

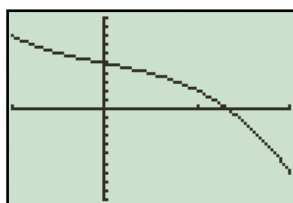
1. برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .
2. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة f ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1} .
3. عين حسب قيم x إشارة الدالة f .

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -(3x^2 + 2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد

حقيقي x ، $f'(x) < 0$. إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا كذلك $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود.



A	B
x	$f(x)$
1	2
1,1	1,469
1,2	0,872
1,3	0,203
1,4	-0,544
1,5	-1,375
1,6	-2,296
1,7	-3,313

نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

2. نثبت بإتباع مثلا نفس الطريقة السابقة أو باستعمال

مجدول أو باستعمال جدول قيم مع اختيار الخطوة 0,1

أن $1,3 < \alpha < 1,4$.

3. من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $f(x) > 0$

و من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $f(x) < 0$.

◆ إزالة حالة عدم التعيين

1. بالاختزال

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$
- أحسب $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 + x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟
 - قم بتحليل كل من $x^3 + 2x^2 + x + 2$ و $x^2 + x - 2$.
 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ ، $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.
 - استنتج نهاية الدالة f عند -2 .

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

2. باستعمال التحليل

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}$
- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟
 - بين أنه من أجل كل x من $[1; +\infty[$ ، $f(x) = x \left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right)$.
 - استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + 2 - \sqrt{x}$

3. باستعمال المرافق

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[2; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$
- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.
 - بين أنه من أجل كل x من $[2; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$.
 - استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 + x}$

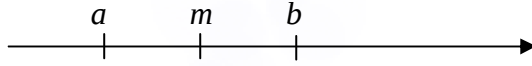
4. باستعمال العدد المشتق

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$
- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
 - باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x \mapsto \cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0 .
- تطبيق:** أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-1; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

إيجاد حصر لحل معادلة بالتتصيف

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a; b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a; b]$.

نعلم أن $m = \frac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a; b]$.



1. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a) \times f(m) < 0$ ؟

2. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a) \times f(m) > 0$ ؟

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m وذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تعيين حصر لـ α :

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1. برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2; 3]$.

2. بحساب $f(m)$ ، حيث m هو مركز $[2; 3]$ ، عين حصر لـ α سته 0,5.

3. بتعويض 2 و 3 بحدي الحصر السابق و بإتباع نفس المنهجية أوجد حصر لـ α . ما هي سته ؟

4. ما هي سعة الحصر المحصل عليه بعد n مرحلة علما أنه في كل مرحلة يتم قسمة السعة على 2 ؟

برامج لحاسبة بيانية:

استعمال مجداول:

TI 82-83

TI 89-92

Casio Graph

Prompt A, B, E	Dicho()	? → A
While B - A ≥ E	Prgm	? → B
(A + B)/2 → C	Local c	? → E
A → X	Prompt a, b, e	While B - A ≥ E
Y1 → F	While b - a ≥ e	A → X
C → X	(a + b)/2 → c	Y1 → F
Y1 → G	If y1(a) * y1(b) ≤ 0 Then	(A + B)/2 → X
If F × G ≤ 0	c → b	Y1 → G
Then	Else	If F × G ≤ 0
C → B	c → a	Then X → B
Else	EndIf	Else X → A
C → A	EndWhile	IfEnd
End	Disp a, b	WhileEnd
End	EndPrgm	A
Disp A, B		B

1. لمتابعة العملية السابقة أنجز ورق الحساب أسفله

بإتباع الخطوات التالية:

- نحجز في الخلية D 2 : $(B^2 + C^2)/2$
- نحجز في الخلية E 2 : $B^2 \wedge 3 - 3 * B^2 - 3$ ثم ننقلها نحو كل من الخليتين F 2 و G 2 .
- في الخليتين B 3 و C 3 نحجز على الترتيب:
 $= SI(E^2 * G^2 < 0; B^2; D^2)$ و
 $= SI(E^2 * G^2 < 0; D^2; C^2)$ ثم نسحب نحو

الأسفل في كل عمود من أعمدة ورقة الحساب.

