الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربيـة الوطنيـة — مديرية التربية لولايـة الشلف — ثانوية الحاج ميلود عبدالحميد

إمتحان البكالوريا التجريبي — دورة: جوان 2018

الشعبـة: علوم تجريبية — إختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 ساعات

على كل مترشِّح أن يَختار أحد الموضُوعين التاليين :

المَوضُوع الأَول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1) أحسب u_1 و v_1 .

2) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n .

3) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

بيّن أنّ : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

1) أكتب العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

2) n عدد طبيعي، L_n هو العدد المركب المعرف بما يلي : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n

ثمّ إستنتج قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

3) تحقق أنّ : $z_C = i\, z_A$ ثمّ إستنتج طبيعة المثلث OAC .

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$\arg\left(3 + i\sqrt{3} - z\right) - \arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

مع $k \in \mathbb{Z}$ ،تحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ عين طبيعتها .

5) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة $z_D = \overline{z_C}$ ، بيّن أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

6) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 3 - \sqrt{3}$ ، S التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطة A إلى النقطة C. عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثمّ إستنتج أنّ النقط A ، E ،O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$يطلب تعيين عناصرها.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين متشابهة لانفرق بينها باللمس .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق . نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1) بين أنّ : إحتمال الحدثA $P(A)=\frac{1}{2}$ ثمّ أحسب $P(B)$ إحتمال الحدث B.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) بيّن أنّ : $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$.

ج) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثمّ أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

.I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

.II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$.

نسمي $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$ ثمّ إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$ ثمّ أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$بالنسبة إلى (Δ).

ج) بيّن أن ّالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

د) أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أنشئ (Δ)، (T) و $(\mathscr{C}_f)$.

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$$

.III لتكن H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x)=(ax+b)e^{-x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ : $h(x)=(x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

ب) ليكن λ عددا حقيقيا حيث ، $\lambda>1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=1$ و $x=\lambda$.

أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثمّ أحسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول :(04.5 نقطة)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n < 2$.

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ)بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثمّ عبر عن v_n بدلالة n.

ب)إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .

4) أ) بيّن أنّ : $|u_{n+1} - 2| \le \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب)برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(-1;3;1)$ ، $B(0;5;0)$ ، $E(-3;4;0)$ ، المستوي (Q)ذو المعادلة $2x - y + z - 2 = 0$ و سطح الكرة (S) التي مركزها النقطة A وتمس المستوي (Q).

1) بيّن أنّ نصف قطر سطح الكرة(S) هو $\sqrt{6}$ و أكتب معادلة لـ(S)ثمّ جد إحداثيات نقطتي تقاطع (S) وحامل محور التراتيب.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Q) ثمّ إستنتج إحداثيات النقطة H نقطة تماس (Q)و (S).

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q') الموازي للمستوي (Q) ويمس(S).

4) αعدد حقيقي ، $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء و (P_α) المستوي المعرف بـ : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{EH} = \alpha$.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P_α).

ب)تحقق أنّ A هي منتصف القطعة$[EH]$ثمّ عين قيمة α التي من أجلها يكون (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$.

التمرين الثالث : (04.5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2 - 4z + 8) = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6 - 2i$.

أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثمّ إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة Bبالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S.

ب)تحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$.

ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z + 4| = 8$

تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة .

د) تحقق أنّ $S(D)=E$ ، ثمّ بيّن أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-x-\ln x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثمّ تحقق أنّ: $0.56<\alpha<0.57$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}$.

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ ثمّ إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب) (γ) هو المنحني الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق . أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ، فسّر النتيجة بيانيا ثمّ أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ).

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

د) أحسب $f(2)$ و $f(e)$ ثمّ أنشئ (T)، (γ) و $(\mathcal{C}_f)$.

4) A هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x=\alpha$ و $x=e$.

أحسب بـ cm^2 المساحة A وبدلالة α ثمّ تحقق أنّ : $A=\dfrac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ ثمّ عيّن حصراً للمساحة A .

إنتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا ☹التجريبي 2018 ☺ الموضوع الاول

التصحيح	النقطة مجزأة
التمرين الاول :	**04 نقاط**
لدينا : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$	
1) حساب u_1 و v_1: $u_1=\frac{1}{4}u_0+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2}\times 1=1$ و $v_1=u_1-\left(\frac{3}{4}\right)^1=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	2×0.25
2) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$: (v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$ لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\left(v_n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{4}v_n$ ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\left(\frac{3}{4}\right)^0=2-1=1$	0.75 2×0.25
- التعبير عن الحد العام v_n بدلالة n: لدينا : $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ إذن : $v_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$	0.5
3) إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$: لدينا : $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه $u_n=v_n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ وبالتالي : $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$	0.5
حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0\\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0\end{cases}$	0.25
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ تبيان أنّ : $S_n=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{3}{4}\right)^n$	

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

نضع : $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ و منه $u_n = v_n + a_n$

حيث (a_n) متتالية هندسية حدها الاول $a_0 = 1$ وأساسها $\frac{3}{4}$ 0.25

إذن : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + a_0 + v_1 + a_1 + \cdots + v_n + a_n$

أي $S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = v_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + a_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$

ومنه $S_n = 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$ أي

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

وبالتالي : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 0.5

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \frac{16}{3}$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{16}{3}$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{cases}$ 0.25

