

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{k}; \vec{j}; \vec{i}; \vec{0})$ ؛ نعتبر النقط :

$$D(-1; 4; 0) \text{ و } C(0; 3; -1); B(2; 0; -1), A(1; 1; 0)$$

(1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\vec{AD} = \vec{BC}$ و لدينا $\vec{AD}(-2; 3; 0)$ و $\vec{BC}(-2; 3; 0)$ و منه محققة

اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي

$$3(1) + 2(1) + (0) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } A \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(2) + 2(0) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } B \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(0) + 2(3) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } C \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$.

(2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) :

ليكن شعاع الناطيمي للمستوي (Q) هو $\vec{n'}(a; b; c)$ و الشعاع الناطيمي للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(3; 2; 1)$ و $\vec{AB}(1; -1; -1)$

لدينا (Q) يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي يعني أن $\vec{n'} \cdot \vec{n} = 0$ و $\vec{n'} \cdot \vec{AB} = 0$ أي ان

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \dots (1) \\ 3a + 2b + c = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ بالجمع نجد } b = -4a \text{ بالتعويض في المعادلة (1) نجد } a + 4a - c = 0$$

و منه $a = 1$ بوضع $c = 5$ نجد ان $\vec{n'}(1; -4; 5)$ و منه معادلة (Q) هي من الشكل

$$x - 4y + 5z + d = 0 \text{ و هو يشمل النقطة } A \text{ نعوض إحداثياتها في المعادلة الديكارتية نجد}$$

$$1 - 4(1) + 5(0) + d = 0 \text{ و منه } d = 3 \text{ معادلة } (Q) \text{ هي } x - 4y + 5z + 3 = 0$$

(3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي (Q)

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t \\ z = 5t - 3 \end{cases} \text{ حيث } t \in \mathbb{R} \text{ هو مجموعة النقط } M(x; y; z)$$

(4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) هو مجموعة النقط

$$d(H; ABC) = \frac{|3(-2) + 2(0) + (-3) - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14} \text{ نحسب } HM = d(H; ABC) \text{ حيث } M(x; y; z)$$

$$(x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ وبالتبسيط نجد } x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$$

دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)

التمثيل الوسيط للمستقيم (CD) لدينا $\overrightarrow{CD}(-1;1;1)$ هو $y = t^+ + 3; t^+ \in IR$ و $\begin{cases} x = -t^- \\ y = t^+ + 3 \\ z = t^- - 1 \end{cases}$ و منه نعوض في المعادلة

الديكارتيّة للسطح S نجد $t^2 + (t^+ + 3)^2 + (t^- - 1)^2 - 4t^+ + 6(t^- - 1) - 1 = 0$ و منه $3t^2 + 6t^+ + 3 = 0$ و هذا يكافئ $t^2 + 2t^+ + 1 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t^- = -1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1;2;-2)$.

التمرين الثاني (5 نقاط):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$ يكافئ $z - \sqrt{3} = 0$ او

$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ أي ان $z = \sqrt{3}$ و نحسب المميز للمعادلة الثانية $\Delta = -1$ للمعادلة حلين هما $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ مجموعة الحلول هي $S = \left\{ \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_B = \sqrt{3}, \quad z_C = \bar{z}_A$$

اثبات أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ نكتب العددين على الشكل الأسّي $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه

$$z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = \cos(-327\pi) + i\sin(-327\pi) = -1 \text{ و } z_A^{1962} = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^{1962}$$

$$\text{و } z_C^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{2016} = \cos(336\pi) + i\sin(336\pi) = +1 \text{ و } z_C^{2016} = e^{336\pi i} \text{ و منه } -1 + 1 = 0$$

تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C} \right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n = \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} \right)^n = e^{-\frac{n\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{-n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ أي ان $\frac{n\pi}{3} = 2\pi k$ و k عدد طبيعي و منه

نجد $n = 6k$ و k عدد طبيعي

(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$z_E = 2e^{\frac{\pi}{3}i} z_B + \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) z_A \text{ و منه}$$

$$z_E = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) + (1 - 1 - i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \text{ ومنه}$$

$$z_E = \sqrt{3} + 3i - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 2i$ و

