

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول : (05نقط)

يبدأ لاعب لعبة تشمل عدة جولات متتابعة. احتمال أن يخسر في الجولة الأولى هو 0.2. تجري اللعبة في ما بعد بالطريقة التالية: إذا ربح في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو 0.05 وإذا خسر في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو 0.1. نسمي: E_i : الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة i " مع i عدد طبيعي غير معدوم و $p_i = P(E_i)$ ، نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يخسرها اللاعب خلال الجولات الثلاثة الأولى.

(1) مثل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

(2) أ) ما هي قيم X ؟

ب) بين أن $P(X=2) = 0.031$.

ج) عين قانون احتمال X .

د) أحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_{n+1} = 0.05p_n + 0.05$.

(4) (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأولى.

ب) استنتج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n ثم p_n بدلالة n .

ج) أحسب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين الثاني (04نقط)

عين الاجابة الصحيحة الوحيدة من بين الاجابات المقترحة مع التعليل

(1) حلول المعادلة $24x + 34y = 2$ في Z^2 هي :

أ) $k \in Z$ مع $(17k - 7; 5 - 12k)$

ج) $k \in Z$ مع $(34k - 7; 5 - 24k)$

ب) $k \in Z$ مع $(-7k; 5k)$

د) المجموعة الخالية

(2) في مجموعة الاعداد الصحيحة Z ، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$.

أ) لا تقبل حولا

ب) حلولها زوجية

د) حلولها تحقق: $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

ج) حلولها تحقق: $x \equiv 2[5]$

(3) عدد القواسم الطبيعية للعدد $(10)^{2018}$ هي :

أ) 4076361

ج) 2018

ب) 4076365

د) 2017

(4) N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الاساس 5 كمايلي 421 .

يكتب N في النظام ذي الاساس 6 كما يلي :

أ) $\overline{303}$

ب) $\overline{421}$

د) $\overline{222}$

ج) $\overline{111}$

- الصفحة 1/2 -

التمرين الثالث : (04نقط)

- المستوى المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$.
نعتبر النقط A, B, C, H و J التي لواحقها على الترتيب $Z_A = -3 - i, Z_B = -2 + 4i, Z_C = 3 - i$ ،
 $Z_H = -2$ و $Z_J = i$. الوحدة $2cm$.
(1) علم النقط A, B, C, H و J .
(2) بين أن J هي مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC . عين نصف قطرها . انشئ الدائرة (γ)
(3) أكتب على الشكل الجبري و الأسّي العدد $\frac{Z_B - Z_C}{Z_H - Z_A}$. ثم استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين.
فيما تبقى نقبل أن H هي نقطة ارتفاعات المثلث ABC
(4) عين Z_G لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC . علم G
(5) بين أن النقط G, J, H على استقامة واحدة.
(6) لتكن A' و K منتصفا القطعتين $[BC]$ و $[AH]$.
أ) عين لاحقتي A' و K
ب) بين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع

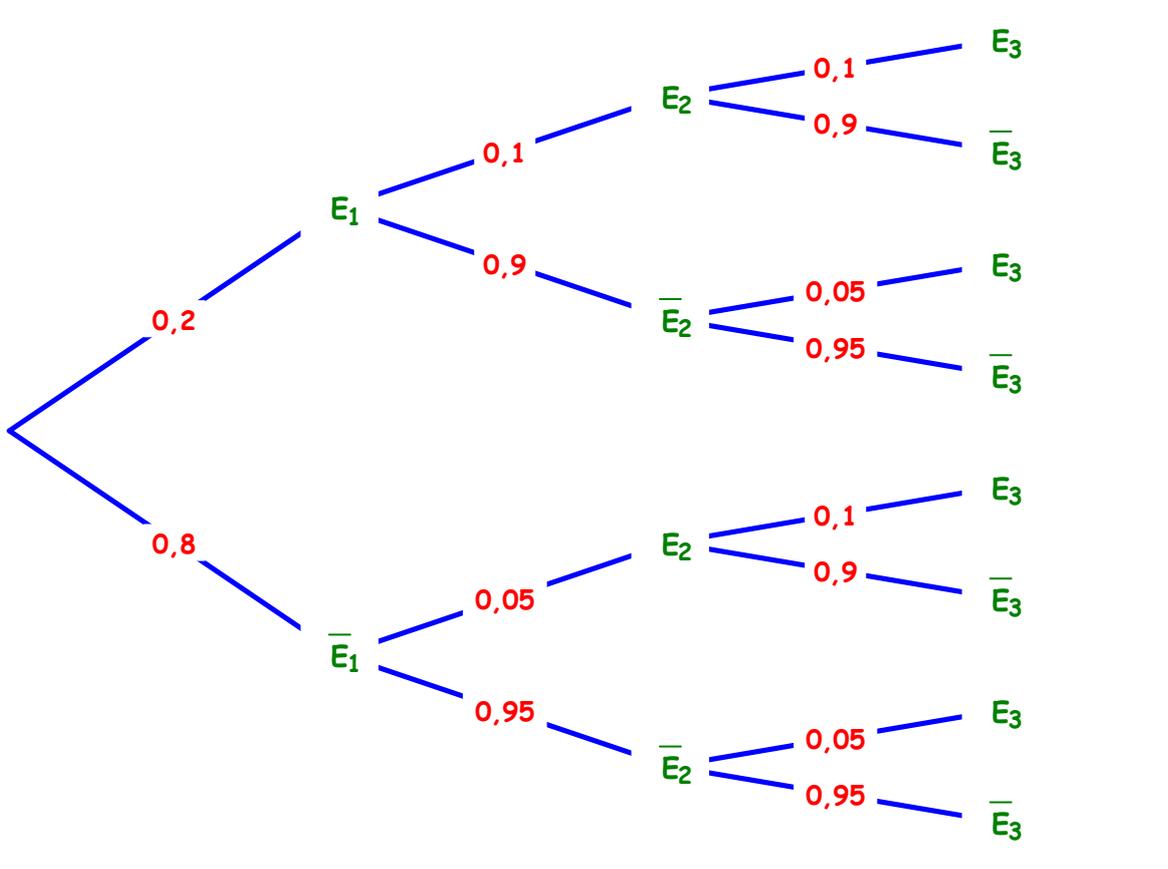
التمرين الرابع : (07نقط)

- أ) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = 1 - (x-1)e^x$.
(1) أدرس تغيرات g .
(2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث : $1.278 < \alpha < 1.279$ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x
ب) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x + 2 - (x-2)e^x$.
نسمي (Cf) تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$
(1) أحسب النهايات للدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.
(2) بين أن (Cf) له مستقيم مقارب (Δ) معادلة له : $y = x + 2$ عند $-\infty$.
- أدرس وضعية (Cf) بالنسبة إلى (Δ)
(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .
(4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
(5) استنتج من الجزء 1) إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (Cf)
(6) عين النقطة A من (Cf) التي يكون عندها المماس (T) للمنحنى (Cf) موازيا للمستقيم (Δ) .
- أكتب معادلة للمماس (T) .
(7) أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و أنشئ (Cf) و (Δ) و (T) .

الحل المفصل للاختبار الثاني – 3 تقني رياضي - 2018 / 2017

التمرين الاول : (05ن)

1) شجرة الاحتمالات: (0.75ن)



2) أ) قيم X (0.5ن)

$$X \in \{0;1;2;3\}$$

ب) نبين أن $p(X = 2) = 0.031$ (0.5ن)

$$p(X = 2) = 0.2 \times 0.1 \times 0.9 + 0.2 \times 0.9 \times 0.05 + 0.8 \times 0.05 \times 0.1$$

$$P(X = 2) = 0.018 + 0.009 + 0.004 = 0.031$$

ج) تعين قانون احتمال X (0.75ن)