التمرين الثاني : 05 نقاط

لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A = \arg(z_A)$

إذن : $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 0.5

الشكل الأسي للعدد z_A هو : $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B : $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ 0.25

7	2) لدينا : العدد المركب $L_n=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ **حساب L_n بدلالة n :** لدينا : $L_n=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n=\left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n=e^{i\times n\frac{\pi}{6}}+e^{-i\times n\frac{\pi}{6}}$ ومنه : $L_n=e^{in\frac{\pi}{6}}+e^{-in\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}+\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)$
0.5	أي $L_n=e^{i\frac{n\pi}{6}}+e^{-i\frac{n\pi}{6}}=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}+\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}$ وبالتالي : $L_n=2\cos\frac{n\pi}{6}$ **إستنتاج قيمة L_{2018} :** $L_{2018}=2\cos\left(\frac{2018\pi}{6}\right)=2\cos\left(336\pi+\frac{2\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$
0.25	إذن $L_{2018}=1$
0.25	3) **التحقق أنّ $z_C=i\,z_A$ ثمّ إستنتاج طبيعة المثلث OAC :** لدينا : $i\,z_A=i\left(3+i\sqrt{3}\right)=3i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+3i=z_C$ أي $z_C=i\,z_A$
0.5	**إستنتاج طبيعة المثلث** OAC : لدينا : $z_C=i\,z_A$ ومنه $\frac{z_C}{z_A}=i$ أي $\frac{z_C-z_O}{z_A-z_O}=i$ إذن لدينا : $\left\|\frac{z_C-z_O}{z_A-z_O}\right\|=\|i\|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي : $OC=OA$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين
0.25	4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ **التحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ تعيين طبيعتها :** O تنتمي إلى (Γ) يعني $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ لدينا : $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)=\arg\left(3+i\sqrt{3}\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i\right)$ أي $\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)-\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)=\arg(z_A)-\arg(z_C)=\arg(z_A)-\arg(i\times z_A)$ ومنه : $\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)-\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)=\arg(z_A)-\arg(z_A)-\arg(i)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه $O\in(\Gamma)$

0.5

تعيين طبيعة (Γ):

$\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ يعني

$\arg\left(z_A-z\right)-\arg\left(z_C-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_C-z}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

أي $\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل النقطة O ماعدا النقطتين A و C

0.5

5) تبيان أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان :

لدينا : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}=\frac{\overline{z_C}-z_A}{i\,z_A-\overline{z_A}}=\frac{-i\,\overline{z_A}-z_A}{i\,z_A+i^2\,\overline{z_A}}=\frac{-\left(z_A+i\overline{z_A}\right)}{i\left(z_A+i\overline{z_A}\right)}=-\frac{1}{i}=i$

ومنه : $\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ يعني $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$

وبالتالي: المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان

0.5

2×0.25

6) تعيين نسبة وزاوية التشابه S:

لدينا : العبارة المركبة للتشابه S من الشكل : $z'=az+b$

ولدينا : $\begin{cases}S(A)=C\\S(E)=E\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z_C=a\,z_A+b\\z_E=a\,z_E+b\end{cases}$ وبالتالي

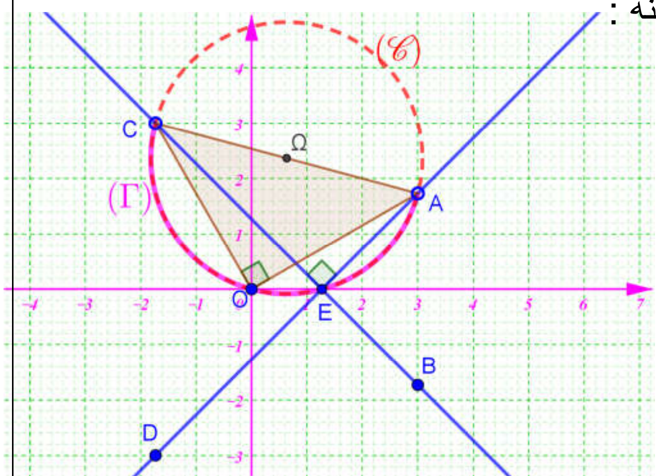
$$a=\frac{z_C-z_E}{z_A-z_E}=\frac{-\sqrt{3}+3i-3+\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}-3+\sqrt{3}}=\frac{3i-3}{i\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)}\times\frac{1-i}{1-i}$$

ومنه : $a=\frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2i=i\sqrt{3}$ إذن : $a=i\sqrt{3}$

نسبة التشابه S : $k=|a|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ وزاوية التشابه S : $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{2}$

0.5

إستنتاج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$:



لدينا : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه :

AEC و AOC مثلثان قائمان .

وبالتالي النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها Ω منتصف القطعة $[AC]$ ونصف قطرها

$$r=O\Omega=\left|z_\Omega\right|=\left|\frac{z_C+z_A}{2}\right|=\left|\frac{iz_A+z_A}{2}\right|$$

$$r=\frac{\left|z_A(1+i)\right|}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$$

التمرين الثالث — 04 نقاط

لدينا : صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين
نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق.