2. ابتداء من أي قيمة لـ n تكون سعة حصر العدد α أصغر من 10^{-5} ؟

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	b	$m=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
2	0	2	3	2,5	-1	15	5,125	1
3	1	2	2,5	2,25	-1	5,125	1,640625	0,5
4	2	2	2,25	2,125	-1	1,640625	0,220703	0,25
5	3	2	2,125	2,0625	-1	0,220703	-0,41382	0,125
6	4	2,0625	2,125	2,09375	-0,41382	0,220703	-0,10269	0,0625
7	5	2,09375	2,125	2,109375	-0,10269	0,220703	0,057461	0,03125
8	6	2,09375	2,109375	2,101563	-0,10269	0,057461	-0,023	0,015625
9	7	2,101563	2,109375	2,105469	-0,023	0,057461	0,017134	0,007813
10	8	2,101563	2,105469	2,103516	-0,023	0,017134	-0,00296	0,003906

موضوع محلول

التمرين : حسب بكالوريا

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad \text{نسمي } \mathcal{C} \text{ تمثيلها البياني .}$$

1. أ - عَيِّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب - بَيِّن أَنَّهُ من أَجْلِ كل عدد حقيقي x ، لدينا :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} . \text{ استنتج نهاية الدالة } u \text{ عند } +\infty .$$

2. أ - بَيِّن أَنَّ $[u(x) + 2x]$ تَوَوَّل إلى 0 عندما x يَوَوَّل إلى $-\infty$.

ب - بَيِّن أَنَّهُ من أَجْلِ كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$.
استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$.

ج - فسر هذه النتائج بيانيا .

نقبل أَنَّ الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أرسم $\mathcal{C}$ ومستقيم المقارب المائل .

حل مختصر

1. أ - لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty$

$$\text{ب - } u(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

2. أ - من أَجْلِ كل عدد حقيقي x ، $u(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} + x$ ومنه

$$u(x) + 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \quad \text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) + 2x] = 0$$

ب - من أَجْلِ كل عدد حقيقي x ، $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

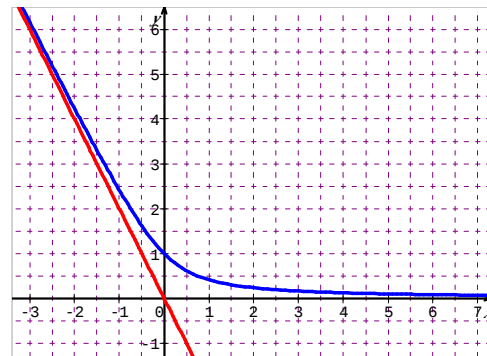
وبالتالي إذا كان $x \leq 0$ فإن $u(x) > 0$ ، وإذا كان $x \geq 0$ فإن $u(x) > 0$

إذن من أَجْلِ كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$

وحسب 1. أ - من أَجْلِ كل حقيقي x ، $u(x) + 2x = \frac{1}{u(x)}$ إذن $u(x) + 2x > 0$

ج - المستقيم D ذي المعادلة $y = -2x$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}$ ، و $\mathcal{C}$ يقع

فوق المستقيم D .



لاحظ أَنَّ $u(0) = 1$.

$u(x) + 2x > 0$ معناه $u(x) > -2x$
وبالتالي يقع $\mathcal{C}$ فوق D .

تعاليق

نلاحظ أَنَّ هناك نهاية لدالة مركبة.

استعمال المرافق لإزالة حلة عدم التعيين .

إذن يكون حامل محور الفواصل مقاربا أفقيا للمنحني $\mathcal{C}$.

تنبيه

في بعض الاستدلالات نتبع طرائق استقرائية ، أي عند تحليل قضية يطلب تبريرها (تكون شرطا كافيا) نجدها صحيحة .

التمرين

ليكن b عددا حقيقيا موجبا تماما .

