الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المفتشية العامة للبيداغوجية — **المقاطعة الشرقية**

امتحان البكالوريا التجريبي — **لولاية عين الدفلى**

دورة ماي 2017 — **الشعبة: رياضيات**

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 4 ساعات

34

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) بين أن العدد 2017 أولي.

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $14119x-10085y=22187 \quad \ldots\ldots (E)$

أ/ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 22187 ، 10085 و 14119.

ب/ بين أن الثنائية $(3;2)$ حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين مجموعة حلولها.

ج/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x\,;y)=11$.

3) أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 5^n+7^{2017} قبلا للقسمة على 11.

4) ليكن a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلا منهما أصغر من 8 ، نعتبر $N=\overline{a01b}$ مكتوب في النظام العشري

أ/ تحقق أن : $10^3\equiv(-1)[11]$.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي N حيث باقي قسمته على 11 هو 4.

ج/ أكتب هذا العدد في النظام ذي العد 11.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $x^2e^{2iy}+4=0$ و $x>0$ ثم تحقق أن العدد المركب $-2i$ يحقق هذه المساواة.

2) نرفق بكل عدد مركب Z يختلف عن $-2i$ العدد المركب Z' حيث: $Z'=\frac{Z-2i}{Z+2i}$.

لتكن النقط A ، B ، M ، M' صور الأعداد $2i$ ، $-2i$ ، Z و Z' على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{u};\vec{v})$. نضع : $Z+2i=re^{i\theta}$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ و $\theta\in\mathbb{R}$.

أ/ بين أن : $Z'-1=\frac{4}{r}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

ب/ عين مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z' عددا حقيقيا.

ج/ بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و نصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تحديد عناصرها المميزة.

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\ }{4}}$ و زاويته α .

أ/ عين القيس الرئيسي للعدد α إذا علمت أن صورة A بالدوران R هي النقطة ذات اللاحقة 1.

ب/ عين على الرسم النقط : A ; B ; I .

ج/ تحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R ثم أرسم شكلا في نفس المعلم السابق.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases}$ من أجل $n \geq 2$ و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$.

1). أ/ أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

ب/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n}$

2).أ/ بين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}.dx \leq \frac{1}{k}$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - \frac{1}{n} \leq \ln n \leq u_n - 1$ و $0 \leq v_n \leq 1$.

3).أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4).أ/ بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ، نرمز بـ α إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا يطلب حساب α)

ب/ ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

k عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = x - 1 + x e^{kx}$.

نرمز بـ (C_k) للمنحني الممثل للدالة g_k في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I – نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x) = 1 + (1 + kx)\, e^{kx}$.

1. أدرس $g'_k(x)$ ثم أدرس إشارته.
2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x) > 0$.

II –1.أ/ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها .

ب/ أحسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$.

جـ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_k) بجوار $-\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ/ عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_k) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ب/ بين أن النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k}; -\frac{2}{k}(1 + e^{-2}) - 1\right)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_k) .

4. أ/ بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

ب/ بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (D) تساوي $\alpha e^{\alpha} / \sqrt{2}$.

5. أ/ بين أنه من أجل عدد حقيقي ، $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_k) و (C_{-k}) ؟.

ب/ أرسم في نفس المعلم (C_1) و (C_{-1}) .

III– λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k = \int_\lambda^0 -xe^{kx} dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة؟.
2. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1 ثم $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.
3. بين أن : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$

الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (04 نقط)

I- a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$

عين الأعداد a ، b و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين .

1. أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) .
ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3 . أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$

التمرين الثاني : (05 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.لتكن النقط H,D,C,B,A التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_H=1+Z_D \ , \ Z_D=-\frac{1}{a}i \ , \quad Z_C=ia \quad , \ Z_B=1+\frac{a-1}{a}i \ , \ Z_A=a$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

1) أ - تحقق أن : $Z_B-Z_D=\overline{Z_D}(Z_A-Z_C)$

ب- أستنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

2) أ – عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D.

ب- حدد Z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S .ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل .

ج – بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ثم جد علاقة بين مساحتيهما .

3) لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كما يلي : $M_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S(M_n)$

حيث Z_n لاحقة النقطة M_n ونضع : $U_n=|Z_n-Z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب- عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة .
جـ - نرمز بـ T_n إلى مجموعة أطوال القطع المستقيمة $[M_{n+1}\Omega],[M_n\Omega],..........,[A\Omega]$.أحسب المجموع T_n بدلالة n.

4)لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta\in R$.

* حدد الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة R .

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$, $C(0;5;1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع .

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ،ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3- أ) .عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب). عين تمثيلا وسيطيا لـلمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

جـ).نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي .عين العدد t حتى يكون $AS^2 = AB^2$.

4-أ).عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ثم أحسب حجمه V.

ب).بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدان .

جـ).لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\| = 6$

بين أن المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة محيطة بالمثلث ABC يطلب مركزها وطول نصف قطرها .

التمرين الرابع :(07 نقط)

I- بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x \geq 1$ ،بين أن $x-1=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند1.فسر النتيجة بيانيا.

2. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه كل من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ،ثم شكل جدول تغير الدالة f .

جـ) أرسم المنحى (C_f) .

3. ليكن S مساحة الحيز D المنحى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$
A و B نقطتان من (C_f) فاصلتهما على الترتيب 1و3 ، والنقطتان $p(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي .

أ) أحسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ .

ب) أستنتج أن $2\ln(1+\sqrt{2}) \leq S \leq 4\ln(1+\sqrt{2})$.(ملاحظة $\left((1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}\right)$) .

III- نعتبرالدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. بين أنه كل من أجل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) \geq 1$.
2. أ) بين أن $g \circ f(x) = x$.ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فان $M^/(x;y)$ نقطة من (C_g) .
ب) ماذ تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟أرسم المنحنى في المعلم السابق (C_g) .
3. ليكن $S^/$ مساحة الحيز $D^/$ المحدد بالمنحى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = 2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y = 3$.

أ) بين أن $S^/ = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

ب) أحسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$ ثم أستنتج قيمة S .