X_i	0	1	2	3	مجموع
P_i	0.722	0.245	0.031	0.002	1
$X_i \times P_i$	0	0.245	0.062	0.006	0.313
$X_i^2 \times P_i$	0	0.245	0.124	0.018	0.387

د) حساب الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X (0.5+0.5ن)

$$E(X^2) = 0.387, E(X) = 0.313$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.387 - (0.313)^2 = 0.289031$$

(3) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_{n+1} = 0.05p_n + 0.05$ (0.5ن)

$$\cdot p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$$

$$\text{اذن : } p_{n+1} = 0.1 \times p(E_n) + 0.05p(\overline{E_n}) \text{ أي}$$

$$p_{n+1} = 0.1 \times p_n + 0.05(1 - p_n) = 0.05p_n + 0.05$$

وبالتالي نجد ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $p_{n+1} = 0.05p_n + 0.05$

(4) (أ) نبين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول (0.5ن)

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19}$$

$$u_{n+1} = 0.05p_n + 0.05 - \frac{1}{19}$$

$$\cdot u_{n+1} = 0.05p_n - \frac{0.05}{19}$$

$$u_{n+1} = 0.05 \left(p_n - \frac{1}{19} \right)$$

$$u_{n+1} = 0.05u_n$$

اذن (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.05 وحدها الأول

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = p(E_1) - \frac{1}{19} = 0.2 - \frac{1}{19} = \frac{2.8}{19} = \frac{28}{190} = \frac{14}{95}$$

(ب) استنتاج ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n ثم p_n بدلالة n (0.25+0.25ن)

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, u_n = \frac{14}{95}(0.05)^{n-1}$$

$$\cdot \text{ لدينا : } u_n = p_n - \frac{1}{19} \text{ وبالتالي } p_n = u_n + \frac{1}{19} \text{ أي } p_n = \frac{14}{95}(0.05)^{n-1} + \frac{1}{19}$$

(ج) حساب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$ (0.25ن)

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{14}{95}(0.05)^{n-1} + \frac{1}{19} \right] = \frac{1}{19}$$

التمرين الثاني : (04ن)

تعين الاجابة الصحيحة الوحيدة من بين الاجابات المقترحة مع التعليل

(1) الاجابة الصحيحة هي (أ) (0.25ن)

(التبرير : المعادلة $24x + 34y = 2$ تكافئ $12x + 17y = 1$ (0.75ن)

نبحث عن الحل الخاص نتبع الطريقة التالية :

$$12x + 17y = 1 \text{ تكافئ } 1 - 12x = 17y \text{ نبحث عن } (x; y) \text{ من } Z^2$$

بحيث يكون $1 - 12x$ مضاعف للعدد 17.

نلاحظ من اجل $x = -7$ نجد : $1 - 12x = 85 = 17 \times 5$ و بالتالي نجد $y = 5$.

اذن الثنائية $(-7;5)$ حل خاصا للمعادلة $12x+17y=1$.

وعليه : $\begin{cases} 12x+17y=1 \\ 12(-7)+17(5)=1 \end{cases}$ بالطرح طرفا لطرف نجد : $12(x+7)+17(y-5)=0$ يعني

$12(x+7)=17(5-y)$. بما أن 12 يقسم العدد $12(x+7)$ فان 12 يقسم العدد $17(5-y)$ وبما أن العددين 12 و 17 أوليان فيما بينهما حسب مبرهنة غوص العدد 12 يقسم $(5-y)$ ، نضع $(5-y)=12k$ حيث k عدد صحيح أي $y=5-12k$ و k عدد صحيح .