1. عبّر بدلالة b عن عدد A_1 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A_1 يكون $\frac{1}{x} < b$.
2. عبّر بدلالة b عن عدد A_2 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A_2 يكون $\frac{1}{2x+1} < b$.
3. لتكن f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x من هذا المجال يكون :

$$-\frac{1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

أ - عيّن عددا A ، بدلالة b ، حيث من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A يساوي A يكون $f(x) \in]-b; b[$.

ب - ما هي الخاصية على الدالة f التي برهنت في السؤال السابق ؟

ج - اقترح تبريرا آخر لهذه الخاصية باستعمال مبرهنة درست يطلب كتابتها كليا وبدقة .

توجيهات

1. عين شرطا على x حتى يكون $\frac{1}{x} < b$ ثم استنتج A_1 .
 2. يمكن استعمال النتيجة السابقة حتى يكون الشرط $\frac{1}{2x+1} < b$ كافيا لضمان الشرط $2x+1 > A_1$.
 3. أ - لكي يكون $f(x) \in]-b; b[$ يكفي أن يكون $\frac{1}{x} < b$ و $-\frac{1}{2x+1} > -b$.
- ب - تذكر مفهوم النهاية .
- ج - $-\frac{1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ استعمل المبرهنة حول النهاية والحصص .

تمارين تطبيقية

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

(1) أوجد عدداً حقيقياً A حيث إذا كان $x > A$ فإن

$f(x)$ ينتمي إلى المجال $]2,9; 3,1[$.

(2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 3$ مقارب

للمنحني C_f الممثل لدالة f .

(3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

(1) أوجد عدداً حقيقياً A حيث إذا كان $x < A$ فإن

$f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,9; 1,1[$.

(2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ مقارب

للمنحني C_f الممثل لدالة f .

(3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

3 اثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 3$

اثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5 لتكن الدالة f المعرفة

$$f(x) = \sqrt{1-x} \text{ على }]-\infty; 1[$$

اثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

6 لتكن الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

(1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب

للمنحني C_f عند $+\infty$.

(2) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

7 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

(1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب

للمنحني C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(2) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

• في التمارين من 8 إلى 11 اذكر إن كان منحنى الدالة

f يقبل المستقيم Δ كمستقيم مقارب عند $-\infty$

و عند $+\infty$ ثم حدد وضعية المنحني بالنسبة إلى Δ .

8 (أ) $\Delta: y = 1$ ، $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

(ب) $\Delta: y = -\frac{1}{3}$ ، $f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$

9 (أ) $\Delta: y = 2x + 1$ ، $f(x) = 2x + 1 + \frac{5}{x-3}$

(ب) $\Delta: y = -\frac{1}{2}x$ ، $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 - 1}$

10 (أ) $\Delta: y = x + 3$ ، $f(x) = x + 3 - \frac{2}{|x|}$

(ب) $\Delta: y = -x + 1$ ، $f(x) = \frac{\sin x}{x} - x + 1$

11 (أ) $\Delta: y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ، $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x}$

(ب) $\Delta: y = x$ ، $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقى

12 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 3$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

(1) ضع تخميناً لسلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

(2) في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى

$]6,99; 7,01[$ ؟

(3) α عدد حقيقى حيث $0 < \alpha < 1$

و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

3 - تتمات على النهايات

• في التمارين من 18 إلى 22 و في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس

النهاية على يمين و على يسار a

18 أ) $f(x) = 2x^3 - x + 1$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

ب) $f(x) = -3x^4 + 2x + 4$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

ج) $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

19 أ) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1

ب) $f(x) = \frac{2x^2+5}{x-2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 2

ج) $f(x) = \frac{-4x+1}{3-x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 3

20 أ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

ب) $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 2

ج) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 0

21 أ) $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 0

ب) $f(x) = 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1

ج) $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x-3}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 3

22 أ) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ،

عند 1 ، عند 4

ب) $f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1 ، عند 3

ج) $f(x) = x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -2

• في التمارين من 23 إلى 28 ، في كل حالة من الحالات وباستعمال العمليات على النهايات ادرس نهاية