1) تبيان أنّ : $P(A)=\frac{1}{2}$

$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{3\times 35}{210}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$$

حساب $P(B)$:

$$P(B)=\frac{C_5^1\times C_5^3+C_5^2\times C_5^2+C_5^3\times C_5^1+C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{5\times 10+10\times 10+10\times 5+5}{210}$$

أي $P(B)=\frac{205}{210}=$

2×0.5

2) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X :

قيم X هي $\{0;1;2;3\}$

0.75

ب) تبيان أنّ : $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$:

لدينا : $P(X=0)=\frac{C_3^0\times C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1\times 35}{210}=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3\times 21}{210}=\frac{3}{10}$

2×0.5

ج) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X معرف بالجدول :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

لدينا : $P(X=3)=\frac{C_3^3\times C_7^1}{C_{10}^4}=\frac{1\times 7}{210}=\frac{1}{30}$ و $P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{3\times 35}{210}=\frac{1}{2}$

0.75

حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=1.2$$

0.5

التمرين الرابع : — 07 نقاط

I. لدينا $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-2)e^{-x+2}\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^{-x+2}=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-2)e^{-x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)=2$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{e^{x-2}}=0$

2×0.25

حساب المشتقة :

$g'(x)=e^{-x+2}+(x-2)\left(-e^{-x+2}\right)=(1-x+2)e^{-x+2}=(3-x)e^{-x+2}$ أي $g'(x)=(3-x)e^{-x+2}$

0.25

دراسة إشارة المشتقة :

$g'(x)=0$ يعني $(3-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $3-x=0$ لأن $e^{-x+2}\neq 0$

أي $x=3$

جدول إشارة المشتقة : إشارة المشتقة من إشارة $3-x$ لأن $e^{-x+2}>0$

$x\in$	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		+	0	-	
$g'(x)$		+	0	-	

0.25

جدول تغيرات الدالة g :

$x\in$	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2-e^{-1}$	↘	2

0.25

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.14;1.15]$

ولدينا : $\begin{cases} g(1.14)=2+(1.14-2)e^{-1.14+2}=-0.03 \\ g(1.15)=2+(1.15-2)e^{-1.15+2}=0.01 \end{cases}$ أي $g(1.14)\times g(1.15)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$.

0.25

3) إستنتاج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$:

$x\in$	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

$g(x)<0$ إذا كان $x\in]-\infty;\alpha[$

$g(x)=0$ إذا كان $x=\alpha$.

$g(x)>0$ إذا كان $x\in]\alpha;+\infty[$.

0.25

.II لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[2x\left(1-\frac{1}{2x}-\left(\frac{x-1}{2x}\right)e^{-x+2}\right)\right]=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=+\infty$

لأنّ $\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{=1}\times\underbrace{\frac{x-2}{e^{x-2}}}_{=0}=0$

2×0.25

2) تبيان أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$:

لدينا :

$f'(x)=2-\left[e^{-x+2}-(x-1)e^{-x+2}\right]=2-(2-x)e^{-x+2}=2+(x-2)e^{-x+2}=g(x)$

0.25

جدول تغيرات الدالة f :

$x\in$	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0.5

3) أ) تبيان أنّ : $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$ ثمّ إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ و منه $2+(\alpha-2)e^{-\alpha+2}=0$ أي $e^{-\alpha+2}=-\frac{2}{\alpha-2}$

إذن : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)\left(\frac{-2}{\alpha-2}\right)=2\alpha-1+\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}=2\alpha-1+2+\frac{2}{\alpha-2}$

إذن $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$

0.5

حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1.14<\alpha<1.15$ ومنه

$1.14-2<\alpha-2<1.15-2$

$-0.86<\alpha-2<-0.85$

$\frac{2}{-0.85}<\frac{2}{\alpha-2}<\frac{2}{-0.86}$

$-2.35<\frac{2}{\alpha-2}<-2.32$

و

$2\times1.14+1<2\alpha+1<2\times1.15+1$

$3.28<2\alpha+1<3.30$

وبالتالي $3.28-2.35<2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}<3.30-2.32$ أي $0.93<f(\alpha)<0.98$

0.25

ب) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}-(2x-1)\right]$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=0$

أي المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$

دراسة الوضعية النسبية للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=-(x-1)e^{-x+2}$

$x\in$	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
$f(x)-y$		+	0	-	
الوضع النسبي		$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)	

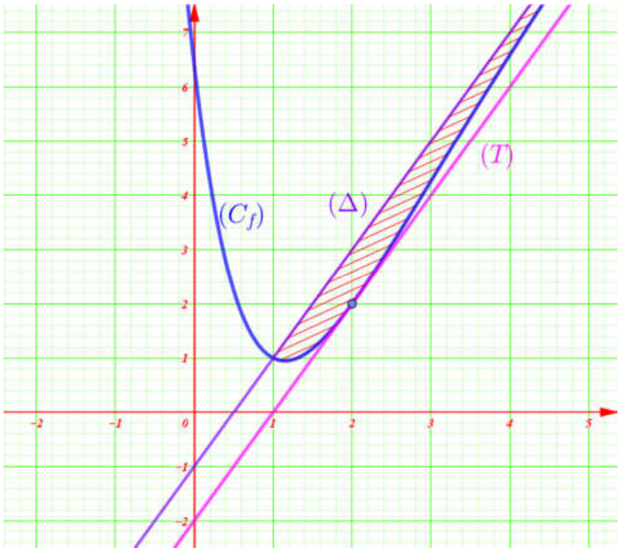
0.5

ج) تبيان أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي المستقيم (Δ) يعني معامل توجيه (T) يساوي 2 أي $f'(x)=2$

