الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: رياضيات

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
الدورة الاستثنائية: 2017

اختبار في مادة: رياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصّحيحين x و y حيث $(E)\cdots 63x+5y=159$.

1) تحقّق أنّ العددين 5 و 63 أوّليان فيما بينهما ثمّ بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا.

2) برهن أنّه إذا كانت الثّنائية $(x\,;y)$ حلاّ للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 3[5]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E).

3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التّعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطّبيعيين α و β ثمّ اكتب العدد $\lambda+2$ في النظام العشري.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتّى يقبل العدد $3^{x-y}+4n+1438^{2017}$ القسمة على 5، حيث $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

نعتبر النّقطة $A(-\frac{2}{3};2;0)$ والمستقيم (Δ) المعرّف بالتّمثيل الوسيطي الآتي $(t\in\mathbb{R})$: $\begin{cases}x=3t\\y=t+1\\z=-t+1\end{cases}$

1) أ) تحقّق أنّ النّقطة A لا تنتمي إلى (Δ) ثمّ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل A ويحوي (Δ).

ب) بيّن أنّ $3x+y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A ويعامد (Δ).

2) لتكن (P_m) مجموعة النّقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $m\,x-(m-2)y+2(m+1)z-m-4=0$ و m وسيط حقيقي.

برهن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي m ، (P_m) مستو، ثمّ بيّن أنّ كل المستويات (P_m) تتقاطع وفق (Δ).

3) أ) تحقّق أنّ المستوي (P) هو المستوي (P_0) ثمّ عيّن قيمة الوسيط الحقيقي m التي يكون من أجلها (P_m) و (P_0) متعامدين.

ب) استنتج إحداثيات H نقطة تقاطع المستويات الثّلاث (P_0)، (P_{-4}) و (Q).

4) بيّن أنّ المثلث AOH قائم ثمّ جد إحداثيات النّقط M من المستقيم (Δ) حتّى يكون حجم رباعي الوجوه $MAOH$ يساوي $\frac{11}{9}cm^3$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $2z^2-10z+\frac{29}{2}=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A، B، C و D التي لاحقاتها $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_D=i$.

1) أ) اكتب العددين z_A و z_B على الشّكل الجبري ثمّ علِّم النّقط A، B، C و D في المعلم السّابق.

ب) اكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشّكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) جد لاحقة النّقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$.

3) اكتب العبارة المركبة للتّشابه المباشر S الذي مركزه B ويحوّل A إلى D ثمّ حدّد نسبته وزاويته.

4) نعرّف متتالية النّقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $A_0=A$ و $A_{n+1}=S(A_n)$. (z_n هي لاحقة A_n)

أ) برهن بالتّراجع أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n-z_B=5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$.

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتّى تنتمي النّقط A_n إلى المستقيم (AB).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+2-\ln x$.

ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f .

2) أ) احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ، ثمّ فسّر النّتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثمّ استنتج $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$.

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـِ (C_f) ثمّ ادرس وضعية (C_f) بالنّسبة إلى (Δ) .

4) أ) أثبت أنّه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثمّ جِد معادلة لكلٍّ منهما.

ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث $2<\alpha<2{,}1$ و $-0{,}5<\beta<-0{,}4$.

5) ارسم المماسين والمستقيم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f) .

6) باستعمال المنحنى (C_f)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتّى تقبل المعادلة $x(e-2m)=\ln(x^2)$ حلاً وحيدا.

7) نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$x=\alpha$ ، $x=1$ و $x+2y=e$.

تحقّق أنّ: $A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2 cm^2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على صفحتين (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$، نعتبر النّقط: $A(2;6;4)$، $B(3;6;2)$ و $C(0;3;3)$ والمستوي (P) المعرّف بالتّمثيل الوسيطي : $(\alpha\in\mathbb{R};\beta\in\mathbb{R})$: $\begin{cases}x=1+2\alpha-12\beta\\y=3+3\alpha+10\beta\\z=1+\alpha-6\beta\end{cases}$

1) احسب الجداء السّلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

2) تحقّق أنّ $6x-5y+3z+6=0$ معادلة للمستوي (ABC) واكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة : $2x+3y+z-12=0$.

بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان، ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيا لـ(Δ) مستقيم تقاطعهما.

4) لتكن M نقطة من الفضاء إحداثياتها $\left(2t-1;-\frac{5}{3}t+\frac{14}{3};t\right)$ حيث t عدد حقيقي يختلف عن 1.

عيّن (Γ) مجموعة النّقط M حتّى يكون حجم رباعي الوجوه $MABC$ أصغر من أو يساوي $\frac{35}{9}cm^3$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $z^2-2(1-\sin\alpha)z+2(1-\sin\alpha)=0\cdots(E)$

حيث α عدد حقيقي. (نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلّي المعادلة (E))

1) عيّن الحلّين z_1 و z_2 بدلالة α.

2) نضع $\alpha=\frac{\pi}{6}$. بيّن أنّ: $z_1^{2017}+z_2^{2017}=1$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=2z_A$.

1) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

2) ليكن S التّحويل النّقطي الذي يحوّل النّقطة M ذات اللاّحقة z إلى النّقطة M' ذات اللاّحقة z' حيث $z'=(1+z_A)z+2z_B$.

- عيّن طبيعة التّحويل S ثمّ حدّد عناصره المميّزة.

3) (Γ) مجموعة النّقط M ذات اللاّحقة z حيث $\arg(\overline{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$.

- تحقّق أنّ النّقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثمّ حدّد طبيعة (Γ) وأنشئها.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدِّها الأوّل u_0 حيث $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4u_n+1$

1) أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

ب) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوّليين فيما بينهما.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+\frac{1}{3}$.

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0.

ب) عبّر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{3n}$.

3) عيّن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين 4^n-1 و $4^{n+1}-1$.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتّى يقبل العدد A_n المعرّف بـ : $A_n=9S_n-6n-3^{6n+4}$ ، القسمة على 7.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$.

I) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني .

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أثبت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما، احسب $f(-2)$ ، ثمّ ارسم المنحنى (C).

II) ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدّالة f_m المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_m(x)=(x^2+mx+1)\,e^{-x}$

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها.

2) ادرس اتجاه تغير الدّالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدّالة f_m قيمتين حدّيتين يطلب تعيينهما.

3) M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m=1-m$.

أثبت أنّه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإنّ M_m تنتمي إلى منحن يطلب تعيين معادلة له.

4) ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m\neq 2$ ، الوضعية النّسبية للمنحنيين (C) و (C_m).

5) احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين

(C) و (C_3) والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$ ، ثمّ احسب : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

انتهى الموضوع الثاني