• في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى

$]-\alpha; 7+\alpha[$ ؟

• علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد ، ماذا

تستنتج؟

13 - خمن النهاية عند 4 للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

- أوجد مجالا I مركزه 4 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن

$$f(x) \in]2,95; 3,05[$$

14 خمن النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x-2)^2}$$

كان $x \in]2-a; 2+a[$ فإن $f(x) > 10^3$

15 لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 2[$ بـ:

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

(1) الشكل التالي هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f على

شاشة حاسبة بيانية

• ماذا تخمن بالنسبة سلوك الدالة f عندما يؤول x إلى 2 ؟

(2) عدد حقيقي موجب تماما

• في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x) \leq -A$ ؟

• أثبت صحة التخمين السابق.

(3) ماذا يمكن القول عن المستقيم الذي معادلته $x = 2$

بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

16 (1) ادرس النهاية عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ وعند 1 للدالة f

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

(2) حدّد معادلات المستقيمت المقاربة لمنحنى الدالة f

و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

17 f هي الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند

حدود مجموعة التعريف.

(2) حدّد معادلات المستقيمت المقاربة لمنحنى الدالة f

4 - نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

30 احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3-6x}{1-x}} \quad (2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3+x-3} \quad (4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} \quad (3)$$

31 f هي الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ - ب:

$$f(x) = \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$$

احسب نهاية الدالة f عند -2 و عند 2 .

32 احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin x}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

33 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$:

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

هل تقبل الدالة $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

34 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$,

$$\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$$

هل تقبل f نهاية عند $+\infty$ ؟

35 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

36 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$:

$$f(x) \leq -2x^3$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

37 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x^4 + x$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس إن كان ضروريا النهاية على يمين و على يسار a .

23 أ) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} + 1$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$ عند $+\infty$ ، عند 1

24 أ) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ عند 4

ب) $f(x) = (1-x)(2-\sqrt{-x})$ عند $-\infty$ ، عند 0

25 أ) $f(x) = \frac{2}{x} - \cos x$ عند 0 ، عند $+\infty$

ب) $f(x) = \sin(2x) + x$ عند $\frac{\pi}{4}$ ، عند $+\infty$

26 أ) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \frac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

27 أ) $f(x) = \sqrt{x} - 1 - 2x$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1 - \sqrt{x}}{x^2 + 2}$ عند $+\infty$

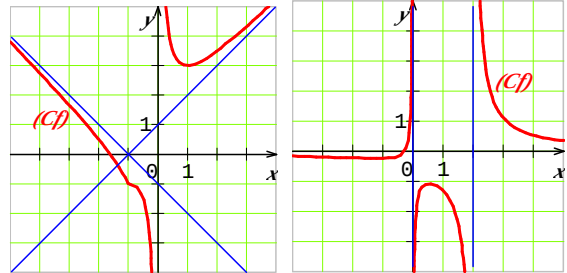
28 أ) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ عند $-\infty$

29 المنحني C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f

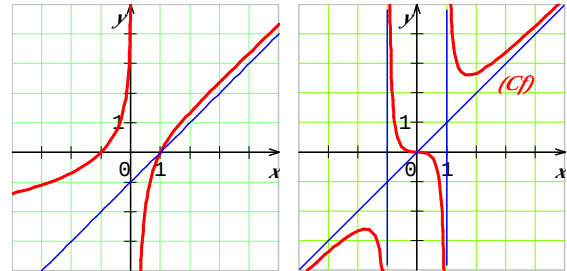
في كل حالة من الحالات الثلاث عين D مجموعة تعريف

الدالة f ثم خمن النهايات في أطراف المجموعة D .