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = i \text{ و منه } z_E - z_A = 2(z_C - z_A) \text{ أي أن}$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \text{ و منه النقط } A ؛ C \text{ و } E \text{ في استقامية.}$$

(5) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا ($z \neq z_C$)

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ و هذا يعني أن } (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ و منه}$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \text{ و منه مجموعة النقط } M \text{ هي الدائرة ذات القطر } [AC].$$

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

(1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$ بالقسمة الاقليدية نجد

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \text{ و منه } a = 3 ، b = -10$$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$

لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة

نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$

الطريقة الأولى :

نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$

$$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$$

نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$

$$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2 \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4} \right)$$

و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

الطريقة الثانية :

لدينا الدالة المرفقة هي f حيث $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$ و منه f متزايدة على المجال $[-2; 1]$.

$-2 < u_n < 1$ و منه نجد $f(-2) < f(u_n) < f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2 < u_{n+1} < 1$

و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

(2) دراسة المتتالية (u_n) :
 اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$
 و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2} \left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n} \right) = \frac{5}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ و حدها الأول } \frac{5}{2} \text{ هندسية أساسها } \frac{5}{2}$$

$$v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n \text{ كتابة } v_n \text{ و } u_n \text{ بدلالة } n :$$

لدينا $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ أي ان $v_n - u_n v_n = u_n + 2$ و منه $u_n + u_n v_n = v_n - 2$ أي ان $u_n(1 + v_n) = v_n - 2$ و

$$u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} \text{ منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = 1 \text{ حساب}$$

4) حساب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$ بوضع $t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{2^n}{3}$ و منه (t_n) متتالية هندسية

أساسها 2 و حدها الأول $t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3}$ و منه $S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = t_0 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1)$

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

و $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln(x)$ و $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0$ لان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$ (التزايد المقارن).

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

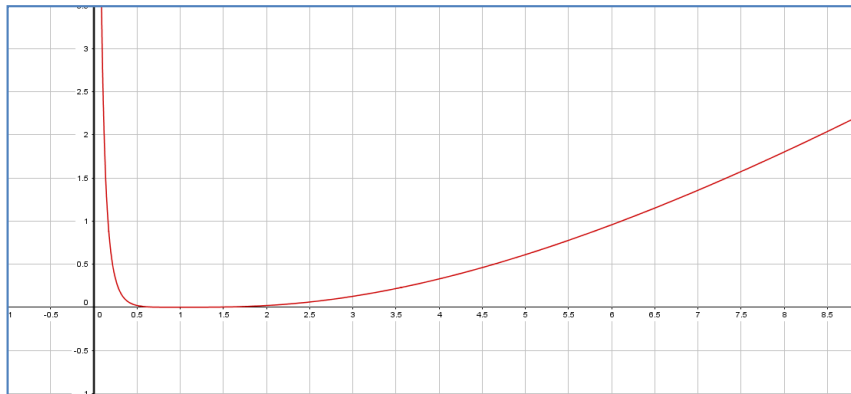
حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x = 0$.

2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ؛ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ و منه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}(\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$



3- رسم المنحني (C) :

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

تبين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = (\ln x)^2$ و منه $u(x) = x$ و $v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)$

$$\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x)dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$$

و منه $u'(x) = 1$ و $\int_1^e \ln(x)dx = e - 2$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$

$$\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$$

و منه $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$

$$\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3 + i$ و $z'' = 3 - i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث : $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ الأخيرة $\bar{z} + 2 = 3 + i$ أو $\bar{z} + 2 = 3 - i$ أي أن $\bar{z} = 1 + i$ أو $\bar{z} = 1 - i$ ومنه $z = 1 + i$ أو $z = 1 - i$ هما حل للمعادلة

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحتقاتها

$$z_D = 1 - i \text{ و } z_C = 1 + i \text{ و } z_B = 3 + i \text{ و } z_A = 3 - i$$

تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z' - z_A = i(z - z_A)$ أي $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ و $z' = iz + 2 - 4i$ منه

