الاختبار الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times(0.5)^n$

1) أ) أنقل على ورقة اجابتك ثم اتمم الجدول التالي، تدور النتائج الى 10^{-2} .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n									

ب) من خلال الجدول السابق ، ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أ) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$.

ب) استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

ج) استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية كما يلي :

$$v_n = u_n - 10\times(0.5)^n .$$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$.

التمرين الثاني :

f الدالة المعرفة على $\mathfrak{R}$ كمايلي: $f(x) = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right)$ و (Cf) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{n\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{n\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \left(\frac{4e^{2x}-1}{4e^{2x}+1}\right)$.

ب) ادرس اشارة $f'(x)$ على $\mathfrak{R}$ ثم انجز جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$

ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x - 2\ln 2 + \ln(4e^{2x}+1)$.

ج) استنتج ان المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا اخر (Δ') بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

4) عين نقط تقاطع المنحنى (Cf) مع محور التراتيب ثم ارسم المنحنى (Cf)

5) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x حيث : $f(x) = m - 2.....(1)$ و m وسيط حقيقي .

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (1)

تصحيح الاختبار الأول لقسم 3 تقني رياضي 2017/2018

التمرين الأول : (09 نقط)

1) أ) اتمام الجدول التالي، تدور النتائج الى 10^{-2} ....(01ن)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3.14	2.18	1.19	0.61	0.31	0.16	0.08	0.04

ب) يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداءا من الحد الثاني ....(0.5ن)

2) أ) برهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$.....(01.5ن)

- نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n=1$: $u_1=3.4$ و $3.4 \geq \frac{15}{8}$. ($\frac{15}{8}\approx 1.875$)

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n=1$.

- نفرض صحة الخاصية من أجل n حيث $n\geq 1$ أي $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ ونبرهن على صحة الخاصية

من أجل $(n+1)$ أي : $u_{n+1} \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^{n+1}$.

لدينا : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ اذن $\frac{1}{5}u_n \geq \frac{3}{4}\times(0.5)^n$ وبالتالي

$\frac{1}{5}u_n+3(0.5)^n \geq \frac{3}{4}\times(0.5)^n+3(0.5)^n$ يعني $\frac{1}{5}u_n+3(0.5)^n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$ أي

$u_{n+1} \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$.

نعلم انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $(0.5)^n > (0.5)^{n+1}$.

وبالتالي : $u_{n+1} \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^{n+1}$.اذن الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$.

وعليه : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$.

ب) استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}-u_n \leq 0$ ......(01.5ن)

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{5}u_n+3(0.5)^n-u_n=-\frac{4}{5}u_n+3(0.5)^n=\frac{4}{5}\left(-u_n+\frac{15}{4}\times(0.5)^n\right)$$

من الاجابة 2) أ) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n$.

اذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}-u_n \leq 0$

اذن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة .

ج) استنتاج أن (u_n) متتالية متقاربة ....(0.5ن)

بما أن المتتالية متناقصة (الاجابة 1) ب) ومحدودة من الاسفل، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4}\times(0.5)^n > 0$ (الاجابة 1) أ)) فهي متقاربة .

3) أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ....(01ن)

من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10\times(0.5)^{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 10(0.5)^n \times (0.5)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 5(0.5)^n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 2(0.5)^n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}\left(u_n - 10(0.5)^n\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الاول v_0 حيث

$v_0 = u_0 - 10(0.5)^0 = 2 - 10 = -8$ ....(0.5ن)

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

$v_n = v_0 q^n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$ حيث n عدد طبيعي ....(0.5ن)

لدينا : $v_n = u_n - 10\times(0.5)^n$ وبالتالي $u_n = v_n + 10\times(0.5)^n$ اذن $u_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times(0.5)^n$ من اجل كل عدد طبيعي n ....(0.5ن)

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ....(0.5ن)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-8\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10(0.5)^n\right] = 0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.5)^n = 0$ حيث $\frac{1}{5}$ و 0.5 عنصران من المجال $]-1;1[$.