الحالة (2)

الحالة (1)



الحالة (4)

الحالة (3)

38 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$1 \leq 3 + 2 \cos x \leq 5$$

(2) هل تقبل الدالة $f: x \mapsto \frac{x-1}{3+2 \cos x}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

39 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3$$

(2) هل تقبل الدالة $f: x \mapsto x^2 - \sin 3x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

40 هل تقبل الدالة $f: x \mapsto x^2 + 2x \sin x$ نهاية عند

$+\infty$ و عند $-\infty$ ؟

41 f دالة معرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$:-

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{2x + 1}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$:

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

(2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

5 - الاستمرارية

42 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 4]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x & ; \quad x \in [-2; 1] \\ f(x) = x - 1 & ; \quad x \in [1; 4] \end{cases}$$

(1) مثل بيانيا الدالة f في معلم. هل تقبل الدالة f نهاية

عند 1؟

(2) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2; 4]$ ؟ لماذا؟

(3) اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 & ; \quad x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

(2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

44 ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$:-

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + 2 & ; \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

45 f دالة عددية معرفة كما يلي:

$$f(1) = 3 \text{ و } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \text{ إذا كان } x \neq 1$$

(1) ادرس استمرارية f عند 1 .

(2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

46 لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R} - \{1\}$

على الترتيب كما يلي:

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} \text{ و } f(x) = 2x^3 - x + 1$$

ادرس استمرارية f و g .

47 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$:-

$$f(x) = (x^2 - x) \sin x$$

لماذا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

48 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$:-

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

ادرس استمرارية f .

49 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 1]$ كما يلي:

$$f(x) = x(x + E(x))$$

حيث $x \mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

(1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$$[-2; -1], \quad [-1; 0], \quad [0; 1]$$

(2) ارسم في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحني الممثل للدالة f .

(3) هل الدالة f مستمرة

على $[-2; -1], [-2; 0], [-2; 1]$ ؟

6 - مبرهنة القيم المتوسطة

50 برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة

$$x^3 - 4x = -2$$

x	-3	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	4	2

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

57 إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{13}{6}$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$

لماذا المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$ ؟

7 - الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

58 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 2]$ بـ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

- احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ارسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باستعمال نافذة مناسبة.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1; 2]$.

(4) باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعتة 10^{-2} .

59 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 5$$

- ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها
- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.
- باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذا الحل.

51 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; 2]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; 0 < x \leq 1 \\ f(x) = -2x + 3 & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

- هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حولا في المجال $[0; 2]$ ؟
- تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في $[0; 2]$.

52 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$$

- احسب $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(1)$
- استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1; 1]$

53 f هي الدالة المعرفة على $[-3; 6]$ بـ:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

- ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها
 - ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 30$.
- 54** بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

55 بين أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلا في المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

$$I = [-1; 0] \quad , \quad 2x^3 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$I = [1; 2] \quad , \quad x^5 + 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$I = \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad , \quad x^4 + 4x - 3 = 0 \quad (3)$$

$$I = \left[1; \frac{3}{2}\right] \quad , \quad -x^3 + 3x^2 = 3 \quad (4)$$

$$I = [0; \pi] \quad , \quad \frac{1}{2} \sin x + 2 = x \quad (5)$$

56 لتكن f دالة مستمرة على المجال $[-3; +\infty]$

و جدول تغيراتها هو الآتي:

60 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; 2]$ بـ:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا

α في $[1; 2]$ (3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} α

61 بين أن المعادلة $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ تقبل حلا وحيدا

في المجال $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$.

62 بين أن المعادلة $\frac{1}{x+2} = 2 \cos x$ تقبل حلا وحيدا

في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

63 لتكن الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ:

$$f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α من $[0; \pi]$ بحيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

64 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$$

(1) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(2) أ) أحسب f' مشتقة الدالة f ثم ادرس إشارتها.

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا على كل

مجال من المجالات التالية: $[-1; 0]$ ، $[0; 1]$ ، $[2; 3]$

65 دالة معرفة على $[0; \pi]$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin x$$

• بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0; \pi]$ بحيث

$$f(\alpha) = \alpha$$

66 لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$$

(1) بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $D = [0; 2]$

(2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ: $g(x) = f(x) - x$

• بين أن الدالة g متناقصة تماما على D .

• احسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة

$f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

67 نعتبر الدالتين $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g: x \mapsto -x^3$

• بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f

و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

$$\text{حيث } -\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}$$

تمارين للتعمق

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

68 f هي الدالة المعرفة على $[-3; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

(1) أوجد عدداً حقيقياً A حيث إذا كان $x > A$ فإن

$f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99; 1,01[$.

(2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ مقارب

للمنحني C_f الممثل لدالة f ، ثم ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى Δ .

69 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. أوجد عدداً حقيقياً $A > 0$

حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) > 10^6$

70 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

(1) ادرس نهاية الدالة f عند 1.

(2) أوجد مجالا I مركزه 1 حيث من أجل كل x من I ،

$$f(x) > 10^6$$

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

71 لتكن الدالة f حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$

و (C) تمثيلها البياني.

عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث: (C) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $x=1$ و مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته

$$y = 2x + 3 \text{ عند } -\infty \text{ و عند } +\infty \text{ ويشمل النقطة } A(0;4)$$

72 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

(1) عين a, b, c, d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$
 يكون

(2) استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

(3) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى Δ .

73 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$

(2) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل Δ للمنحني (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أنه يوجد عدنان حقيقيان α و β بحيث

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta$$

ج) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيماً مقارباً Δ' عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

74 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^+$ على

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \text{ : الترتيب بـ :}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4x} \text{ و}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]$

• ما هو التخمين الذي تضعه حول السلوك التقاربي

للدالتين f و g عند $+\infty$ ؟

(3) حدّد بدون حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x+2)]$

ماذا تستنتج ؟

75 f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم.

(1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x + 3$ مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$

(2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و Δ .

76 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم.

(1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

(2) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right]$

(4) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين

Δ و Δ' يطلب تعيين معادلتيهما.

(5) حدّد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من Δ و Δ' .

المنحنيات المتقاربة

77 f هي الدالة المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x+2}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .
 1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.
 2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$
 ب) اشرح لماذا المنحني (C) و المنحني (P) الذي
 معادلته $y = x^2$ " يتقاربان شيئاً فشيئاً " عندما يؤول x إلى
 $+\infty$.
 نقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) و (P) متقاربان
 عند $+\infty$.
 ج) ارسم (C) ثم (P) .

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .
 1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.
 2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$
 ب) اشرح لماذا المنحني (C) و المنحني (P) الذي
 معادلته $y = x^2$ " يتقاربان شيئاً فشيئاً " عندما يؤول x إلى
 $+\infty$.
 نقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) و (P) متقاربان
 عند $+\infty$.
 ج) ارسم (C) ثم (P) .

78 f هي الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .
 1) ابحث عن منحن (P) مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ ، ثم
 حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P) .
 2) هل (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$.

79 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .
 ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب
 للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم حدد الوضعية النسبية
 لـ (C) و (P) .

80 f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم
 . ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب

3 - تتمات على النهايات

81 f هي الدالة المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{-1; 4\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 3x - 4}$$

(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c حيث من أجل

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4} \quad \text{كل } x \text{ من } D$$

(2) ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة
 التعريف.

82 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف

الدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x - 3} \quad (2) \quad f(x) = \frac{3x}{(x+1)^2}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2 - 4} \quad (6) \quad f(x) = \frac{(x+2)^3 - 8}{x}$$

83 باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 3}$$

حيث $a > 0$ و $b > 0$

84 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$$

85 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

86 علما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x}$$

87 احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad (4), \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x} \quad (6), \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \quad (5)$$

88 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{3}$ لكل من

الدالتين $x \mapsto \sin 3x$ و $x \mapsto 2 \cos x - 1$ ،

احسب النهاية التالية $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1}$

89 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من

الدالتين $x \mapsto \tan x$ و $x \mapsto 2 \cos x - \sqrt{2}$ ، احسب

النهاية التالية $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}$

90 بين باستعمال طريقة مناسبة أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$$

