الحل النموذجي و سلم التنقط

الشعبة : تقني رياضي **بكالوريا التجريبي 2017**

الموضوع الأول

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) — 0.5

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ x = 1 + \alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases} , \quad \alpha \in R$$

ب) شعاع توجيه (Δ) $\vec{u}_{(\Delta)}(6,-2,4)$

$\vec{u}_\Delta$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين لأن

$$\frac{6}{-2} \neq \frac{-2}{1}$$ — 0.25

ندرس التقاطع

$$\begin{cases} 2 - 2\alpha = -2 + 6t \\ 1 + \alpha = 1 - 2t \\ 2 - 3\alpha = 4t \end{cases}$$

نجد $t = 2$ — 0.25

بالتعويض في الجملة (1) نجد

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$ تناقض

ومنه α ليس وحيد اذن المستقيمان (AB) و (Δ) غير متقاطعان فهما ليسا من نفس المستوي

-2 (P) يشمل (AB) ويوازي (Δ) معناه

أ) تحقق ان $\vec{n}\,(1,5,1)$ ناظمي للمستوي (P)

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\vec{n}.\ \vec{u}_\Delta = 0$ — 0.5

ب) معادلة المستوي (P) :

$\vec{n}$ ناظمي لـ (P) معناه

$(P):\ \ x + 5y + z + d = 0$

بما أن $A \in (P)$ معناه :

$2 + 5(1) + 2 + d = 0$

$d = -9$ — 0.5

ومنه

$(P):\ \ x + 5y + z - 9 = 0$

ج) حساب المسافة بين (P) و (Δ)

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{|-2+6t+5(1-2t)+4t|}{\sqrt{1^2+5^2+1^2}}$$

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ — 0.5

-3 احداثيات I منتصف $[AB]$

$I\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — 0.25

معادلة المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$

$-2x + y - 3z + d = 0$

(Q)يشمل النقطة I

$d = 2$

ومنه معادلة المستوي المحوري هي :

$(Q): -2x + y - 3z + 2 = 0$ — 0.5

-4 $MA^2 - MB^2 = 2$

التحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) معناه :

$HA^2 = 5$

$HB^2 = 3$

$HA^2 - HB^2 = 5 - 3 = 2$ — 0.25

ومنه $H \in (\Gamma)$

طبيعة المجموعة (Γ) حيث :

$MA^2 - MB^2 = 2$

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2$

$(2\,\overrightarrow{MI})\left(\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})\right) = 2$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 1$

تكافئ

$\overrightarrow{BA}\,(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI}) = 1$

تكافئ

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI} = 1$

بما أن(Γ) $H \in$ معناه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI} = 1$ ومنه نعوض نجد : — 0.5

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} + 1 = 1$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} = 0$

وبالتالي (Γ) هي المستوي الذي يشملH و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له

التمرين الثاني (04 نقاط)

-1

$5^6 = 15625$

$5^6 \equiv 1\,[7]$ — 0.25

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0 \equiv 1[7]$, $5^1 \equiv 5[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$

$5^3 \equiv 6[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$

$5^6 \equiv 1[7]$ — 0.25

دورية و دورها $k = 6n$

$5^6 \equiv 1[7]$

$5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$

$2016 = 6 \times 336 = 6n$ — 0.25

-2 $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعيn و $4S_n = 5^{n+1}$

لذلك نحسب

$S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \ldots 5^n$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$

$$S_n = 1\left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$$ — 0.25

و منه

0.25 — $4S_n = 5^{n+1} - 1$

لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$

0.25 — تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

يوجد (5, -4) بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

ومنه S_n 5^n , أوليان فيما بينهما

ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$

لدينا

$4S_n \equiv a\ [7]$

0.25 — نضرب في 2

$8S_n \equiv 2a\ [7]$

$8 \equiv 1\ [7]$

ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$

العكس :

بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\,S_n \equiv a\ [7]$

لدينا

$S_n \equiv 2a\ [7]$

نضرب في العدد 4

$4S_n \equiv 8a\ [7]$

0.25 — $8a \equiv a\ [7]$

$4\,S_n \equiv a\ [7]$

جـ) بين أن : $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه

$4\,S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$

0.25 — $5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$

$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

لدينا حسب ما سبق:

