على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $H(1, 1, 0)$, $B(0, 2, -1)$, $A(2, 1, 2)$

$$\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{المعرف بتمثيله الوسيطى:}$$

(1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

(2) بين أن (AB) و (Δ) لا ينتميان الى نفس المستوي.

(3) ليكن (P) المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي (Δ) .

(أ) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1, 5, 1)$ ناظمي للمستوي (P) .

(ب) اكتب معادلة ديكراتية للمستوي (P) .

(ج) أحسب المسافة بين المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

(4) عين احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم جد معادلة ديكراتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

(5) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = 2$

- تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني : (04 نقط)

(1) تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016} \equiv 1[7]$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

(ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.

(ج) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

(د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

(3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم, نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(5, -4)$ حل للمعادلة (E)

ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (05 نقط)

(1) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \pi[$ و z عدد مركب , $P(z)$ كثير حدود معرف بمايلي :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2\cos\theta)z^2 + (1 - 2\cos\theta)z - 1$$

(أ) تحقق أن 1 جذر لـ $P(z)$.

(ب) عين العددين الحقيقيين a, b بحيث : $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$

(ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$, وليكن النقط A, B, C لواحقها z_A, z_B, z_C

على الترتيب حيث : $z_A = 1, z_B = -\cos\theta + i\sin\theta$ و $z_C = -\cos\theta - i\sin\theta$

(أ) اكتب z_A, z_B, z_C على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

(ب) حدد طبيعة المثلث ABC ثم عين قيمه θ حتى يكون قائم في A .

(ج) عين بدلالة θ لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

(د) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3\|\vec{MO}\|$

(3) نفرض $\theta = \frac{3\pi}{4}$, عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا.

التمرين الرابع : (07 نقط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1, +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, (C_f) تمثيلها البياني في المعلم

المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1, +\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(ج) استنتج أنه إذا كان $x \in [0, 4]$ فإن $f(x) \in [0, 4]$.

(د) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أرسم كلا من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(4) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

(III) (U_n) متتالية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بمايلي: $U_0 = 4$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(1) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل كل من U_0, U_1, U_2, U_3 .

(2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 4$

(3) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة استنتج أنها متقاربة ثم أحسب نهاية U_n عند $+\infty$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4}$

(2) أ) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < U_n < 1$

ب) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

(3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي : $V_n = \frac{U_n+2}{1-U_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

ج) احسب المجموع : $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{5}{V_1} + \frac{5^2}{V_2} + \dots + \frac{5^n}{V_n}$

التمرين الثاني : (04 نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $A(1, 4, -5)$, $B(3, 2, -4)$,

$C(5, 4, -3)$ و $D(-2, 8, 4)$ و الشعاع $\vec{u}(1, 5, -1)$.

(1) بين أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(2) حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D و يوازي $\vec{u}$.

(3) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة : $x - y - z - 7 = 0$

أ) بين أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي : $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$

ب) بين أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

(4) أ) تعطى النقطتان $E(3, 0, -4)$ و $F(-3, 3, 5)$, تحقق أن $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

ب) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha$ مع عدد حقيقي.

ج) عين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الثالث : (05 نقط)

نعتبر كثير حدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$

(1) أ) بين أن $P(z)$ يقبل جذرا تخيلا صرفا يطلب تعيينه.

ب) عين العددين الحقيقيين a و b حيث $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب الى معلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$ متعامد ومتجانس. نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب:

$$Z_C = \bar{Z}_B \quad , \quad Z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad , \quad Z_A = i$$

(أ) بين أن النقط A, B, C تنتمي الى دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
(ب) بين أن $OABC$ معين.

(3) نضع $Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ لاحقة النقطة A_1 . لواحق النقط A_n حيث $Z_n = (Z_1)^n$ ولتكن النقطة A_0 صورة العدد المركب 1.

(أ) احسب Z_2 ثم مثل النقط A_0, A_1, A_2 في المعلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$, (الوحدة 2 cm)
(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n النقط A_n تنتمي الى الدائرة (C) .

$$\text{(ج) برهن أن : } Z_{n+1} - Z_n = (Z_1)^n \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(د) استنتج طولية $Z_{n+1} - Z_n$ ثم المسافة $A_n A_{n+1}$ ثم أثبت أن المثلثات $OA_n A_{n+1}$ متقايسة الأضلاع.

(4) نعتبر f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z + i\sqrt{3}$

(أ) عين طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميزة.

(ب) عين وانشئ صورة المثلث $OA_1 A_2$ بالتحويل f .

التمرين الرابع : (07 نقط)

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1 cm).

(1) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

(ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

(2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$

(ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

(ج) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).

(4) ارسم (d) , (T) و (C_f).

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

(6) (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

(ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$.