بتعويض $y=5-12k$ في المعادلة $12x+17y=1$ نجد : $12x+17(5-12k)=1$ يعني $x=17k-7$ حلول المعادلة هي الثنائيات : $(17k-7;5-12k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(2) الاجابة الصحيحة هي (د) (0.25ن)

التبرير : (0.75ن)

$x \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x^2 + x + 3 \equiv$	3	0	4	0	3	$[5]$

اذن : $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ يعني $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

(3) الاجابة الصحيحة هي (أ) (0.25ن)

التبرير : (0.75ن)

لدينا : $(10)^{2018} = (2 \times 5)^{2018} = 2^{2018} \times 5^{2018}$

عدد القواسم الطبيعية للعدد $(10)^{2018}$ هي : $(2018+1)(2018+1) = 2019 \times 2019 = 4076361$ أي 4076361

(4) الاجابة الصحيحة هي (أ) (0.25ن)

التبرير : (0.75ن)

$$N = \overline{421}^5 = 1 \times 5^0 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^2 = 1 + 10 + 100 = 111$$

$$N = 18 \times 6 + 3$$

$$\cdot N = 3 \times 6 \times 6 + 3$$

$$N = 3 \times 6^2 + 0 \times 6^1 + 3 \times 6^0$$

$$N = \overline{303}^6$$

التمرين الثالث : (04نقط)

(2) نبين أن J هي مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC . عين نصف قطرها (0.75ن)

$$\cdot JA = |Z_A - Z_J| = |-3 - i - i| = |-3 - 2i| = \sqrt{13}$$

$$\cdot JB = |Z_B - Z_J| = |-2 + 4i - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{13}$$

$$\cdot JC = |Z_C - Z_J| = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$$

اذن J هي مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC . حيث نصف قطرها $r = \sqrt{13}$.

(3) كتابة على الشكل الجبري و الأسّي العدد $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$. ثم استنتاج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين .

(0.25ن)..... $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{-2+4i-3+i}{-2+3+i} = \frac{-5+5i}{1+i} = \frac{5i(1+i)}{(1+i)} = 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا : $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ يعني $(\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$ يعني

(0.25ن)..... المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين

(4) تعين Z_G لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC . ثم نعلم G

(0.25ن).... $Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{-3-i-2+4i+3-i}{3} = \frac{-2+2i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$

(5) نبين أن النقط H, J, G على استقامة واحدة..... (0.5ن)

نحسب $\arg\left(\frac{z_H - z_G}{z_H - z_J}\right)$

اذن : $\arg\left(\frac{z_H - z_G}{z_H - z_J}\right) = \frac{-2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i}{-2 - i} = \frac{1}{3} \left(\frac{-4 - 2i}{-2 - i} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{2+i}{2+i} \right) = \frac{2}{3} \in \mathfrak{R}$

وبالتالي : $\arg\left(\frac{z_H - z_G}{z_H - z_J}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح

لدينا : $\arg\left(\frac{z_H - z_G}{z_H - z_J}\right) = 2k\pi$ يعني $(\overrightarrow{JH}; \overrightarrow{GH}) = 2k\pi$ يعني أن النقط H, J, G على استقامة واحدة.

(6) أ) تعين لاحقتي K و A'

(0.25ن)..... $Z_{A'} = \frac{Z_B + Z_C}{2} = \frac{-2+4i+3-i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

(0.25ن)..... $Z_K = \frac{Z_H + Z_A}{2} = \frac{-2-3-i}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