$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

0.25 — فان

$S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$

ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0

د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n

معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$

$5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$

0.5 — $5^{n+1} \equiv 1\ [7]$

$5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$

$n + 1 = 0, \quad n = -1,$ مرفوضة -1

وهو المطلوب $n + 1 = 6, \quad n = 5$,

$S_n = \dfrac{5^{n+1} - 1}{4}$

3- حلول المعادلة (E) هي :

01 — $(x, y) = (KS_n + 5\ , -K \times 5^n - 4)\ ,\quad K \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث(05 نقط)

-1

0.25 — أ) $P(1) = 0$

ب)

0.5 — $\begin{cases} a = 2\cos\theta \\ b = 1 \end{cases}$

ج) حلول المعادلة هي:

0.5 — $\boldsymbol{S = \{1;\ -\cos(\theta) + i\sin(\theta)\ ;\ -\cos(\theta) - i\sin(\theta)\}}$

-2 أ) الشكل المثلثي :

.025 — $Z_A = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$

$\cos\ (\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin\ (\pi - \theta) = \sin\theta$

.025 — $Z_B = \cos(\pi - \theta) + i \sin\ (\pi - \theta)$

$Z_C = \overline{Z_B}$

.025 — ومنه $Z_C = \cos(-\pi + \theta) + i \sin\ (-\pi + \theta)$

الشكل الأسي:

$Z_A = e^{2i\pi}$

.075 — $Z_B = e^{i(\pi - \theta)}$

$Z_C = e^{i(-\pi + \theta)}$

ب- طبيعة المثلث ABC

.025 — $|AC| = [Z_C - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

.025 — $|AB| = [Z_B - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

ومنه المثلث متساوي الساقين

.025 — نعين θ حتى يكون المثلث ABC قائم في A :

.025 — الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ نجد $\theta = \frac{\pi}{2}$

جـ) $Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

.025 — $Z_G = \frac{1 - 2\cos\theta}{3}$

د) المجموعة (Γ) حيث :

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$

معناه $MG = MO$

0.5 — ومنه (Γ) محور القطعة $[OG]$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC

3- قيم العدد الطبيعي n حتى يكون :

$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$

$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا معناه $\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ حقيقيا

أي $sin\frac{n\pi}{2} = 0$

0.5 — ومنه $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

و بالتالي: $n = 2k$ مع $k \in N$

التمرين الرابع (07 نقط)

.I

1) المشتقة:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$ 0.25

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$: 0.25

$g'(x) > 0$

ومنه الدالة متزايدة تماما

جدول التغيرات: 0.25

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	↗

0.25

2) حساب : $g(0) = 0$ 0.25

اشارة: $g(x) > 0$ لما $x \in]0,+\infty[$

$g(x) < 0$ لما $x \in]-1,0[$

.II

1) النهايات: 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty$ 0.25

$x = -1$ مستقيم مقارب

2) 0.5

أ) حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$ 0.25

ب) $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$ ومن ثم الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-1,0]$

جدول التغيرات 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

ج) لدينا: $0 \le x \le 4$ 0.25

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,4]$ فان

: $f(0) \le f(x) \le f(4)$

$$0 \le f(x) \le 4 - \frac{ln5}{5} \le 4$$ 0.25

د) $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى:

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x] = 0$

دراسة الوضعية: 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$		$-$
الوضعية	أعلى	يقطع	أسفل

3) التمثيل البياني (C_f) و (Δ)

4) حساب مساحة الحيز

0.25 $A = \int_0^1 (x - f(x))\, dx$

0.25 $= \int_0^1 \frac{\mathrm{Ln}(x+1)}{x+1}\, dx$

0.25 $= \frac{1}{2}[[\mathrm{Ln}(x+1)]^2]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(2))^2$

.III

2) باستعمال البرهان بالتراجع:

نتحقق من أجل $n = 0$ لدينا: $U_0 = 4$

$0 \le U_0 \le 4$

0.75 نفرض أن: $0 \le U_n \le 4$

بما أن الدالة متزايدة على المجال $[0,4]$ فان:

$f(0) \le f(U_n) \le f(4)$

$0 \le f(U_n) \le 4$

حسب النتيجة 2) جـ) فان: $0 \le U_{n+1} \le 4$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $0 \le U_n \le 4$