إذن : $2+(x-2)e^{-x+2}=2$ ومنه $(x-2)e^{-x+2}=0$

0.5

<table>
<tr><td>وبالتالي $x=2$
كتابة معادلة المماس (T):
$y=f'(2)(x-2)+f(2)=2(x-2)+2=2x-2$ أي $(T): y=2x-2$</td><td></td></tr>
<tr><td>**د) حساب $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أنشاء (Δ)، (T) و $(\mathscr{C}_f)$:**
$f(0)=2\times 0-1-(0-1)e^{2-0}=-1+e^{2}\simeq 6.39$
$f(2)=2\times 2-1+(2-1)e^{2-2}=2$

</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>**4) مناقشة حلول المعادلة :** $(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$
(E) تكافئ $-1-(x-1)e^{-x+2}=-2m$
تكافئ $2x-1-(x-1)e^{-x+2}=2x-2m$
ومنه $f(x)=2x-2m$
حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة $y=2x-2m$ الموازي لكل من (Δ) و(T).
- إذا كان $-2m\in\left]-\infty;-2\right[$ أي $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإنّ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $-2m=-2$ أي $m=1$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد موجب.
- إذا كان $-2m\in\left]-2;-1\right[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ فإنّ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $-2m\in\left]-1;-1+e^{2}\right[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{e^{2}}{2}\right[$ فإنّ المعادلة لها حل موجب .
إذا كان $-2m=-1+e^{2}$ أي $m=\frac{1}{2}-\frac{e^{2}}{2}$ فإنّ المعادلة لها حل معدوم .
- إذا كان $-2m\in\left]-1+e^{2};+\infty\right[$ أي $m\in\left]-\infty;\frac{1}{2}-\frac{e^{2}}{2}\right[$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد سالب .</td><td>0.75</td></tr>
</table>

III. لدينا : $H(x)=(ax+b)e^{-x+2}$ أ) **تعيين العددين الحقيقيين** a و b **بحيث تكون الدالة** H **دالة أصلية للدالة** h **المعرفة بـ :** $h(x)=(x-1)e^{-x+2}$ **على** $\mathbb{R}$ **:** لدينا : $H'(x)=a\times e^{-x+2}+(ax+b)(-e^{-x+2})=(a-ax-b)e^{-x+2}$ $H'(x)=(a-b-ax)e^{-x+2}$ H دالة أصلية للدالة h يعني $H'(x)=h(x)$ أي $(a-b-ax)e^{-x+2}=(x-1)e^{-x+2}$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-a=1\\ a-b=-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}$ أي $H(x)=-xe^{-x+2}$	0.25
ب) حساب $A(\lambda)$: في المجال $[1;\lambda]$ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت المستقيم (Δ) ومنه $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(2x-1-f(x))\,dx=\int_1^{\lambda}(x-1)e^{2-x}\,dx=[H(x)]_1^{\lambda}$ إذن : $A(\lambda)=H(\lambda)-H(1)=-\lambda e^{2-\lambda}+e$	0.25
حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda e^{2-\lambda}+e)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\lambda}{e^{\lambda}}\times e^{2}\right)+e=e$	0.25

إنتهى تصحيح الموضوع الأول

تصحيح الموضوع الثاني

التصحيح	العلامة مجزأة
التمرين الاول	**04.5 نقطة**

لدينا : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+2}$

1) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<2$: (0.5)

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=1$ و $1\le 1<2$ ومنه $1\le u_0<2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$.

لدينا : $1\le u_n<2$ فرضا .

ومنه : $3\le u_n+2<4$

إذن : $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{u_n+2}\le\dfrac{1}{3}$ ومنه $-\dfrac{8}{3}\le-\dfrac{8}{u_n+2}<-\dfrac{8}{4}$

وبالتالي : $4-\dfrac{8}{3}\le 4-\dfrac{8}{u_n+2}<4-\dfrac{8}{4}$ لأنّ : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+2}=4-\dfrac{8}{u_n+2}$

إذن : $4-\dfrac{8}{3}\le 4-\dfrac{8}{u_n+2}<4-\dfrac{8}{4}$

أي $\dfrac{4}{3}\le u_{n+1}<2$ وبالتالي $1\le u_{n+1}<2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3- حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n): (0.25×2)

ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4u_n}{u_n+2}-u_n=\dfrac{4u_n-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$

أي $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-u_n^2}{u_n+2}=\dfrac{u_n(2-u_n)}{u_n+2}$

جدول إشارة الفرق :

$u_n\in$	1 $\qquad$ 2
u_n	+
$2-u_n$	+
u_n+2	+
$u_{n+1}-u_n$	+

وبالتالي : $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

دراسة تقارب المتتالية (u_n): (0.25)

