الموضوع الأول

التمرين الأول: (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$:

01) **التحقق:** من أجل $n = 0$.

لدينا: $U_0 = 1 > -2$,...... (محققة)

02) **الفرضية:** نفرض أنَّ الخاصية صحيحة من أجل n أي: $u_n > -2$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $U_{n+1} > -2$.

لدينا , حسب الفرضية : $u_n > -2$. و منه: $U_n + 5 > 3$. ومنه $\frac{1}{U_n + 5} < \frac{1}{3}$.و منه: $-\frac{9}{U_n + 5} < -3$ و منه: $1 - \frac{9}{U_n + 5} < -2$.

و منه: $U_{n+1} > -2$.

03) **الاستنتاج:** نستنتج أنَّ :الخاصية صحيحة من أجل n أي: $u_n > -2$ ..

ب- إثبات أنّ (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

و يعني إثبات أنّ: $U_{n+1} - U_n < 0$.

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n$$
$$= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5}$$
$$= \frac{-u_n^2 - 5u_n + u_n - 4}{u_n + 5}$$
$$= \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5}$$
$$= \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0$$

و بالتالي : (U_n) متناقصة.

بما أنّ: (U_n) متناقصة تماما على و محدودة من الاسفل فهي متقاربة.

2) **لدينا:** $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

- إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$. أي نثبت أنّ: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}$.

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ و منه: $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2}$ و منه: $v_{n+1} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2}$ و منه: $v_{n+1} = \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6}$.

الموضوع الأول

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+5}{3(u_n+2)}-\frac{1}{u_n+2}$$
$$=\frac{u_n+5}{3(u_n+2)}-\frac{3}{3(u_n+2)}$$
$$=\frac{u_n+2}{3(u_n+2)}$$
$$=\frac{1}{3}$$

. و منه: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$.

الحد الأوّل: $\frac{1}{3}=\frac{1}{u_0+2}=v_0$.

3)

- v_n بدلالة n: $v_n=v_0+nr\,;\,r\in\mathbb{R}$. و منه: $v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}(n+1)$.

- u_n بدلالة n: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ و منه: $u_n=\frac{1}{v_n}-2=\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}-2=\frac{3}{n+1}-2$.

حساب نهاية (u_n): $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n+1}-2\right)=-2$.

4) إثبات أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}: u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$:

لدينا: $u_n=\frac{1}{v_n}-2$ ومنه: $u_nv_n=1-2v_n$.

إذن:

$$u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=(1-2v_0)+(1-2v_1)+\ldots+(1-2v_n)$$
$$=\Big(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{(n+1)\,fois}\Big)-2(v_0+v_1+\ldots+v_n)$$
$$=(n+1)-2\left(\frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}\right)$$
$$=(n+1)-2\left(\frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n+1)\right)}{2}\right)$$
$$=(n+1)-(n+1)\left(\frac{1}{3}(n+2)\right)$$
$$=(n+1)\left(1-\frac{1}{3}(n+2)\right)$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)(1-n)$$
$$=\frac{1}{3}(1-n^2)$$

الموضوع الأول

التمرين الثاني:

نسحب عشوائياً 3 كريّات وَ في آنٍ واحد.

✍ عدد الحالات الممكنة لهذا السحب.

عندما نسحب في آن واحد ثلاث كريّات من بين 10 كريّات فإنه توجد C_{10}^{3} نتيجة ممكنة.

بما أنّ السحب في آن واحد فإن عدد الحالات الممكنة هو: $card(\Omega)=C_{10}^{3}=120$.

حيث: Ω مجموعة الإمكانيات.

✍ إحتمال الحادثة A :

لدينا : A :" الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني".

$Card(B) : \{●○●\}$. في هذه الحالة الأرقام غير مهمة.

تظهر ألوان العلم الوطني معناه: سحب كريّة حمراء و كريّة بيضاء و كريّة خضراء.

و منه: $card(A)=C_3^1\times C_4^1\times C_3^1=36$.

إذن :

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{3}{10}.$$

✍ إحتمال الحادثة B :

لدينا: B :" الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم".

الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم معناه: سحب ثلاث كريات تحمل الرقم 2 أو سحب ثلاث كريات تحمل الرقم 3.

$Card(B) : \{②②②\}\cup\{③③③\}$. في هذه الحالة الألوان غير مهمة.

إذن: $card(B)=C_5^3+C_4^3=14$.

$$P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{7}{60}.$$

ب) إثبات $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$:

$Card(A\cap B) : \{❷❷②\}\cup\{❸❸③\}$

$Card(A\cap B)=C_1^1\times C_2^1\times C_2^1+C_2^1\times C_1^1\times C_1^1=6$.

$$P(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{card(\Omega)}=\frac{6}{20}=\frac{1}{20}.$$

الموضوع الأول

إستنتاج $P_A(B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{7}{60}-\frac{1}{20}=\frac{11}{30}$$

لدينا: X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقماً فردياً.

✓ تعيين قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X :

قيم المتغير العشوائي X هي: $\{0;1;2;3\}$.

يُقصد بقانون المتغيّر العشوائي X التطبيق P_X المعرّف كما يلي:

$$P_X:\{0;1;2;3\}\mapsto[0;1]$$

$$K\mapsto P_X(K)=P(X=K)$$

لدينا: $P(X=0)$ يعني احتال الكريات المسحوبة لا تحتوي على أي رقم فردي.

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}.$$

لدينا: $P(X=1)$ يعني إحتال الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقماً فردياً. و كريتان تحملان رقماً زوجياً(ليست فرديا).

$$P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}.$$

لدينا: $P(X=2)$ يعني إحتال الحصول على كريتان فقط تحملان رقماً فردياً و كرية واحدة تحمل رقماً زوجياً.

$$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}.$$

لدينا: $P(X=3)$ يعني إحتال الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقامًا فردية.

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}.$$

و بالتالي قانون إحتمال X يكون كما يلي:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{10}{120}$

الموضوع الأول

✓ حساب الأمل الرياضياتي:

$$E(x)=\left(0\times\frac{10}{120}\right)+\left(1\times\frac{50}{120}\right)+\left(2\times\frac{50}{120}\right)+\left(3\times\frac{10}{120}\right)$$
$$=0+\frac{50}{120}+\frac{100}{120}+\frac{30}{120}$$
$$=\frac{3}{2}$$

التمرين الثالث:

1) حل المعادلة: $z^2-\sqrt{3}z+1=0;.....(1)$:

$\Delta=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4(1)(1)(1)=-1$. ومنه المعادلة (1) تقبل حلين مترافقين.

$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right\}$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، النقط A، B وَ C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$، $z_C=\overline{z_B}$.

-كتابة z_A على الشكل الأسي: $|z_A|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$، $arg(z_A)$: $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$، و منه: $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

-كتابة z_B على الشكل الأسي: $|z_B|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right|=1$، $arg(z_B)$: $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$، و منه: $z_B=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

الموضوع الأول

- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^n = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^n = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{n\pi}{6}\right)} = \underbrace{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{z_A}.$$

$$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n = 2+12k$$

3) أ- التحقق أن : $\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا: $\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- استنتاج أن B صورة C بدوران r يُطلب تعيين عناصره المميزة:

لدينا: $\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (z_B-z_O) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_O).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases};\ldots\ldots.(\otimes)$$

نستنتج أنّ: B صورة C بالدوران r الذي :

1/ مركزه : المبدأ

2/ زاويته $\frac{\pi}{3}$.

من العلاقة $(\otimes)$ نستنتج أنّ: المثلث OBC متقايس الأضلاع.

الموضوع الأول

4) لدينا: $(\gamma): |z| = \left|\overline{z} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right|$.

$$|z| = \left|\overline{z} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| \Leftrightarrow |z| = \left|\overline{z} - z_B\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overline{z}\right| = \left|\overline{\overline{z} - z_B}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overline{z}\right| = \left|\overline{\overline{z}} - \overline{z_B}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|z\right| = \left|z - z_C\right|$$

$$\Leftrightarrow OM = CM$$

و منه المجموعة (γ) هي محور القطعة $[OC]$.