0.25 3) المتتالية (U_n) متناقصة لأن من أجل كل x من $[0,+\infty[$

$f(x) - x \le 0$

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \le U_n \le 4$

0.25 فان: $f(U_n) - U_n \le 0$ أي $U_{n+1} - U_n \le 0$

لدينا المتتالية (U_n) متناقصة و محدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

حساب

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

المتتالية (U_n) متقاربة ومنه:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

و بما أن $U_{n+1} = f(U_n)$

0.25 والدالة f مستمرة على المجال $]-1,+\infty[$ فان:

$f(l) = l$

ومنه $f(l) - l = 0$

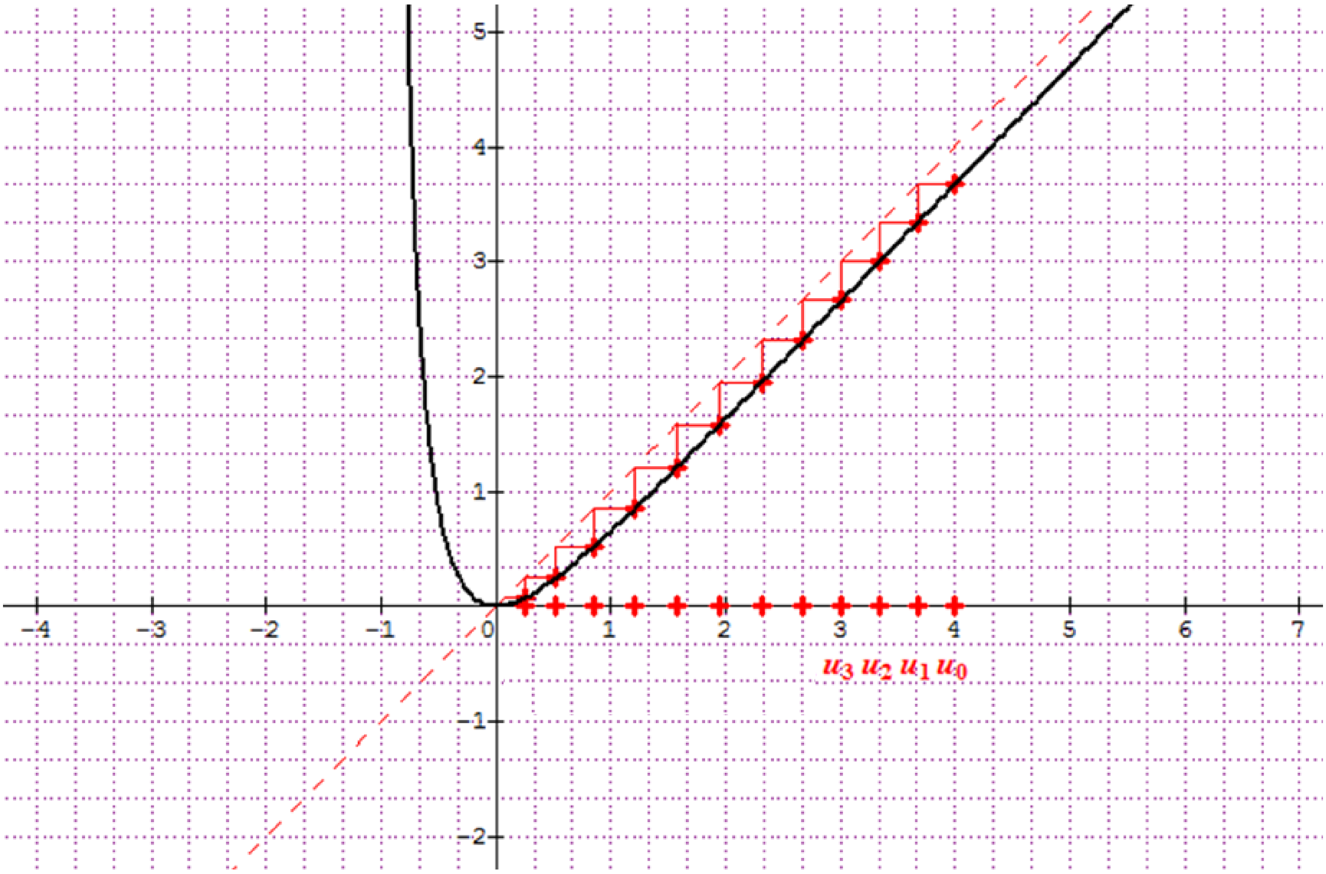
و حسب ما سبق $l = 0$ بالتالي

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

0.5

0.5

0.25



التمثيل البياني للتمرين الرابع للموضوع الأول

الحل النموذجي و سلم التنقط

الشعبة : تقني رياضي **بكالوريا التجريبي 2017**

الموضوع الثاني

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

$U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4}\quad ;\quad U_0=\frac{1}{4}$

تعيين a و b في :

$U_{n+1}=a+\frac{b}{U_n+4}$

و منه :

$$U_{n+1}=\frac{a(U_n+4)+b}{U_n+4}$$

$\begin{cases}a=3\\ 4a+b=2\end{cases}\quad \begin{cases}a=3\\ b=-10\end{cases}$ 0.5

$$U_{n+1}=3-\frac{10}{U_n+4}$$

-2

أ) باستعمال البرهان بالتراجع

$-2<U_n<1$

نتحقق:

$P(0):\ -2<U_0<1$ 0.75

نفرض:

$-2<U_n<1$

نبرهن أنها صحيحة ن أجل $n+1$

ب) المتتالية U_n متزايدة تماما على N لان:

$U_{n+1}-U_n=\frac{-(U_n-1)(U_n+2)}{U_n+4}$

وبما أن $U_n<1$ فإن $U_n-1<0$ و

$U_n>-2$ فإن $U_n+2>0$ فان 0.75

وعليه فان: $-(U_n-1)(U_n+2)>0$

ولدينا كذلك $U_n+4>0$ ومن ثم فإن

$U_{n+1}-U_n>0$

جـ) المتتالية (U_n) متقاربة لأنها متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 0.25

3) أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحدها الأول $U_0=3$ 0.5