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

0.5	3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ **أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية :** (v_n) متتالية هندسية يعني $v_{n+1} = v_n \times q$ لدينا: $v_{n+1} = 1-\frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{4u_n}{u_n+2}} = 1 - \frac{2(u_n+2)}{4u_n} = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2u_n-4}{4u_n} = \frac{2}{4}\times\frac{u_n-2}{u_n}$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{u_n}\right) = \frac{1}{2} v_n$ أي (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 1-\frac{2}{u_0} = 1-\frac{2}{1} = -1$
0.25	**التعبير عن v_n بدلالة n :** $v_n = v_0\times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$
0.5	**ب) إستنتاج عبارة u_n بدلالة n:** لدينا : $v_n = 1-\frac{2}{u_n}$ ومنه $\frac{2}{u_n} = 1 - v_n$ أي $u_n = \frac{2}{1-v_n}$ وبالتالي : $u_n = \frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$
0.25	**حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
0.5	**ج) حساب S_n بدلالة n :** لدينا : $S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$ ولدينا : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}(1-v_n)$ ومنه : $S_n = \frac{1}{2}(1-v_0)+\frac{1}{2}(1-v_1)+\cdots+\frac{1}{2}(1-v_n) = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}(v_0+v_1+\cdots+v_n)$ أي $S_n = \frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{2}\left(v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{2}\times\left(-1\times2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$ $S_n = \frac{1}{2}(n+1)+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $S_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
	4) أ)تبيان أنّ : $\lvert u_{n+1}-2\rvert \le \frac{2}{3}\lvert u_n-2\rvert$ من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا : $u_{n+1}-2 = \frac{4u_n}{u_n+2}-2 = \frac{4u_n-2u_n-4}{u_n+2} = \frac{2u_n-4}{u_n+2} = \frac{2(u_n-2)}{u_n+2}$ ومنه $\lvert u_{n+1}-2\rvert = \left\lvert\frac{2(u_n-2)}{u_n+2}\right\rvert = 2\times\left\lvert\frac{u_n-2}{u_n+2}\right\rvert = \frac{2}{\lvert u_n+2\rvert}\times\lvert u_n-2\rvert = \frac{2}{u_n+2}\times\lvert u_n-2\rvert$ لأنّ $3 \le u_n+2 < 4$

ولدينا : $1 \le u_n < 2$ ومنه $3 \le u_n + 2 < 4$ إذن $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2} \le \frac{1}{3}$ وبالتالي : $\left\|u_{n+1}-2\right\| \le \frac{2}{3} \times \left\|u_n-2\right\|$	0.5
ب) البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left\|u_n-2\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$: لدينا : $\left\|u_{n+1}-2\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_n-2\right\|$ من أجل كل عدد طبيعي n. ومنه : $\left\|u_1-2\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_0-2\right\|$ $\left\|u_2-2\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_1-2\right\|$ $\vdots$ $\left\|u_n-2\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_{n-1}-2\right\|$ أي $\left\|u_1-2\right\| \times \left\|u_2-2\right\| \times \cdots \times \left\|u_n-2\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_0-2\right\| \times \frac{2}{3}\left\|u_1-2\right\| \times \cdots \times \frac{2}{3}\left\|u_{n-1}-2\right\|$ بالإختزال نجد : $\left\|u_n-2\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n	0.5
إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: لدينا : $\left\|u_n-2\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $-\left(\frac{2}{3}\right)^n \le u_n-2 \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-2)=0$ حسب مبرهنة الحصر . إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$	0.25
التمرين الثاني	**04 نقاط**
لدينا : $A(-1;3;1)$ ، $B(0;5;0)$ ، $E(-3;4;0)$ و المستوي (Q) ذو المعادلة $2x-y+z-2=0$	
1) بيّن أنّ نصف قطر سطح الكرة (S) هو $\sqrt{6}$: (S) مركزها النقطة A وتمس المستوي (Q) يعني $R = d(A;(Q)) = \frac{\left\|2x_A - y_A + z_A - 2\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{\left\|2(-1)-3+1-2\right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\left\|-6\right\|}{\sqrt{6}}$ ومنه $R=\sqrt{6}$	0.5
كتابة معادلة لـ (S): هي من الشكل : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$ أي $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$	0.5
إيجاد إحداثيات نقطتي تقاطع (S) وحامل محور التراتيب: هي حل الجملة : $\begin{cases}(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6\\x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}(t-3)^2=4\\x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$ $(t-3)^2=4$ يكافئ $t-3=-2$ أو $t-3=2$ يكافئ $t=1$ أو $t=5$	2×0.25

حامل محور التراتيب يقطع (S) في النقطتين $F(0;1;0)$ و $F'(0;5;0)$

2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Q):

الشعاع الناظمي للمستوي (Q) هو توجيه للمستقيم (Δ) وهو $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) يعني $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

أي $\begin{cases}x+1=2\lambda\\y-3=-\lambda\\z-1=\lambda\end{cases}$ ومنه جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) هي $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=-\lambda+3;(\lambda\in\mathbb{R})\\z=\lambda+1\end{cases}$

0.5

إستنتاج إحداثيات النقطة H نقطة تماس (Q) و(S):

H هي النقطة المشتركة بين (Δ) و (Q).

إحداثيات H هي حل للجملة $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=-\lambda+3\\z=\lambda+1\\2x-y+z-2=0\end{cases}$

إذن $2(2\lambda-1)-(-\lambda+3)+\lambda+1-2=0$ أي $6\lambda-6=0$ ومنه $\lambda=1$

إذن إحداثيات H : $\begin{cases}x=2(1)-1=1\\y=-1+3=2\\z=\lambda+1=2\end{cases}$ أي $H(1;2;2)$

0.5

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q') الموازي للمستوي (Q) والمماس لـ(S):

(Q') يوازي (Q) يعني للمستوي (Q') معادلة من الشكل : $2x-y+z+d=0$

لحساب d نعوض بإحداثيات النقطة H' نظيرة النقطة H بالنسبة إلى A مركز سطح الكرة (S).