(3) النقطة التي لاحتقتها $z_E = 7 - 3i$ و صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = iz_E + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H - z_F = z_E - z_A$ و منه $z_H = z_F + z_E - z_A = 5 + 3i + 7 - 3i - 3 + i = 9 + i$

(4) تمثيل النقط A, B, E, F, H و

تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

(5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات

اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما

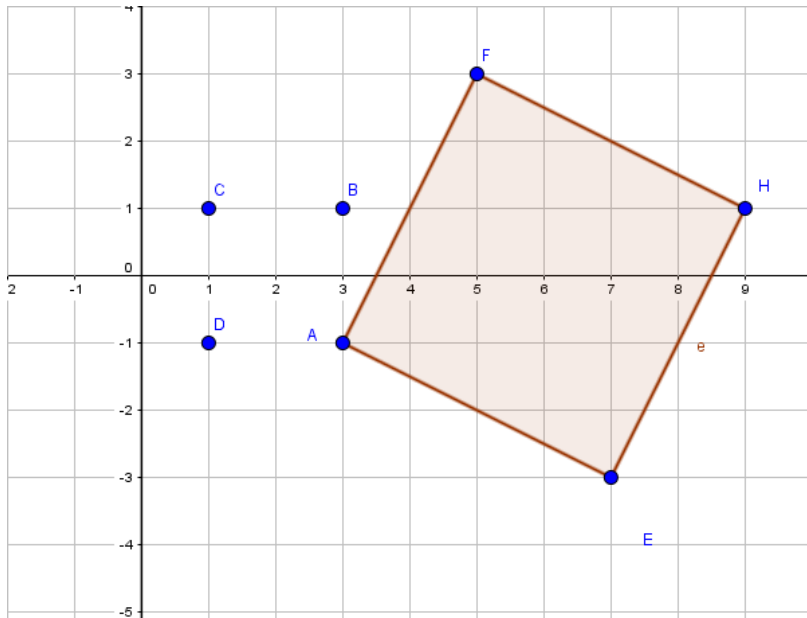
k يسمح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن

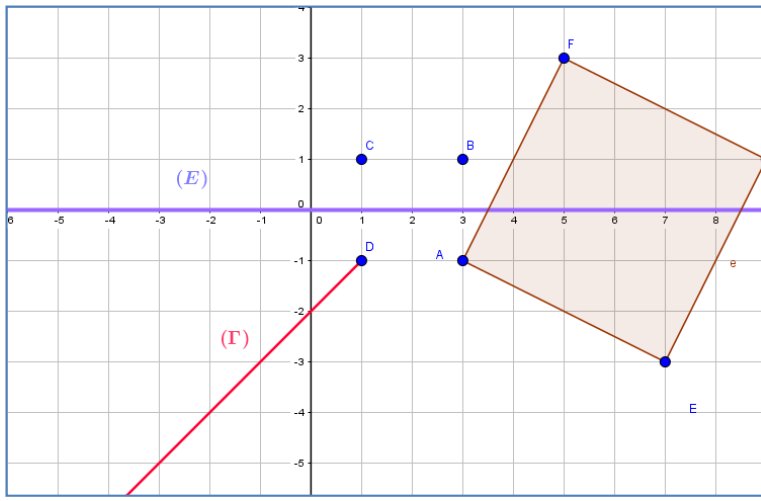
$$z - (1 - i) = ke^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg[z - (1 - i)] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و هذا يعني}$$

$$\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{DM}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و } k \text{ عدد صحيح}$$

مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $(y = -x$





تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة
حيث : $|z-1-i| = |z-1+i|$ تكافئ $CM = DM$
مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة [CD].

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس
(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .
ليكن (p_1) و (p_2) المستويان ذا المعادلتين
الديكارتيتين على الترتيب :

$$x - 2y + 4z - 9 = 0 \quad ; \quad -2x + y + z - 6 = 0$$

(1) تبين أن (p_1) و (p_2) متعامدان : شعاعيهما الناظميان $\vec{n}(-2; 1; 1)$ و $\vec{n}(1; -2; 4)$ على الترتيب
نحسب الجداء السلمي نجد $1(-2) + (-2)1 + 4(1) = 0$ و منه متعامدان .
نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) .