و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x = 2$

و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$

4 - نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

91 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (4), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2-x+3} \quad (3)$$

92 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right) \quad (4), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right) \quad (6), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} \quad (5)$$

93 نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad x > 1$$

(1) بين أنه إذا كان $x > 1$ فإن: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

94 (1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$0 \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

95 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$$

ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

103 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} ; x > 0 \\ f(x) = \frac{1-x^2}{x-2} ; x \leq 0 \end{cases}$$

بين لن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

104 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

عين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

105 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - a ; x > 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - a + b}{x} ; x \leq 2 \end{cases}$$

حيث a و b عدنان حقيقيان ثابتان.

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2.

6 - مبرهنة القيم المتوسطة-الدوال المستمرة والرتبية تماما

106 f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ بحيث

$$f(b) > b^2 \text{ و } f(a) < ab$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a; b]$ بحيث

$$f(c) = bc$$

107 f دالة مستمرة على المجال $[0; 1]$ بحيث

$$f(1) = 1 \text{ و } f(0) = 0$$

96 (1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

(2) استنتج النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \quad (\text{ب}) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad (\text{أ})$$

97 باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x-1} , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+4(-1)^x}{x}$$

98 من أجل $x > 0$ ، قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+5} - x$$

99 من أجل $x > 1$ ، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2-1} - 3x$$

100 من أجل كل $x > 0$ ، قارن $\sqrt{2x^2+x+1}$

$$\text{و } x\sqrt{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+x+1} - x$$

101 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} < -2x$$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq -4x^2 \text{ ثم احسب } f(x)$$

5 - الاستمرارية

102 ادرس استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من

الحالتين التاليتين :

مسائل

111 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O; I, J)$.

(1) أ) عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2} : x \neq 1$$
 كل عدد حقيقي

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C_f والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$ ؟ برر.

ج) حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) ، لتكن A نقطة تقاطع C_f و (d) .

(3) ارسم C_f و (d) . (تؤخذ الوحدة $2cm$ على (Ox) و $1cm$ على (Oy)).

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty; 1[$. استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .

(5) استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي.

(6) أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب

بين أن فواصل نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2 - (2m+7)x + m+4 = 0$$

ب) جد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

112 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0; 1[$ بحيث

$$f(c) = \frac{1-c}{1+c}$$

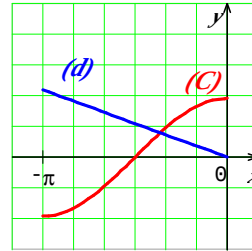
108 f دالة مستمرة معرفة على المجال $I =]0; 1[$

بحيث من أجل كل x من I ، $f(x) \in I$.

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث

$$f(\alpha) = \alpha$$

109 في الشكل المقابل المنحني



(C) هو التمثيل البياني للدالة

$x \mapsto \cos x$ و (d) هو التمثيل

البياني للدالة $x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}x$

على المجال $I = [-\pi; 0]$

(1) خمن عدد حلول المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ في

المجال I

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I كما يلي :

$$f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

أ) تحقق من أن الدالة f تقبل الاشتقاق على I و احسب $f'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) استنتج أن المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا واحدا

α في المجال I .

110 عدد طبيعي غير معدوم.

(1) بين أن المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا

محسورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2.

(2) هل المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا

كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

114 نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجموعة

$$[1; +\infty[\cup]-\infty; -1]$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{و}$$

و C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$
 متعامد و متجانس

(1) أ) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب) عين نهاية الدالة f عند $-\infty$. استنتج أن المنحني C_f

يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً.

ج) بين أن المستقيم $\Delta: y = 2x$ مقارب للمنحني C_f

عند $+\infty$.

(2) أ) احسب $f(x) \times g(x)$ ثم استنتج نهايات الدالة g

عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

ج) قارن بين $g(x) - 2x$ و $f(x)$.

استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - 2x$ ، أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.

(3) نعتبر المنحني $(\Gamma) = C_f \cup C_g$.