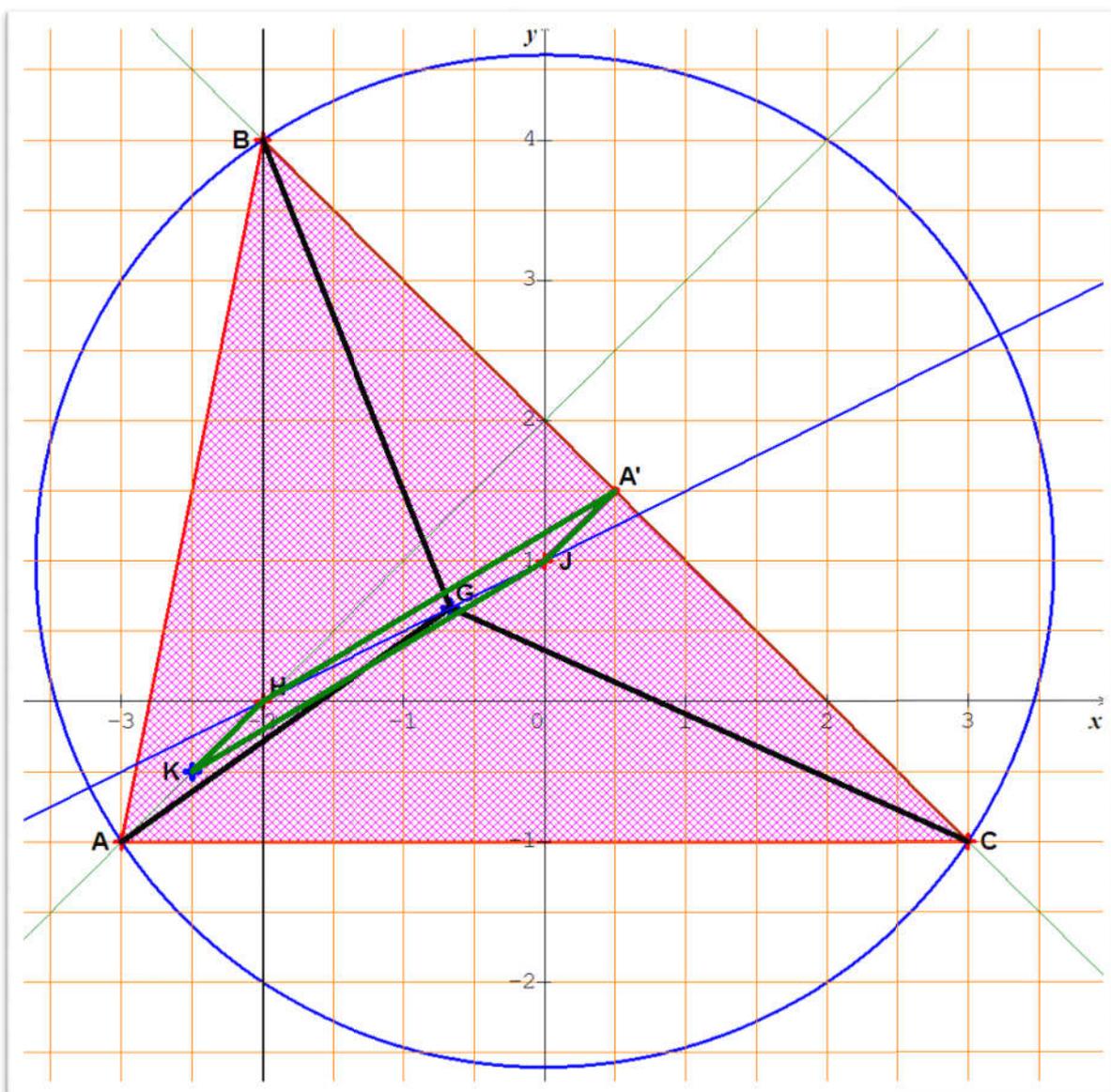
ب) نبين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع

(0.5ن)..... الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع يعني $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{JA'}$

. $Z_{\overrightarrow{JA'}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $Z_{\overrightarrow{KH}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

اذن $Z_{\overrightarrow{KH}} = Z_{\overrightarrow{JA'}}$ يعني $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{JA'}$ يعني الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع .

(01ن)..... الرسم :



التمرين الرابع: (07نقط)

الجزء الأول :

(1) دراسة تغيرات g .

