

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين: الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- نعتبر النقطتين $A(3; 0; -2)$ و $B(3; 3; 1)$ والمستقيمين (Δ) الذي يشمل A و $\vec{u}(3; 1; -1)$ شعاع توجيه له و (d) الذي يشمل B و $\vec{v}(0; 2; 2)$ شعاع توجيه له.
- 1/ تحقق ان المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين : $(P_1) : x - 2y + z - 1 = 0$ و $(P_2) : x - y + 2z + 1 = 0$.
- 2/ نعتبر المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء متساوية المسافة عن المستويين (P_1) و (P_2) .
- أ) بين ان النقطة $I(3; \alpha + 2; \alpha)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) حيث α وسيط حقيقي.
- ب) بين ان مجموعة النقط I ، لما تمسح α مجموعة الاعداد الحقيقية، هي المستقيم (d) .
- ج) جد نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) وبين أن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (Δ) .
- د) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها النقطة B وتمس المستويين (P_1) و (P_2) في النقطتين C و D على الترتيب.
- 3/ أ) بين أن المجموعة (Γ) هي اتحاد مستويين (Q_1) و (Q_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما
- (حيث (Q_1) المستوي الذي يشمل المستقيم (d)) .
- ب) تحقق أن المستويين (Q_1) و (Q_2) متعامدان .
- ج) نسمي d_1 المسافة بين النقطة C والمستوي (Q_1) ، d_2 المسافة بين النقطة C والمستوي (Q_2) .
- بين أن : $d_1 = \frac{\sqrt{22}}{4}$ و $d_2 = \frac{11\sqrt{2}}{4}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة } \mathbb{N}^* \text{ بـ:}$$

- 1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.
- 2/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- 3/ استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .
- 4/ نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$.
- أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- (ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 (ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.
 التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (I) 1/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $(\sqrt{3} - i)^2$.
 2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 - 2 + 2i\sqrt{3})(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$.
 (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A = 4\sqrt{3} - 4i, z_B = 4\sqrt{3} + 4i, z_C = -\sqrt{3} + i$ و $z_D = 2i$.
 1/ اكتب على الشكل الاسي العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .
 2/ ليكن G مرجح الجملة $\{(O; -1), (D; 1), (B; 1)\}$. تحقق أن G موجودة وأحسب لاحقتها z_G .
 • عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\|\vec{MB} + \vec{MD} - \vec{MO}\| = \|\vec{MB} - \vec{MG}\|$.
 3/ احسب العدد المركب $\frac{z_G - z_C}{z_D - z_C}$ ، ثم استنتج محول النقطة D الى النقطة G مع ذكر عناصره المميزة .
 4/ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z - z_G}{z - z_D}$ حقيقيا موجبا تماما .
 5/ عين لاحقة النقطة F حتي يكون الرباعي $ACGF$ معيناً ثم أحسب مساحته .
 التمرين الرابع: (06 نقاط)

- (I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$.
 ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 1/ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x - 1)^2 e^{-x+1}$.
 ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 2/ • بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
 • حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ) .
 3/ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.
 4/ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
 5/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = -(x - 1)(x - 3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيينهما .
 6/ أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f) .
 7/ ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.
 (II) 1/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$. بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $G(x) = -(x + 1)e^{-x+1}$ هي أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$ وأحسب I_1 .
 2/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = -1 + (n + 1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .
 وأحسب I_2 ، استنتج مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $2081x - 2018y = 1 \dots (E)$ و $2081x - 2018y = 3 \dots (E')$

أ) بين ان العددين 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') .

2/ نرمز ب d الى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) عين حلول المعادلة (E') حتي يكون $d = 3$.

3/ A و B عددين طبيعيين يكتبان على الترتيب في النظام الذي أساسه 5 على الشكل : $\overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^5$ ، $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^5$

أ) بين أنه إذا كان : $B - A = 63$ فإن : $19\alpha + 6\beta = 63 \dots (*)$

ب) بين انه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha; \beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة (*) ثم استنتج كتابة A و B في النظام العشري

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعروف كيلي : $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$

1/ أ) احسب $P(-2)$ ثم عين العددين α و β حتي يكون : $P(z) = (z + 2)(z^2 + \alpha z + \beta) \dots (*)$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$ (نرمز لحلي المعادلة (*)) ب z_1 و z_2 حيث $\text{Im}(z_1) > 0$

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C ذات

الواحق على الترتيب $z_A = \frac{2}{\sqrt{3}}z_1$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

أ) اكتب كلا من الأعداد z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج ان النقط A، B و C تنتمي الى دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتي يكون العدد $(\frac{z_A}{z_B})^n$ حقيقي .

ج) عين ثم أنشئ المجموعة (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}$

3/ أ) عين الشكل الأسّي للعدد : $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

ب) استنتج طبيعة التحويل r الذي يحول B إلى A ثم عين عناصره المميزة وكتابته المركبة.

ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC.

د) عين قيم العدد الطبيعي n' حتي يكون العدد $L^{2018n'}$ تخيلي.

هـ) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتي يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

و) استنتج أن النقطتين B و D تنتميان إلى حامل (Δ) .

4/ ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

أ) عين الكتابة المركبة ل h.

ب) استنتج صورة لكل من من المستقيم (BD) والدائرة (C) بالتحاكي h.

ج) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل $h \circ r$ (يطلب تعيين الكتابة المركبة) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات منها 05 كريات حمراء تحمل الارقام -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 ، و 3 كريات خضراء تحمل الارقام -1 ، 0 ، 1 ، و كريتان سوداوان تحملان على الترتيب الرقنين -1 ، 0 .
1/ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ، كرتين من هذا الكيس ، نفترض أن كل الكريات لها نفس احتمال السحب.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة ممكنة بالعدد الحقيقي $\ln|x-y|$ حيث x و y هما الرقنان اللذان تحملهما الكريتان المسحوبتان من الكيس.
أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) أكتب قانون احتمال X و احسب أماله الرياضياتي $E(X)$.
2/ نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الكيس ونسحب منه كرتين على التوالي دون إرجاع .
أ) احسب عدد الحالات الممكنة للسحب.

ب) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ، حيث الحدثان A و B معرفان كما يلي :

A : " الكريتان المسحوبتان لونيهما مختلفان".

B : "الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما".

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) نعتبر الدالتين g و h والمعرفتين على $]0; +\infty[$ كإيلي : $g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x - 2)\ln x$.
1/ أ) أحسب $g'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة g .

ب) استنتج أن : $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.

ج) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1)\ln x$.

د) بين أن من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $h(x) > 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$.

و ليكن (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم فسر النتيجة الاولى هندسيا .

2/ أ) بين أن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ بـ : $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0, 4; 0, 5[$.

3/ أ) أكتب معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب) تحقق أن من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$.

ج) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) .

4/ ارسم (C_f) والمستقيم (Δ) .

III) (U_n) المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_0 = \sqrt{e}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq e$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم برر تقاربها و عين نهايتها.