إذن إحداثيات النقطة H' هي : $\begin{cases}x_{H'}=2x_A-x_H=2\times(-1)-1=-3\\y_{H'}=2y_A-y_H=2\times3-2=4\\z_{H'}=2z_A-z_H=2\times1-2=0\end{cases}$

أي $H'(-3;4;0)$ أي $E(-3;4;0)$

بالتعويض في معادلة (Q') نجد : $2(-3)-4+0+d=0$ أي $d=10$

ومنه معادلة (Q') هي $2x-y+z+10=0$

0.5

4) لدينا : (P_α) المستوي المعرف بـ : $\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{EH}=\alpha$.

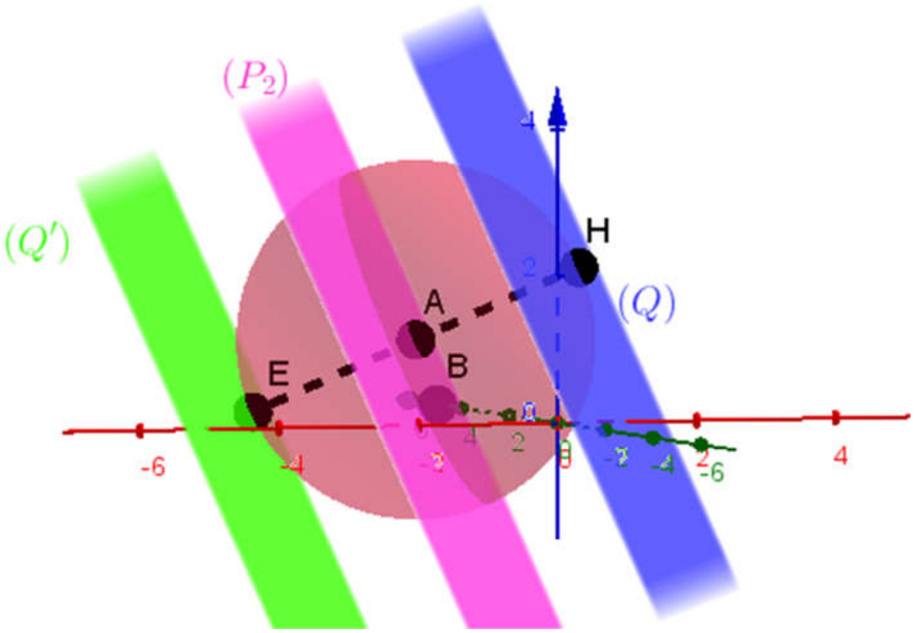
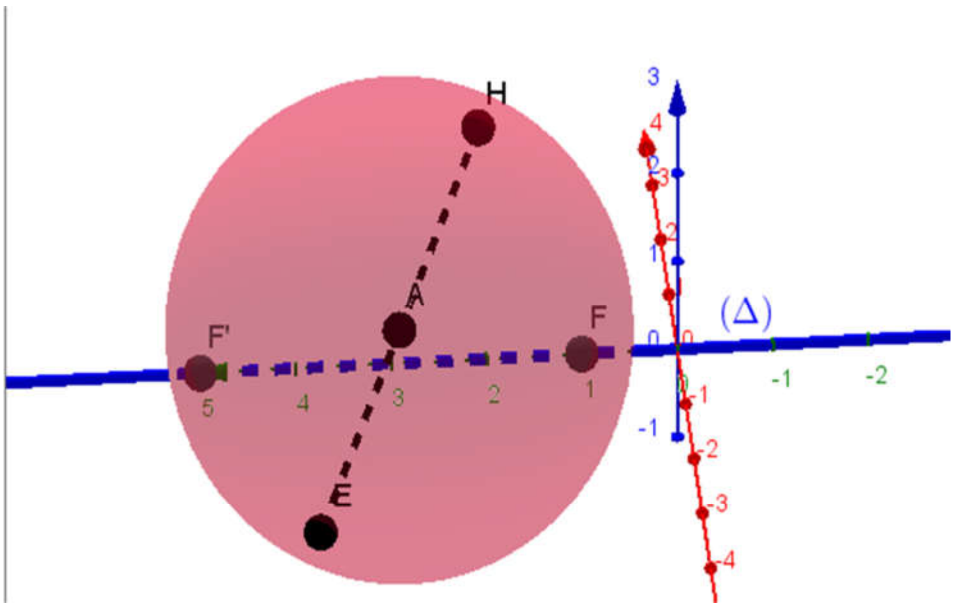
أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P_α):

لدينا : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-5\\z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}1+3\\2-4\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{EH}=\alpha$ يكافئ $4x-2(y-5)+2z=\alpha$

ومنه $4x-2y+2z+10-\alpha=0$ معادلة للمستوي (P_α)

0.5

ب) التحقق أنّ A هي منتصف القطعة $[EH]$: $\frac{x_E+x_H}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1=x_A$ $\frac{y_E+y_H}{2}=\frac{4+2}{2}=3=y_A$ ومنه A هي منتصف القطعة $[EH]$ $\frac{z_E+z_H}{2}=\frac{0+2}{2}=1=z_A$	0.25
تعيين قيمة α التي من أجلها يكون (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$: (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$ يعني $A\in(P_\alpha)$ ومنه : $4(-1)-2(3)+2\times1+10-\alpha=0$ أي $\boxed{\alpha=2}$   	0.25