بما أنّ: B صورة C بالدوران r . $(OB = OC)$ فإنّ صورة (γ) بالدوران r . فإنّ (γ') هي محور القطعة $[OB]$.

طريقة ثانية :

$$|z| = \left|\overline{z} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| \Leftrightarrow |x+iy| = \left|x - iy - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|; (z = x+iy)$$

$$\Leftrightarrow |x+iy| = \left|\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(y + \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{1}{4} + y$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}x + 1 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 1$$

و منه: المجموعة (γ) هي:
المستقيم ذو المعادلة : $y = \sqrt{3}x - 1$

طريقة: لإيجاد معادلة لـ : (γ') صورة (γ) بالدوران r:

يمكن أنّ نختار نقطتين من المستقيم (γ).ثم نبحث عن صورتاهما بالدوران r.

لدينا مثلاً: $I(0;-1) \in (\gamma)$ ذات اللاحقة $z_I = -i$ وَ $J(\sqrt{3};2) \in (\gamma)$ ذات اللاحقة $z_J = \sqrt{3} + 2i$.

r هو الدوران الذي مركزه O و $\frac{\pi}{3}$ زاوية له, عبارته المركبة من الشكل: $r: z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

نبحث عن $I'(z_{I'})$ صورة $I(z_I)$ بالدوران r:	نبحث عن $j'(z_{J'})$ صورة $J(z_J)$ بالدوران r:
$z_{I'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_I = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. و منه: $I'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.	$z_{J'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_J = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + 2i) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$. و منه: $J'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

نعلم أنّ (γ') هي مستقيم معادلته من الشكل $(\gamma'): y = ax + b; ...(\oplus)$ حيث a وَ b عددان حقيقيان و $a \neq 0$.

و لإيجاد a وَ b نعوض إحداثيات I' وَ J' في $(\oplus)$.

بعد التعويض نجد: $(\gamma'): y = -\sqrt{3}x + 1$.

الموضوع الأول

التمرين الرّابع:

الجزء الأوّل:

نعتبر الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

أ - حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+(x-1)e^{-x}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)$ $=2$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)$ $=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

ب - أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها:

- حساب الدالة المشتقة:

لدينا : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$ و منه:

$$\begin{aligned} g'(x)&=e^{-x}-e^{-x}(x-1)\\ &=e^{-x}(1-x+1)\\ &=e^{-x}(2-x)\end{aligned}$$.

إشارة المشتقة:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

من الجدول نستنتج:

- الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.
- الدالة g متناقصة على المجال $[2;+\infty[$.

الموضوع الأول

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(2)\approx 2.14$	$\searrow$	2

ج - إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيداً α حيث : $-0.38<\alpha<-0.37$:

لدينا:

1) g مستمرة على المجال $[-0.38;-0.37]$.

2) g رتيبة(متزايدة تماما) على المجال $[-0.38;-0.37]$.

3) $g(-0.37)\approx 0.02$ و $g(-0.38)\approx -0.02$

أي: $g(-0.38)\times g(-0.37)<0$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا α في المجال $[-0.38;-0.37]$ يُحقق: $g(\alpha)=0$.

إشارة الدالة g.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني:

f الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ – حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\frac{x}{e^{x}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

ب – حساب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^{x}}\right)=0$.

و نفسّر ذلك هندسيا أنّ: (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً و $y=2x+1$ معادلة له.

الموضوع الأول

ج – دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و $(\Delta): y = 2x+1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$. لدينا : $f(x)-(2x+1) = -xe^{-x}$.

x		0	
$-x$	$+$	0	$-$
$f(x)-(2x+1)$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)
	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة: $(0;f(0))=(0;1)$.		

2) إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=g(x)$.