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases} : t \in \mathbb{R} \quad \text{تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو :}$$

(D) محتواة في (p_1) يعني $(-7+2t) - 2(-8+3t) + 4(t) - 9 = 0$ يعني ان $0=0$ محققة .
(D) محتواة في (p_2) يعني $-2(-7+2t) + (-8+3t) + (t) - 6 = 0$ يعني ان $0=0$ محققة و منه (D) هو
تقاطعهما .

(2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات $(-9; -4; -1)$.
التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2)

$$(-9) - 2(-4) + 4(-1) - 9 = 0 \quad \text{أي ان} \quad -18 + 4 = 0 \quad \text{غير محققة و منه} \quad A \quad \text{لا تنتمي الى} \quad (p_1)$$

$$-2(-9) + (-4) + (-1) - 6 = 0 \quad \text{أي ان} \quad 18 - 11 = 0 \quad \text{غير محققة و منه} \quad A \quad \text{لا تنتمي الى} \quad (p_2)$$

$$\text{ثم بين أن :} \quad AM^2 = 14t^2 - 14t + 21 \quad \text{لدينا} \quad M(-7+2t; -8+3t; t) \quad \text{و منه}$$

$$\overrightarrow{AM}(2+2t; -4+3t; t+1) \quad \text{و منه} \quad AM^2 = (2+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (t+1)^2 \quad \text{بالنشر و}$$

$$\text{التبسيط نجد} \quad AM^2 = 14t^2 - 14t + 21 \quad \text{و هو المطلوب .}$$

$$(3) \text{ لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ : } f(t) = 14t^2 - 14t + 21$$

دراسة تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{النهايات}$$

المشتقة : $f'(x) = 28t - 14$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ و منه f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ و متناقصة على المجال $] -\infty; 0]$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{35}{2}$	$+\infty$

أستنتاج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه

الحالة بـ H : من جدول تغيرات f نستنتج أن قيمة $t = \frac{1}{2}$ و $AH = \sqrt{\frac{35}{2}}$ و منه $H\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$

(4) ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A الشعاع الناظمي للمستوي (Q) هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و منه شعاعه الناظمي هو $\vec{n}''(2; 3; 1)$ معادلته الديكارتية من الشكل $2x + 3y + z + d = 0$ بما انه مار بالنقطة A يعني أن $2(-9) + 3(-4) + (-1) + d = 0$ و منه $d = 31$ و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $2x + 3y + z + 31 = 0$.

البرهان أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) : يجب أن تكون H نقطة من (D) و الشعاع $\overrightarrow{AH}$ هو شعاع عمودي على شعاع توجيه هذا المستقيم

$\overrightarrow{AH}\left(3; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ و شعاع توجيه المستقيم (D) هو $\vec{n}''(2; 3; 1)$ نحسب الجداء السلمي

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}'' = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-12 + 12}{2} = 0 \quad \text{و منه محققة}$$

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

$$(1) \text{ حساب : } u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3 \quad \text{و} \quad u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$

لدينا $2 \leq u_1 \leq 4$ محققة

نفرض أن $2 \leq u_n \leq 4$ و لنبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$2 \leq u_n \leq 4 \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4} \text{ بالضرب في } -4 \text{ نجد } -2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1 \text{ بإضافة 5 نجد}$$

$$3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4 \text{ أي ان } 2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ و منه } 2 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ إذن من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن}$$

$$2 \leq u_n \leq 4.$$

(2) تبين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n} = \frac{(4 - u_n)(-1 + u_n)}{u_n}$$