التمرين الثالث	04.5 نقطة
1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$: $(z-4)(z^2-4z+8)=0$ تكافئ $z-4=0$ أو $z^2-4z+8=0$ $z-4=0$ يعني $z=4$ حل المعادلة $z^2-4z+8=0$: حساب المميز : $\Delta=(-4)^2-4\times 8=16-32=-16=(4i)^2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$ $z_2=2+2i$ مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4;\,2-2i;\,2+2i\}$	4×0.25
2) لدينا $z_A=2-2i$ ، $z_B=4$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=-z_A$ و $z_E=-6-2i$ **أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي:** لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i}=\frac{4i}{2+2i}\times\frac{2-2i}{2-2i}=\frac{8i+8}{8}=1+i$ أي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=1+i$ ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.5
إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S: لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$ وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$	0.75
ب) التحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$: لدينا : $1-2+2=1\neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$ موجود لاحقته هي $\frac{z_A-2z_B+2z_C}{1-2+2}=\frac{2-2i-8+4+4i}{1}=-2+2i=z_D$ ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$	0.5
ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\|(1+i)z+4\|=8$ **التحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ):** $A\in(\Gamma)$ يعني $\|(1+i)z_A+4\|=8$ لدينا : $\|(1+i)z_A+4\|=\|(1+i)(2-2i)+4\|=\|4+4\|=\|8\|=8$ ومنه $A\in(\Gamma)$	0.25

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة:

لدينا : $\left|(1+i)z+4\right|=8$ يكافئ $\left|(1+i)\left(z+\frac{4}{1+i}\right)\right|=8$

أي $|1+i|\times\left|z+\frac{4}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right|=8$ ومنه $\sqrt{2}\times|z+2-2i|=8$

إذن $\left|z-(-2+2i)\right|=\frac{8}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\left|z-z_D\right|=4\sqrt{2}$

أي $DM=4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R=4\sqrt{2}$

0.5

د) التحقق أنّ $S(D)=E$:

لدينا : $\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-6-2i-2+2i}{-2+2i-2+2i}=\frac{-8}{-4+4i}=\frac{-8(-4-4i)}{(-4+4i)(-4-4i)}=\frac{32(1+i)}{16+16}$

ومنه $\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

وبالتالي : $S(D)=E$

0.5

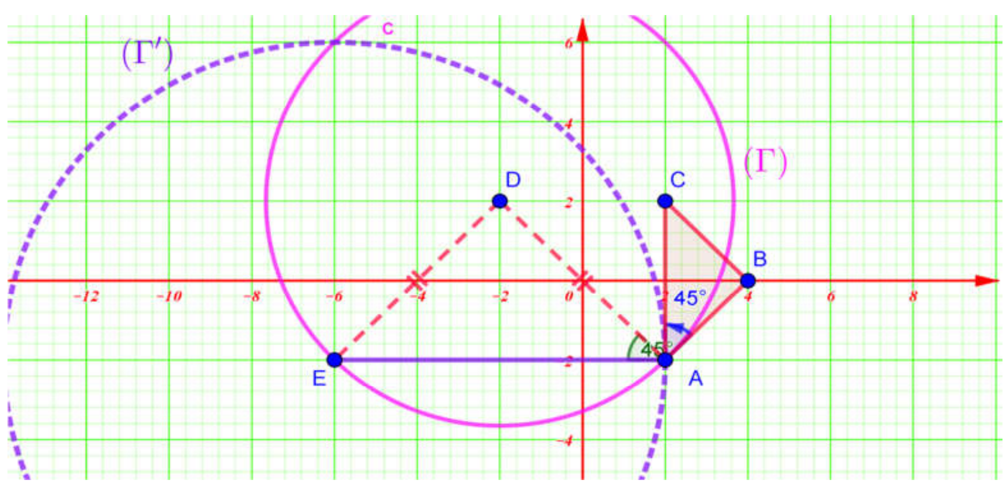
تبيان أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S :

(Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD=R=4\sqrt{2}$

صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E=S(D)$ ونصف قطرها $R'=\sqrt{2}AD=AE$

لأنّ $\frac{AE}{AD}=\sqrt{2}$

0.5



التمرين الرابع — 07 نقاط

I. لدينا : $g(x)=-x-\ln x$ و $D_g=]0;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- **حساب النهايات :** (2×0.25)

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(-x-\ln x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-1-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

- **حساب المشتقة :** (2×0.25)

$$g'(x)=-1-\frac{1}{x}=\frac{-x-1}{x}=-\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $-\left(\frac{x+1}{x}\right)<0$

ومنه $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- **جدول تغيرات الدالة g :** (0.25)

$x\in$	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2) **تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$:** (0.75)

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وصورة المجال $]0;+\infty[$ بالدالة g هو المجال $]-\infty;+\infty[$ و 0 موجود في المجال $]-\infty;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

التحقق أنّ $0.56<\alpha<0.57$:

لدينا : $g(0.56)=-0.56-\ln 0.56=0.02$

$g(0.57)=-0.57-\ln 0.57=-0.01$

أي $g(0.56)\times g(0.57)<0$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.56<\alpha<0.57$

3) **إستنتاج إشارة $g(x)$:** (0.25)

$x\in$	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	

II. لدينا : $f(x)=\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ معرفة على $D_f=]0;+\infty[$

1) **حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:** (0.25)

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}=+\infty$$ لأنّ $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[-1+(x-1)\ln x\right]=+\infty$