- النهايات :(0.25ن)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - xe^x - e^x] = 1$$

- اتجاه التغير :(0.5ن)

- . الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} : $g'(x) = -e^x - (x-1)e^x = -xe^x$
- . الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

- جدول التغيرات :(0.25ن)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1	2	$-\infty$

(3) نبين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث: $1.278 < \alpha < 1.279$ استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

- الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ وبالتالي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.278; 1.279]$.

- $0 \in]-\infty; 0]$

- $g(1.278) \approx 0.003$ و $g(1.279) \approx -0.002$ اذن $g(1.278) \times g(1.279) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث: $1.278 < \alpha < 1.279$ (0.5ن)

- إشارة $g(x)$ حسب قيم x (0.25ن)

x	$-\infty$ & $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$

الجزء الثاني :

(1) حساب النهايات للدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ (0.5ن)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) \left[\frac{x+2}{x-2} - e^x \right] = -\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \left[\frac{x+2}{x-2} - e^x \right] = -\infty$$

(2) نبين أن (Cf) له مستقيم مقارب (Δ) معادلة له: $y = x + 2$ عند $-\infty$ (0.25ن)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-2)e^x] = 0$$

- دراسة الوضعية : (0.5ن)

ندرس إشارة الفرق : $[f(x) - (x+2)] = [-(x-2)e^x]$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (x+2)$	$+$	0	$-$

- المنحنى (Cf) فوق (Δ) على المجال $]-\infty; 2[$
- المنحنى (Cf) تحت (Δ) على المجال $]2; +\infty[$
- المنحنى (Cf) يقطع (Δ) في النقطة $A(2; 4)$

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)$ ثم أدرس تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} : $f'(x) = 1 - e^x - (x-2)e^x = 1 - (x-1)e^x = g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ (0.25ن)

اذن حسب الجزء الأول ، الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $] -\infty; \alpha]$ (0.25ن)
 جدول التغيرات : (0.25ن)

x	$-\infty$	$\&$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\&)$	$-\infty$

(4) نبين أن: $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha-1}$ ثم استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$ (0.5ن)

لدينا : $f(\alpha) = \alpha + 2 - (\alpha - 2)e^\alpha$ ومن جهة أخرى نجد $g(\alpha) = 1 - (\alpha - 1)e^\alpha = 0$ يعني

$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1} \text{ وبالتالي نعوض نجد :}$$

$$f(\alpha) = \alpha + 2 - (\alpha - 2)e^\alpha = \alpha + 2 - \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2 - \alpha + 2}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$$

- استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$ (0.5ن)

لدينا : $1.278 < \alpha < 1.279$ اذن (1) $1.633 < \alpha^2 < 1.635$

ومن جهة اخرى : $1.278 < \alpha < 1.279$ اذن $0.278 < \alpha - 1 < 0.279$ اذن

$$3.584 < \frac{1}{\alpha - 1} < 3.597 \text{.....(2)}$$

من (1) و (2) نجد : $5.852 < \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} < 50881$ أي $5.852 < f(\alpha) < 5.881$

(5) استنتاج من الجزء 1) إحدائيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (Cf)

الدالة f' قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} : $f''(x) = g'(x)$ (0.25ن)

اشارة $f''(x)$ من اشارة $g'(x)$ وحسب الجزء الأول نجد :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

(6) تعيين النقطة A من (Cf) التي يكون عندها المماس (T) للمنحنى (Cf) موازيا للمستقيم (Δ) .

نحل المعادلة $f'(x_0) = 1$ يعني $g(x_0) = 1$ يعني $1 - (x_0 - 1)e^{x_0} = 1$ يعني $(x_0 - 1)e^{x_0} = 0$

يعني $x_0 = 1$ (0.25ن)

كتابة معادلة المماس (T) (0.5ن)

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = 1(x - 1) + 2 - e$$

$$(T): y = x + 1 - e$$

7 حساب $f(2)$ و $f(3)$ و أنشاء (Cf) و (Δ) و (T) (0.25ن+01ن)
• $f(3) = 5 - e^3$ و $f(2) = 4$

