

تعيين معادلة للمستوى (P_2): لدينا (P_2) يشمل $A(4; -7; 5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(3; 1; 2)$ و $\vec{v}(3; 1; 2)$ توجيه (d') و

$\overline{AC}(0; 10; -2)$ حيث $C(4; 3; 3)$ نقطة من (d')

بنفس الطريقة $(P_2): 11x - 3y - 15z + 10 = 0$

(ب) التحقق أن (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\frac{0}{11} \neq \frac{1}{-3}$ فإن $\vec{n}(0; 1; 2)$ و $\vec{n}'(11; -3; -15)$ غير

مرتبطين خطيا و عليه يكون المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعين

$$\Delta: \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha \\ z = 11\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{لدينا:} \quad \Delta: \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha \\ z = 11\alpha \end{cases}$$

$$(P_2): 11x - 3y - 15z + 10 = 0, \quad (P_1): y + 2z - 3 = 0$$

$$0 \cdot \alpha = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (-22\alpha + 3) + 2(11\alpha) - 3 = 0$$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $(\Delta) \subset (P_1)$

$$0 \cdot \alpha = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 11\left(\frac{-1}{11} + 9\alpha\right) - 3(3 - 22\alpha) - 15(11\alpha) + 10 = 0$$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $(\Delta) \subset (P_2)$

$$\Delta = (P_1) \cap (P_2)$$

(3) أ* / إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على

المستوى (Q): $A'(x'; y'; z')$ ، $\vec{n}_Q(11; 1; -1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A \in (\Delta)$. بما أن: $11x_A + y_A - z_A \neq 2$ فإن $A \notin (Q)$

وبالتالي $\overline{AA'}$ يوازي $\vec{n}_Q$ يوجد $k \in \mathbb{R}$ حيث $\overline{AA'} = k \cdot \vec{n}_Q$

$$\overline{AA'}(x' - 4; y' + 7; z' - 5)$$

$$\begin{cases} x' - 4 = 11k \\ y' + 7 = k \\ z' - 5 = -k \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x' = 11k + 4 \\ y' = k - 7 \\ z' = -k + 5 \end{cases} \quad A' \in (Q) \quad \text{معناه}$$

$$k = -\frac{10}{41} \quad \text{معناه} \quad 11(11k + 4) + (k - 7) - (-k + 5) - 2 = 0$$

$$A' \left(\frac{54}{41}; -\frac{297}{41}; \frac{215}{41} \right) \quad \text{نجد:} \quad k$$

(ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوى (Q):

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هو المستقيم (BA')

(4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$

$$AB = \sqrt{\frac{17150}{121}} \approx 11.9, \quad [AB] \quad \text{هي سطح كرة قطرها } [AB]$$

$$\text{ومركزها النقطة } I \left(\frac{43}{22}; -2; \frac{5}{2} \right) \quad \text{منتصف } [AB]$$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2017 رياضي وتقني رياضي

الموضوع الأول: التمرين الأول: (04 نقاط)

1) كتابة التمثيل الوسيطى (d): t وسيط حقيقي

$$(d): \begin{cases} x - 2 = t \\ \frac{y - 1}{2} = t; t \in \mathbb{R} \\ 1 - z = t \end{cases} \quad \text{أي أن: } x - 2 = \frac{y - 1}{2} = 1 - z = t$$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{إذن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (d) هو } \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

***/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:**

$\vec{u}(1; 2; -1)$ شعاع توجيه (d) ، $\vec{u}'(3; 1; 2)$ شعاع توجيه (d')

بما أن $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{1}$ فإن الشعاعين $\vec{u}(1; 2; -1)$ و $\vec{u}'(3; 1; 2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي

لتكن $E(x; y; z)$ نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$$\begin{cases} x = t + 2 = 3t' + 4 \quad (1) \\ y = 2t + 1 = t' + 3 \quad (2) \\ z = -t + 1 = 2t' + 3 \quad (3) \end{cases} \quad \text{نبحث عن الثنائية } (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{بجمع (1) و (3): } t' = \frac{-4}{5} \quad \text{و بتعويضها في (1) أو (3)}$$

$$\text{نجد: } t = \frac{-2}{5}, \quad \text{الثنائية } \left(\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5} \right) \text{ لا تحقق (2)}$$

ومنه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوي

(2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p_1) و (p_2)

ويشملان $A(4; -7; 5)$ و (d) و (d')

تعيين معادلة المستوى (p_1): يشمل (p_1) $A(4; -7; 5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1; 2; -1)$ شعاع توجيه (d) و

$\overline{AD}(-2; 8; -4)$ حيث $D(2; 1; 1)$ نقطة من (d)

ليكن: $\vec{n}(a; b; c)$ شعاع ناظمي للمستوي (p_1) غير معدوم

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AD} = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} a + 2b - c = 0 \quad \dots (1) \\ -2a + 8b - 4c = 0 \quad \dots (2) \end{cases} \quad \text{بجمع (1) و (2)}$$

$$\text{نجد } 6b - 3c = 0 \quad \text{ومنه } c = 2b \quad \text{نأخذ: } b = 1 \quad \text{نجد } c = 2$$

و $a = 0$ ومنه: $\vec{n}(0; 1; 2)$ ناظمي لـ $(p_1): y + 2z + d = 0$

$$A \in (p_1) \quad \text{معناه} \quad 7 + 10 + d = 0 \quad \text{معناه} \quad d = -3$$

$$\text{ومنه: } (p_1): y + 2z - 3 = 0$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$ ، التشابه المباشر S