ب) $V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$ 0.25

$U_n=\frac{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n}$ 0.25

ج) حساب المجموع:

$V_0=3$

$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)$

$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$

. 0.25

$V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$

نعوض نجد :

$S_n=\frac{1}{3}(1+2+2^2+\cdots+2^n)$ 0.5

$S_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$

التمرين الثاني (04 نقط)

1) $A\in(ABC)\ ;\ B\in(ABC)\ ;\ C\in(ABC)$ 0.75

2) $\begin{cases}x=k-2\\ y=5k+8\\ z=-k+4\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$ 0.5

(3

أ) نحل الجملة $\begin{cases}x-2z-11=0\\ x-y-z-7=0\end{cases}$ 0.5

ب) ندرس التوازي :

$\vec{u}(1,5,-1)$, $\vec{v}(2,1,1)$, $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{5}$ ومنه (T) و

(Δ) غير متوازيان. 0.25

ندرس التقاطع معناه نحل الجملة:

$\begin{cases}2t+11=k-2\\ t+4=5k+8\\ t=-k+4\end{cases}$ 0.5

نعوض t في المعادلة 2 نجد $k=0$ ثم نعوض في

المعادلة 3 نجد $t=4$ ثم نعوض هذه القيم في المعادلة1

نجد : $-2=19$ و هذا مستحيل.

إذا (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

-4 أ)

$E\in(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}3=11+2t\\ 0=4+t\\ -4=t\end{cases}$ 0.25

نجد t وحيد $\begin{cases}t=-4\\ t=-4\\ t=-4\end{cases}$

$F\in(T)\Leftrightarrow\begin{cases}-3=k-2\\ 3=5k+8\\ 5=4-k\end{cases}$

نجد k وحيد $\begin{cases}k=-1\\ k=-1\\ k=-1\end{cases}$ 0.25

ب) $(\Gamma):\ -6x+3y-9z+54-\alpha=0$ 0.5

و هي معادلة ديكارتيه للمستوي الذي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

جـ) $I\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ منتصف القطعة $[EF]$. 0.5

$I\in(\Gamma)$ بعد التعويض نجد $\alpha=63$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1) أ) $P(\alpha i)=0$ — 0.25