الفرق موجب لان $2 \leq u_n \leq 4$ فإن $4 - u_n \geq 0$ و $-1 + u_n \geq 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

$$(3) \text{ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$$

$$\text{لدينا } 4 - u_{n+1} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = -1 + \frac{4}{u_n} = \frac{-u_n + 4}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$$

$$4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ و منه } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

$$(4) \text{ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ مما سبق نجد أن } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right] \text{ أي } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \text{ و ها كذا}$$

$$0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2}) \text{ أي ان } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \leq \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right] \text{ إلى أن}$$

$$\text{نصل إلى التعميم } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ أي ان}$$

$$(2) 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ أي ان } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} \text{ بتعويض نجد } 0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}} \text{ و هو المطلوب .}$$

$$\text{بحساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ بما أن } 0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \text{ فحسب الحصر}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ نجد}$$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0$$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ ; و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t \text{ نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$

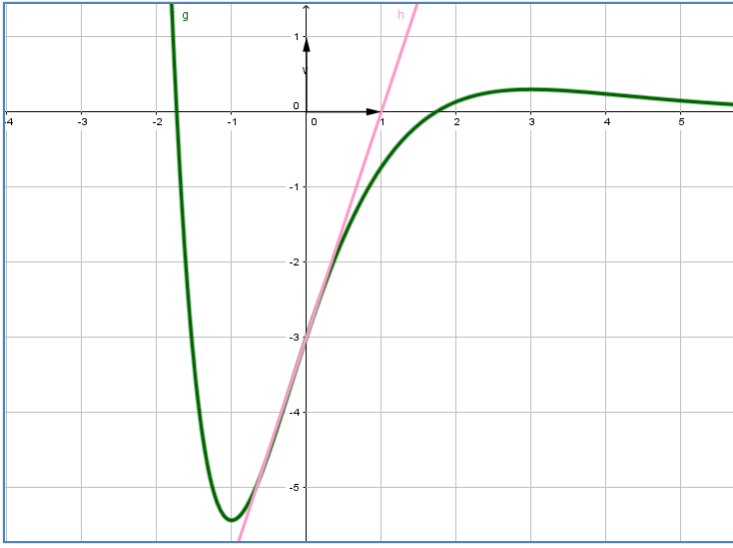
و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$$f(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - 3 = 0 \text{ أي أن } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3} \text{ نقطتي التقاطع هما } B(\sqrt{3}; 0) \text{ و } C(-\sqrt{3}; 0)$$



4- رسم (T) و (C_f)

5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ و}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي أن } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x} \text{ ومنه}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ يكافئ $f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x}$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي

$$F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x} \text{ أي } F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$$

$$F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \text{ ومنه } F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x} \text{ أي}$$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

$$me^x = -(x^2 - 3) \text{ أي أن } -m = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ يكافئ } -m = f(x)$$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$

المناقشة

لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه

للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-m > -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتان

ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب .

لما $-3 > -m \geq 0$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما $0 > -m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما $\frac{6}{e^3} > -m$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