4) حساب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$ ....(01ن)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$$
$$S_n = v_0 + 10(0.5)^0 + v_1 + 10(0.5)^1 + \dots\dots + v_n + 10(0.5)^n$$
$$S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n + 10\left[(0.5)^0 + (0.5)^1 + \dots\dots + (0.5)^n\right]$$
$$S_n = -8\left(\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5} - 1}\right) + 10\left[\frac{(0.5)^{n+1} - 1}{0.5 - 1}\right]$$
$$S_n = 10\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1\right] - 20\left[(0.5)^{n+1} - 1\right]$$
$$S_n = 10\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 20(0.5)^{n+1} + 10$$

التمرين الثاني : (11نقطة)

1) حساب $\lim_{n\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{n\to-\infty} f(x)$ ....**(0.5ن+0.5ن)**

$\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2) أ) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \left(\frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}\right)$ ....**(01ن)**

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$:

$$f'(x) = \frac{e^x - \frac{e^{-x}}{4}}{e^x + \frac{e^{-x}}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{4e^x - e^{-x}}{4}}{\frac{4e^x + e^{-x}}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{4e^x - e^{-x}}{4e^x + e^{-x}}$$
$$f'(x) = \frac{e^{-x}\left(4e^{2x} - 1\right)}{e^{-x}\left(4e^{2x} + 1\right)}$$
$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}$$

ب) دراسة اشارة $f'(x)$ على $\Re$ ثم انجاز جدول تغيرات الدالة f ....**(01ن)**

$f'(x) = 0$ يعني $4e^{2x} - 1 = 0$ يعني $\left(2e^x - 1\right)\left(2e^x + 1\right) = 0$ يعني $2e^x - 1 = 0$ يعني

$x = -\ln 2$.

x	$-\infty$ $\quad -ln2 \quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2\ln 2]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-2\ln 2;+\infty[$.

جدول التغيرات :....................(0.5ن)

x	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(-ln2)$	↗ $+\infty$

$$f(-\ln 2)=0$$

3) أ) نبين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$

$$f(x)-y=\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)-x$$

$$f(x)-x=\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)-\ln e^{x}$$

$$f(x)-x=\ln\left(\frac{e^{x}}{e^{x}}+\frac{e^{-x}}{4e^{x}}\right)$$

$$f(x)-x=\ln\left(1+\frac{e^{-2x}}{4}\right)$$

اذن : $\lim_{n\to+\infty}[f(x)-x]=\ln 1=0$ ....(01ن)

وبالتالي : المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$

ب) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=-x-2\ln 2+\ln(4e^{2x}+1)$.

من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{4e^{x}+e^{-x}}{4}\right)$$

(01.5ن)......................

$$f(x)=\ln\left(4e^{x}+e^{-x}\right)-\ln 4$$

$$f(x)=\ln e^{-x}\left(4e^{2x}+1\right)-\ln 2^{2}$$

$$f(x)=\ln e^{-x}+\ln\left(4e^{2x}+1\right)-2\ln 2$$

$$f(x)=-x-2\ln 2+\ln\left(4e^{2x}+1\right)$$

ج) استنتاج ان المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا اخر (Δ') بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(4e^{2x}+1\right)\right]=\ln 1=0$ فان المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا اخر (Δ') بجوار $-\infty$ معادلة له $y=-x-2\ln 2$ ....(01ن)

4) تعين نقط تقاطع المنحنى (Cf) مع محور التراتيب ثم رسم المنحنى (Cf) ....(01ن)