0.25	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\times\ln x\right]=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\times\ln x=+\infty$
0.25	**2) تبيان أنّ** $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^2}$: لدينا : $f'(x)=\dfrac{\left[\ln x+(x-1)\times\dfrac{1}{x}\right]\times x-\left(-1+(x-1)\ln x\right)}{x^2}$ $f'(x)=\dfrac{x\ln x+x-1+1-x\ln x+\ln x}{x^2}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ أي $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^2}$
0.5	**جدول تغيرات الدالة** f :

$x\in$	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	-	0	+	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

0.25	**3) أ) تبيان أنّ** $f(\alpha)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$: لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{-1+(\alpha-1)\ln\alpha}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{(\alpha-1)\ln\alpha}{\alpha}$ ولدينا : $g(\alpha)=0$ ومنه $-\alpha-\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha$ وبالتالي : $f(\alpha)==-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{(\alpha-1)(-\alpha)}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}+(\alpha-1)(-1)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ أي $f(\alpha)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$
0.25	**حصر** $f(\alpha)$: لدينا : $0.56<\alpha<0.57$ **ومنه** $\dfrac{1}{0.57}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0.56}$ أي $1.75<\dfrac{1}{\alpha}<1.78$ ومنه $-1.78<-\dfrac{1}{\alpha}<-1.75$ و $-0.57<-\alpha<-0.56$ إذن $1-0.57-1.78<1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}<1-0.56-1.75$ ومنه $1-0.57-1.78<1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}<1-0.56-1.75$ وبالتالي $-1.35<f(\alpha)<-1.31$

ب) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$:

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x\ln x-\ln x-x\ln x}{x}$$

0.25

أي $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=0$

التفسير الهندسي :

المنحني (γ) منحني مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-\ln x=\frac{-1-\ln x}{x}$

0.5

$x\in$	0		α		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	$\Vert$	+	0	-	
الوضع النسبي		$(\mathcal{C}_f)$ فوق (γ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (γ)	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (γ)	

ج) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

0.5

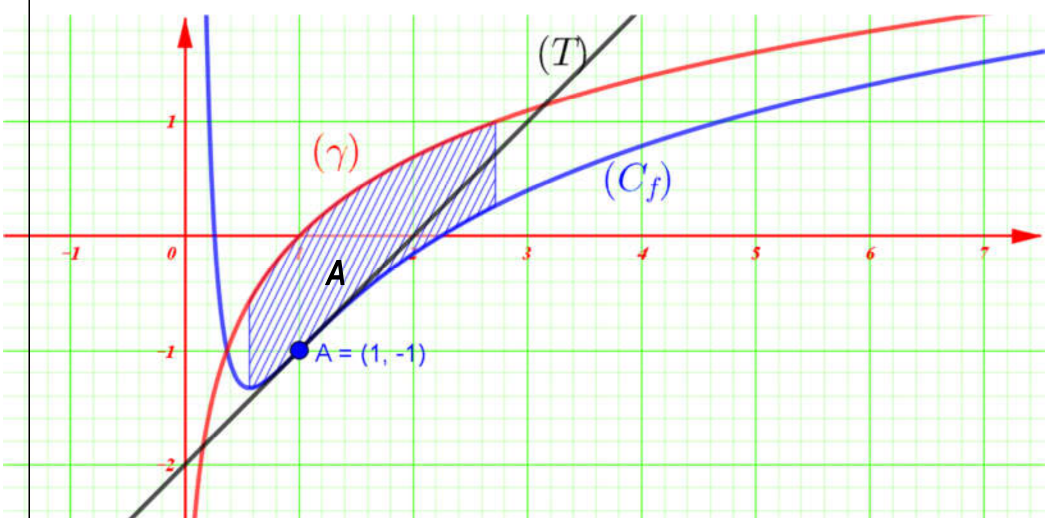
$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ $\quad$ $(T): y=1\times(x-1)-1=x-2$

إذن $(T): y=x-2$

د) حساب $f(2)$ ، $f(e)$ والرسم :

$f(2)=-0.15$ ، $f(e)=0.26$

0.75



5) حساب المساحة A : $A=\int_{\alpha}^{e}\left[\ln x-f(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{e}\left[\ln x-\frac{-1+x\ln x-\ln x}{x}\right]dx=\int_{\alpha}^{e}\left[\frac{x\ln x+1-x\ln x+\ln x}{x}\right]dx$ أي $A=\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\alpha}^{e}$ ومنه : $A=\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln e+\frac{1}{2}(\ln e)^2\right]-\left[\ln\alpha+\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\right]=\left(\frac{3}{2}-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\right)us$ وبالتالي $A=\frac{1}{2}\left(3-2\ln\alpha-(\ln\alpha)^2\right)cm^2$	0.5
التحقق أنّ : $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ لدينا : $A=\frac{3-2\ln\alpha-(\ln\alpha)^2}{2}$ و $\ln\alpha=-\alpha$ ومنه $A=\frac{3-2(-\alpha)-(-\alpha)^2}{2}=\frac{3+2\alpha-\alpha^2}{2}=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ وبالتالي $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$	0.25
تعيين حصرا لـ A : لدينا: $0.56<\alpha<0.57$ ومنه $1.56<1+\alpha<1.57$ و $-0.57<-\alpha<-0.56$ ومنه $2.43<3-\alpha<2.44$ إذن $\frac{1.56\times 2.43}{2}<\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}<\frac{1.57\times 2.44}{2}$ وبالتالي $1.90<A<1.92$	0.25

إنتهى تصحيح الموضوع الثاني