بين أن معادلة (Γ) هي $y^2 - 2xy + 1 = 0$

(4) ليكن الشعاع $\vec{u}$ من المستوي حيث $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

نرمز بـ $(x; y)$ لحدثينتي النقطة M في المعلم

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

و بـ $(x'; y')$ لحدثياتها في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{u})$

أ) عبر عن x و y بدلالة x' و y' .

ب) عين معادلة (Γ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{u})$.

ج) ما طبيعة (Γ) .

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \text{بـ :}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

(1) بين أن الدالة f فردية

(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

(3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$. حدّد وضعية (C) بالنسبة لـ Δ

(4) باستعمال نتيجة السؤال (1) استنتج أن المنحني (C)

يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

(5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على

$$[2; +\infty[\cup]-\infty; -2]$$

• عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C') .

113 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ :

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

(1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة

التعريف.

(2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها.

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y = x + 1$ و

$\Delta': y = -x - 1$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

على الترتيب.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال

$[1; +\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على

المجال $]-\infty; -1]$.

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً α على

المجال $]-1; 1]$ ، وأعط حصرًا لـ α سعته 10^{-1} .

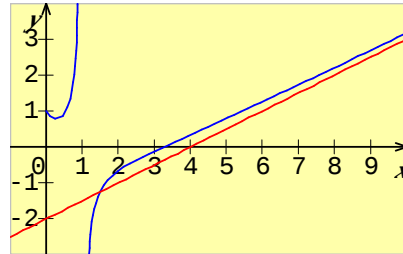
اختبار من متعدد

115 عين الإجابة الصحيحة دون تبرير

في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني C_f لدالة f معرفة

على $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2(x^2 - 1)}$$



(أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ C_f

(ب) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ C_f

(ج) C_f لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا و لا عموديا.

(2) من أجل كل من $]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2}x + a + \frac{bx+c}{2(x^2-1)}$

(أ) $c=-3$ ، $b=2$ ، $a=-2$

(ب) $c=-3$ ، $b=-2$ ، $a=2$

(ج) $c=3$ ، $b=2$ ، $a=1$

(3) C_f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

(أ) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (ب) $y = \frac{1}{2}x + 2$ (ج) $y = \frac{1}{2}x - 2$

(4) (أ) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

(ب) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

(ج) C_f لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة.

(5) على المجال $[0; 1[$ ، المعادلة $f(x) = 1$ تقبل:

(أ) حلا واحدا (ب) حلين متمايزين (ج) ثلاثة حلول.

116 f معرفة على $\mathbb{R} - \{5\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 5}$

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(3) من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{5\}$:

$$f(x) = 3x + 10 + \frac{50}{x - 5}$$

(4) المستقيمان اللذان معادلتهما $x=5$ و $y=3x+10$

مقاربان لمنحني الدالة f .

صحيح أم خاطئ

117 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق

على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-
$f(x)$	$1 \nearrow 2 \searrow -\infty$			$-\infty \nearrow 3 \searrow -\infty$		

نرمز بـ C_f إلى منحنى الدالة f الممثل في معلم. أجب

بصحيح أو خاطئ على كل جملة من الجمل التالية:

(1) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ C_f .

(2) محور الترتيب مقارب لـ C_f .

(3) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع C_f في نقطة واحدة.

(4) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجال $]0; +\infty[$.

(5) على المجال $]0; +\infty[$ ، $f(x) \leq 3$

118 f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $]0; +\infty[$ ، إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$
 (أ)

(ب) من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) < f(0)$

(ج) منحني الدالة f يقطع محور الفواصل على الأقل في

نقطة.

119 C_f هو المنحني الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في

معلم متعامد و متجانس و Δ المستقيم الذي معادلته

$$y = 1 - x$$

(1) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $-\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(2) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب

أفقي لـ C_f .

(3) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ فلا يمكن لـ Δ أن يكون

مقاربا لـ C_f .

(4) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $+\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$
 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{\pi \sin x}{2x} \right) = 1$$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 1$ (3)