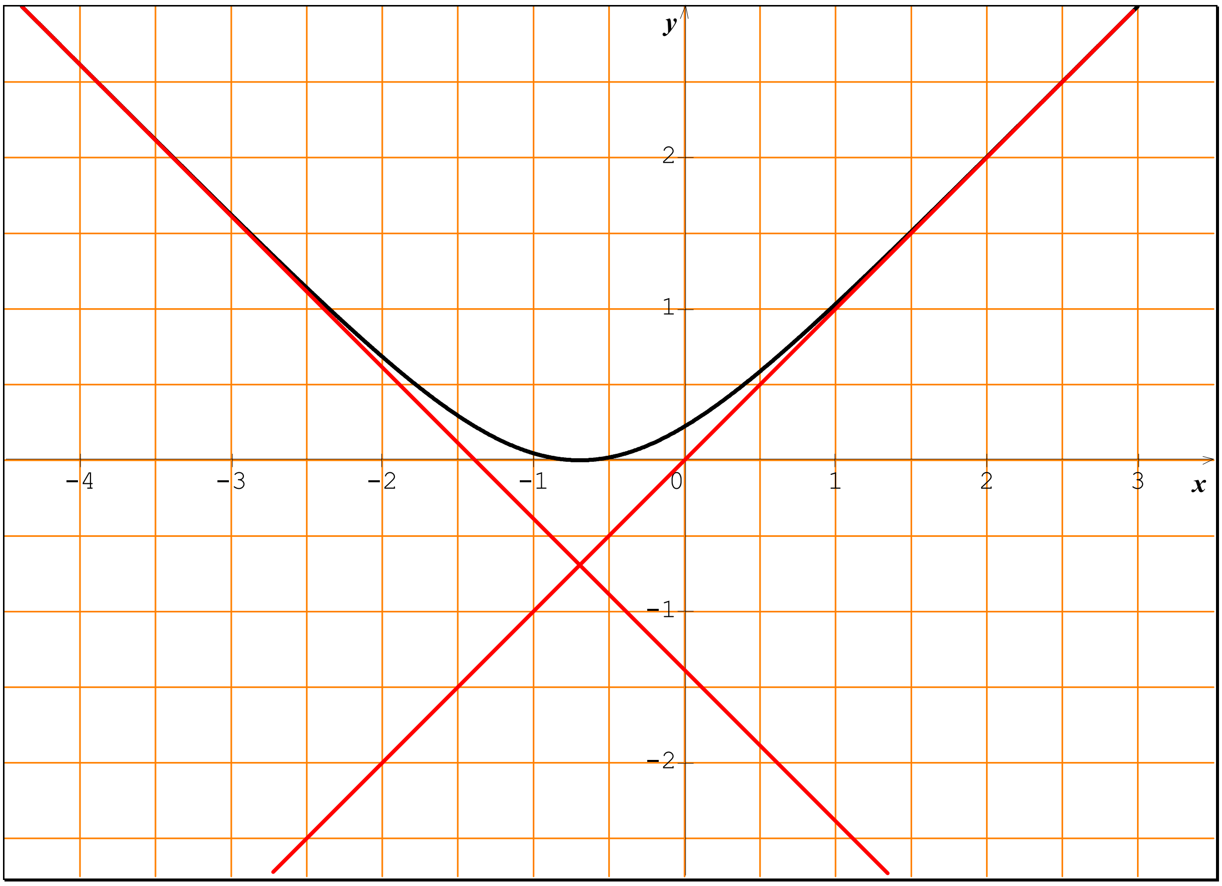
(Cf) يقطع محور التراتيب يعني $f(x)=0$ يعني $\ln\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)=0=\ln 1$ يعني

$\left(e^{x}+\frac{e^{-x}}{4}\right)=1$ يعني $4e^{x}+e^{-x}=4$ يعني $4e^{2x}+1=4e^{x}$ يعني $4e^{2x}-4e^{x}+1=0$.

يعني $\left(2e^{x}-1\right)^{2}=0$ يعني $\left(2e^{x}-1\right)=0$ يعني $x=-\ln 2$

اذن : $(Cf)\cap(yy')=\{A(-\ln 2;0)\}$

رسم المنحنى (Cf) ....(01.5ن)



5) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (1) ....(01ن)

حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (Cf) مع المستقيم ذو معادلة $y = m - 2$

- اذاكان : $m - 2 < 0$ أي $m < 2$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- اذا كان : $m - 2 = 0$ أي $m = 2$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا .
- اذا كان : $m - 2 < -\ln 2$ أي $m < 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين سالبين .
- اذا كان : $m - 2 = -\ln 2$ أي $m = 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين أحدهما سالب والاخر معدوم .
- اذا كان : $m - 2 > -\ln 2$ أي $m > 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين أحدهما موجب والاخر سالب .