نجد $\alpha=1$ و منه $P(i)=0$

ب)

$$\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=1\end{cases}$$ — 0.5

حلول المعادلة هي:

$$\left\{i;\ \frac{-\sqrt{3}-i}{2};\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right\}$$ — 0.5

2) أ) نحسب: — 0.25

$|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=1$

ومنه النقط A,B,C تنتمي الى دائرة مركزها المبدأ O — 0.25

ونصف قطرها 1

نبين أن

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}\\ OA=OC\end{cases}$$ — 0.5

ومنه الرباعي $OABC$ معين

3) أ) حساب

$$Z_2={Z_1}^2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$ — 0.25

التمثيل البياني — 0.25

ب)باستعال البرهان بالتراجع :

نتحقق : من أجل $n=0$: $OA_0=1$ ومنه $A_0\in(C)$ — 0.5

نفرض أن :$A_n\in(C)$ ونبرهن أن $A_{n+1}\in(C)$ أي

$OA_{n+1}=1$ لدينا $A_n\in(C)$ معناه :

$OA_n=1$ أي $|Z_n|=|{Z_1}^n|=|Z_1|^n=1$

$OA_{n+1}=|{Z_1}^{n+1}|=|{Z_1}^n|\times|Z_1|=1$

ومنه النقط A_{n+1} تنتمي الى الدائرة (C)

جـ) نبرهن أن:

$$Z_{n+1}-Z_n={Z_1}^{n+1}-{Z_1}^n$$

$$={Z_1}^n(Z_1-1)$$ — 0.25

$$={Z_1}^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

د)

$$|Z_{n+1}-Z_n|=1$$ — 0.25

المسافة:

$$A_n\,A_{n+1}=|Z_{n+1}-Z_n|=1$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$$OA_n=OA_{n+1}=1$$ — 0.25

و

$$A_n\,A_{n+1}=1$$

و منه المثلثات OA_nA_{n+1} متقايسة الأضلاع .

4) أ) f تشابه مباشر مركزه النقطة A_0 ذات اللاحقة 1 نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ — 0.5

ب) صورة المثلث OA_1A_2 هو المثلث $O'A'_1A'_2$ حيث

$O'=f(O)$, $O'(0,\sqrt{3})$ — 0.5

$A'_1=f(A_1)$, $A'_1(2,\sqrt{3})$

$A'_2=f(A_2)$, $A'_2(1,2\sqrt{3})$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x)=e^{x-2}-1$ — 0.25

جدول التغيرات: — 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↗

— 0.25

2) اشارة : $g(x)\geq 0$ — 0.25

II.

1) أ) النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$ — 0.25

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$ — 0.25

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$$ — 0.25

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى (d) — 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

2) حساب المشتقة : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x-2}}$ — 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R — 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

— 0.25

3) أ) معناه نحل المعادلة : $f(x)=0$ — 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

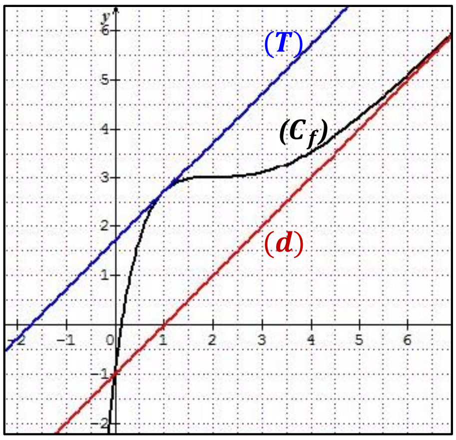
ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x)=0$ — 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d)هي: — 0.5

$$y=x-1+e$$

5) التمثيل البياني — 0.5



0.25

0.25

5) <u>المناقشة البيانية:</u> $f(x) = x + m$

$m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا

$m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم

$-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما — 0.5

$m = e - 1$ حلا واحدا موجبا

$m = e - 1$ ليس لها حلول

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع :

$U(x) = x$ و $V'(x) = e^{2-x}$ — 0.5

$H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$

ب) حساب A:

$$A = \int_0^2 (f(x) - y)dx$$

$$A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 xe^{2-x}\, dx$$ — 0.5

$$A = [H(x)]_0^2$$

$$A = H(2) - H(0)$$

$$A = (e^2 - 3)\ cm^2$$