لدينا: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$. و منه: $f'(x)=2-(e^{-x}-xe^{-x})=2-e^{-x}+xe^{-x}=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

- إشارة f' هي من إشارة g.
  - جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

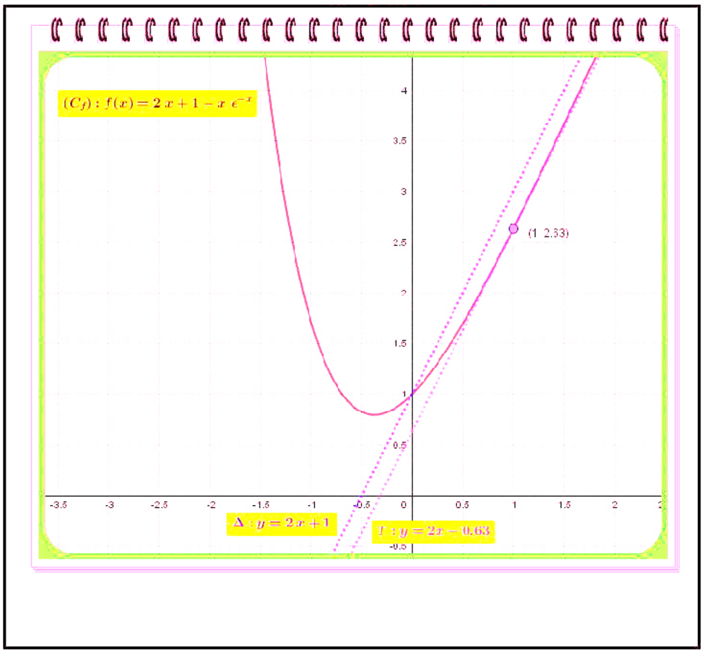
3) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

$(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

$x_0=1 \Rightarrow (T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$.

نجد: $(T): y = 2x+1-\dfrac{1}{e}$.

4) إنشاء (Δ) و (T) و (C_f) :



الموضوع الأول

5) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $x=(1-m)e^{x}$:

لدينا: $x=(1-m)e^{x} \Leftrightarrow xe^{-x}=(1-m)$.

$$\Leftrightarrow -xe^{-x}=-1+m$$
$$\Leftrightarrow 1-xe^{-x}=m$$
$$\Leftrightarrow 2x+1-xe^{-x}=2x+m$$
$$\Leftrightarrow f(x)=2x+m$$

أي نبحث عن عدد و فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و $(\Delta_m): y=2x+m$:

عدد و إشارة الحلول المطلوبة	قيم m
لا توجد حلول	لما: $m\in\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ — المماس (T) يقع تحت (C_f)
حل وحيد هو 1	لما: $m=1-\frac{1}{e}$
حلان موجبان تماما	لما: $1-\frac{1}{e}<m<1$
حل وحيد معدوم	لما: $m=1$.
حل وحيد سالب تماما	لما $m>1$.

6) أ – بإستعمال التكامل بالتجزئة . إيجاد دالة أصلية للدالة $h: x\mapsto xe^{-x}$:

نضع: $(u(x)=x)\wedge(v'(x)=e^{-x})$ و منه : $(u'(x)=1)\wedge(v(x)=-e^{-x})$.

إذن:

$$\int xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]-\int -e^{-x}dx$$
$$=\left[-xe^{-x}\right]+\int e^{-x}dx$$
$$=\left[-xe^{-x}\right]-e^{-x}+c;\ (c\in\mathbb{R})$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+c$$
$$=e^{-x}(-x-1)+c$$

إذن: $h(x)=e^{-x}(-x-1)+c$ مع $(c\in\mathbb{R})$.

$h(1)=0 \Leftrightarrow e^{-1}(-1-1)+c=0$.

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{e}+c=0$$
$$\Leftrightarrow c=\frac{2}{e}$$

إذن: الدالة الأصلية للدالة $h: x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $h(x)=e^{-x}(-x-1)+\frac{2}{e}$

ب – حساب المساحة المطلوبة:

$$A=\int_1^3((2x+1)-f(x))dx$$
$$=\int_1^3 xe^{-x}dx$$
$$=\left[e^{-x}(-x-1)+\frac{2}{e}\right]_1^3$$
$$=\left(-4e^{-3}+\frac{2}{e}\right)\ \text{unité d'aire}$$