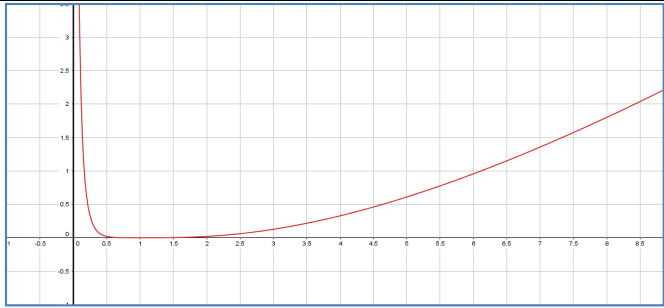
انتهى الموضوع الثاني

اختبار بكالوريا تجريبي
شعبة الثالثة علوم تجريبية
الموضوع الأول

التمارين		عناصر الإجابة		التنقيط
				كاملة
				مجزأة
التمرين الأول	04 ن	1	اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و لدينا $\overrightarrow{AD}(-2; 3; 0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2; 3; 0)$ و منه محققة	0.25
		اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي A و B و C	0.75	
		2	تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) ليكن شعاع الناظمي للمستوي (Q) هو $\vec{n}(1; -4; 5)$ و منه معادلة (Q) هي $x - 4y + 5z + 3 = 0$	0.5
		3	تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي (Q)	0.5
			$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t : t \in \mathbb{R} \\ z = 5t - 3 \end{cases}$	
		4	كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) نحسب	0.25
			$d(H; ABC) = \frac{ 3(-2) + 2(0) + (-3) - 5 }{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$	0.25
			$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$	0.25
			دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)	0.25
			التمثيل الوسيطى للمستقيم (CD) $\begin{cases} x = -t' \\ y = t' + 3 : t' \in \mathbb{R} \\ z = t' - 1 \end{cases}$ و منه نعوض في المعادلة الديكارتية	0.25
التمرين الثاني	5 ن		للسطح S نجد $t'^2 + (t' + 3)^2 + (t' - 1)^2 - 4t' + 6(t' - 1) - 1 = 0$ و منه $3t'^2 + 6t' + 3 = 0$ و هذا يكافئ $t'^2 + 2t' + 1 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t' = -1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1; 2; -2)$.	0.5
		1	1	
			حلول المعادلة $z = \sqrt{3}$ و نحسب المميز $\Delta = -1$ للمعادلة حلين هما $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	
		2	اثبات أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ نكتب العددين على الشكل الأسّي $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$	0.5
			$z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = -1$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$	
			و $z_C^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016} = e^{336\pi i} = 1$ و منه $-1 + 1 = 0$	0.5
			تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب	

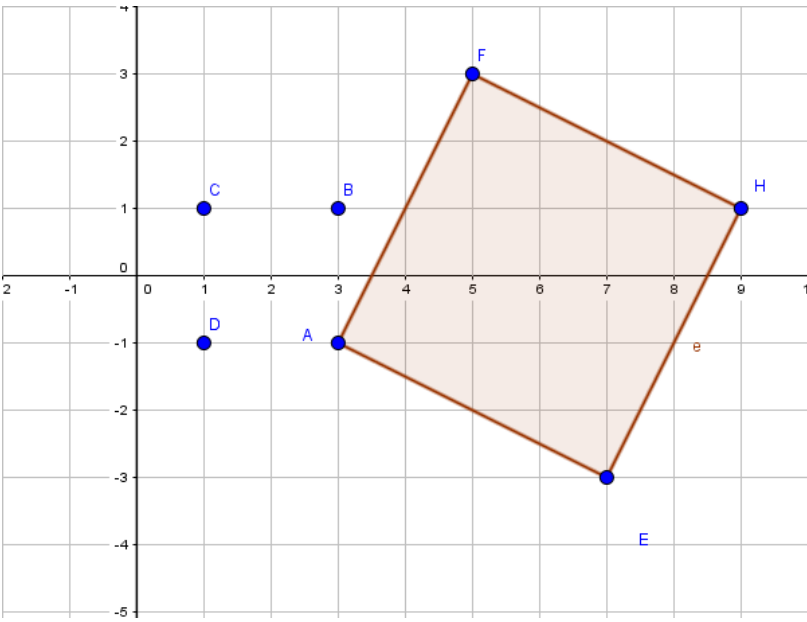
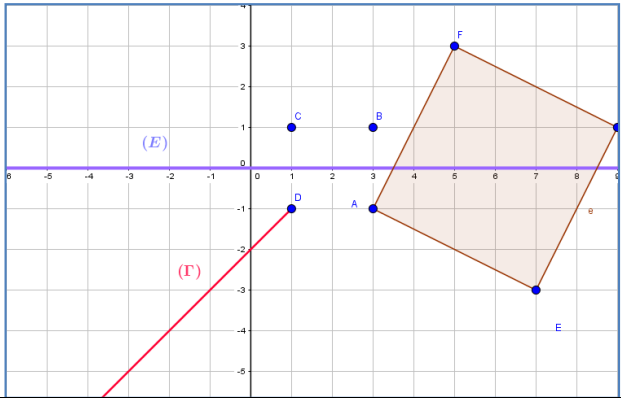
	0.5	$n = 6k$ و k عدد طبيعي	
	0.5	(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$	
	0.5	المثلث ABC متقايس الأضلاع.	
	0.5	(4) تعيين z_E لاحقة النقطة E : $z_E = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$	
		اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية.	
		(5) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا	
	1	$(z \neq z_C)$ يعني أن $k \in \mathbb{Z} : \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و هذا يعني أن $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.	
4 ن	0.25	(1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b : $a = 3$ ، $b = -10$	<u>التمرين الثالث</u>
	0.25	البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$	
		لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة	
		نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$	
		نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$	
	0.5	$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$ و منه $2 + u_{n+1} > 0$	
		نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$	
		$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2 \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4} \right)$ لان عدد سالب لان	
		$-2 < u_n < 1$ و منه $u_{n+1} < 1$	
		و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$	
	0.25	(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ الفرق موجب لأن	
		$-2 < u_n < 1$ و منه المتتالية متزايدة.	
	0.25	استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة.	
		(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$	
	0.25	تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n$ و منه المتتالية	
	0.25	(v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$	
	0.25	كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$	
	0.25		

	0.25	و منه $u_n = \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$																					
	0.25	حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$																					
	1	(4) حساب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$. منه $S_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$																					
7 ن		(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$ 0.5 1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ 0.5 استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$. 0.5 2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي <table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>إشارة $g'(x)$</td><td>—</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table> 0.5 (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ اثبات أن 0.5 1- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه 0.5 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0$ لان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$ (التزايد المقارن). 0.25 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0.25 التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لـ 0.25 حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب 0.25 عموديا معادلته $x = 0$. 0.5 2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ؛ 0.5 جدول تغيرات الدالة f : <table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f'(x)$</td><td>—</td><td>0</td><td>+</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr> </table> 0.5 3- رسم المنحني (C) : 4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$	x	0	1	$+\infty$	إشارة $g'(x)$	—	0	+	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	—	0	+	$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	
x	0	1	$+\infty$																				
إشارة $g'(x)$	—	0	+																				
x	0	1	$+\infty$																				
$f'(x)$	—	0	+																				
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$																				

	1	 0.25 $h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ محققة باستعمال التكامل بالتجزئة 0.75 تبين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = (\ln x)^2$ و منه $u(x) = x$ و $v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)$ و منه $u'(x) = 1$ $\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x)dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$ 5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = 1$ 1 $\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$ و منه $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$ $\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$	
--	---	--	--

الموضوع الثاني

التنقيط		عناصر الإجابة		التمارين
كاملة	مجزأة			التمرين الأول
04 ن		<u>التمرين الأول (5 نقاط) :</u>		
	0.5	(1) حل المعادلتين في نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3 - i$ و $z'' = 3 + i$		
	0.5	استنتاج حلول المعادلة $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن منه $z = 1 + i$ او $z = 1 - i$ هما حلي المعادلة الأخيرة		
	1	(2) تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z' = iz + 2 - 4i$ و منه $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ أي $z' - z_A = i(z - z_A)$		
	0.5	(3) التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = 5 + 3i$ محققة		
	0.5	تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H = 9 + i$.		

	0.5 0.5 0.5	 4) تمثيل النقاط A, B, E, F, H تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة وفيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع . 5) تعيين المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم $[DM]$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للنصف الثاني ذي المعادلة $y = -x$) تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z - 1 - i = z - 1 + i$ تكافئ $CM = DM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$. 	<u>التمرين الثاني:</u>
4 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25		1- تبين أن (p_1) و (p_2) متعامدان : شعاعيهما الناظميان $\vec{n}(-2; 1; 1)$ و $\vec{n}(1; -2; 4)$ على الترتيب نحسب الجداء السلمي نجد $1(-2) + (-2)1 + 4(1) = 0$ و منه متعامدان . نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) . تبين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : $t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$ (D) محتواة في (p_1) يعني $(-7 + 2t) - 2(-8 + 3t) + 4(t) - 9 = 0$ يعني ان $0=0$ محققة . (D) محتواة في (p_2) يعني $-2(-7 + 2t) + (-8 + 3t) + (t) - 6 = 0$ يعني ان $0=0$ محققة و منه (D) هو تقاطعهما . 2- التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2)	

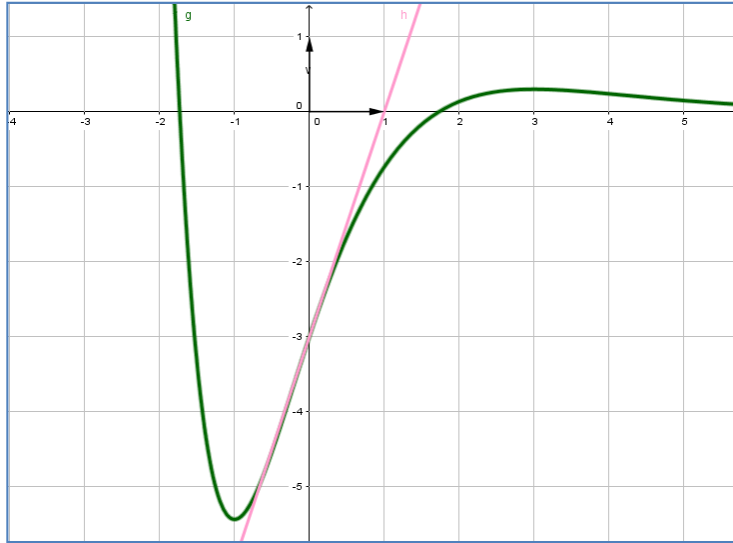
0.5	تبيين أن : $AM^2 = 14t^2 - 14t + 21$. (3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t) = 14t^2 - 14t + 21$: دراسة تغيرات الدالة f : النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ المشتقة : $f'(x) = 28t - 14$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ و منه f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$. جدول تغيراتها									
0.5	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{35}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$f(x)$	$+\infty$	$\frac{35}{2}$	$+\infty$	
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$							
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{35}{2}$	$+\infty$							
0.5	أستنتاج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرسم لها في هذه									
0.5	$H\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$									
0.5	(4) المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $2x + 3y + z + 31 = 0$ البرهان أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) : الجداء السلمي $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n''} = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-12+12}{2} = 0$ و منه محققة									
4	(1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$ لدينا $2 \leq u_1 \leq 4$ محققة نفرض أن $2 \leq u_n \leq 4$ و لنبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ $2 \leq u_n \leq 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1$ بإضافة 5 نجد $3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4$ أي ان $2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4$ و منه $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \leq u_n \leq 4$.	التمرين الثالث								

0.5	(2) تبين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق الفرق موجب. استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة . 3- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$ لدينا $4 - u_{n+1} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$ و بما أن $2 \leq u_n \leq 4$ بالقلب نجد $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ و منه $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. 4- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن 0.5 $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ و منه $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right]$ أي $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1})$ و ها كذا $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \leq \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right]$ أي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2})$ إلى أن نصل إلى التعميم $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)$ و منه $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)$ أي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(2)$ أي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب . حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بما أن $n' = n + 1$ و $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ 0.5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ فحسب الحصر نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$	
<u>7)</u> <u>نقاط</u> :	1 $a = -3$ و $a = 1$ و $b = 0$: 1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c : 2- $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ 2- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ حساب 0.25 0.25	<u>التمرين</u> <u>الرابع</u>

0.25 دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $[-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$ و شكل جدول تغيراتها :

0.25	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
	$f(x)$	$+\infty$		$\frac{6}{e^3}$	
			$-2e$		0

0.5 3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$
 تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
 0.5 $f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ اي ان $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$



4- رسم (T) و (C_f)
 5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

0.5
$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x}$$
 و منه

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

0.5 $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ يكافئ $f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x}$ و
 منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$ أي

$$F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$
 و منه
$$F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

		$F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ 6- حساب بوحدۃ المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي $A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$ 1 $A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$ 7- وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ 0.25 المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ 0.75 المناقشة لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول . لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب. لما $-m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان و منه للمعادلة حلين سالبين لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب . لما $-m > -3$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة . لما $-m > 0$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب . لما $-m = -\frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة لما $-m > -\frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .
--	--	--