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$ ،

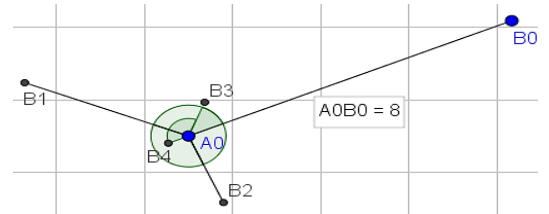
(1) إنشاء النقط B_1, B_2, B_3 و B_4 :

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0 = 4 \\ (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } B_1 = S(B_0)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_2 = \frac{1}{2}A_0B_1 = 2 \\ (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_2 = S(B_1)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_3 = \frac{1}{2}A_0B_2 = 1 \\ (\overline{A_0B_2}, \overline{A_0B_3}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_3 = S(B_2)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_4 = \frac{1}{2}A_0B_3 = \frac{1}{2} \\ (\overline{A_0B_3}, \overline{A_0B_4}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_4 = S(B_3)$$



(2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$B_{n+1} = S(B_n) \text{ معناه } A_0B_{n+1} = \frac{1}{2}A_0B_n$$

$$\text{و } (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، بما أن : } k \in \square$$

$$\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n} = \frac{1}{2}$$

$$(\overline{A_0B_{n+1}}, \overline{A_0B_{n+2}}) = \left(\frac{1}{2}\overline{A_0B_n}, \frac{1}{2}\overline{A_0B_{n+1}} \right) = (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}})$$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

$$\left(\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \right) \text{ ومنه : (ضلعان و زاوية محصورة بينهما)}$$

(3) إثبات أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) بـ $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{ومنه : } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } u_0 = B_0B_1$$

ب*/ كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n = B_0B_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n$

ج*/ نضع المجموع : $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ،

حساب δ_n بدلالة n ثم إيجاد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$: م.ح.م. هندسية

$$\delta_n = u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2B_0B_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 2B_0B_1 \text{ ومنه :}$$

(4) أ*/ نحل في $\square \times \square$ المعادلة : $3x - 4y = 2$ (1)

$$(1) \text{ يكافئ } 3x = 4y + 2 \text{ يكافئ } 3x \equiv 2[4]$$

$$\text{يكافئ } x \equiv 2[4] \text{ يكافئ } 7 \times 3x \equiv 7 \times 2[4]$$

ومنه : $x = 4\lambda + 2$ ، $\lambda \in \square$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$y = 3\lambda + 1 \text{ إذن : } S = \{ (4\lambda + 2; 3\lambda + 1); \lambda \in \square \}$$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون

النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$$(\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) + (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) + \dots$$

$$\dots + (\overline{A_0B_{n-1}}, \overline{A_0B_n}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3\pi}{4} = n \frac{3\pi}{4}$$

$$B_n \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ، } k \in \square$$

$$\text{نجد : } n \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } 3n = 4 \left(\frac{1}{2} + k \right)$$

$$\text{يكافئ } 3n = 2 + 4k \text{ يكافئ } 3n - 4k = 2$$

$$\text{ومن قيم } n \text{ هي } n = 4k' + 2 \text{ ، } k' \in \square$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) أ*/ نبين أن المعادلة (E) تكافئ : $(\bar{z} + 1) \left(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 \right) = 0$

$$\text{لدينا : } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ (E) ...}$$

$$(\bar{z} + 1) \left(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 \right) = 0 \text{ يكافئ } \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$$

$$\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ يكافئ}$$

ب*/ نحل في $\square$ المعادلة (E) :

$$(E) \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \text{ ، } \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

ومنه : $S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\}$

2) * / تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{6}}$$

ومنه $(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{6}}$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$$

$$n = 12k + 6; k \in \mathbb{Z}$$

ب) * / تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان $AB = AC = BC$: فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) * / كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسى:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}}$$

***/ استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره**

$$z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \text{ معناه } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي

مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \left(\overline{CD}; \overline{CA} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

$$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i \frac{1}{2} \text{ لاحقته}$$

4) * / تعيين قياس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$:

$$(\vec{u}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ لدينا:}$$

***/ استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث:**

$$z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{AM} = k \cdot \overline{AB} \text{ معناه}$$

ومنه: من أجل k يمسح المجال $[0; +\infty[$ المجموعة (Γ)

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overline{AB}$

$$2\sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3} \text{ لاحقته:}$$

5) * / تعيين قيمة العدد α حيث:

$$-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A + 2x_B + \alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A + 2y_B + \alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

ب) * / تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث:

$$(*) \dots \left\| -\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} - \overline{CM} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| \overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MD} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} + \overline{MC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| -(\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MD}) \right\| \leq 2 \left\| \overline{BC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| (-1+2-3)\overline{CM} \right\| \leq 2BC \text{ تكافئ } CM \leq BC$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو: $BC = 2\sqrt{3}$

ج) * / استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف

المستقيم (AB) : لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$$BC = 2\sqrt{3} \text{ و } AC = 2\sqrt{3} \text{ معناه } A \text{ تنتمي إلى القرص } (E)$$

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB)

هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$(1) \text{ معرفة } g \text{ على }]0; +\infty[\text{ بـ: } g(x) = x^2 e^x$$

أ) * / دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 + 2x)e^x :]0; +\infty[$$

بما ان $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب) * / استنتاج أنه: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\text{و إذا كان } x > 1 \text{ فإن } g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$$

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $\frac{1}{x} > x$ ولدينا g متزايدة تماما

$$\text{على }]0; +\infty[, \text{ فإن } g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$$

إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{x} < x$ ولدينا g متزايدة تماما على

$$]0; +\infty[, \text{ فإن } g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x^2 - 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لأن $\Delta = -4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$

ج/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي

فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

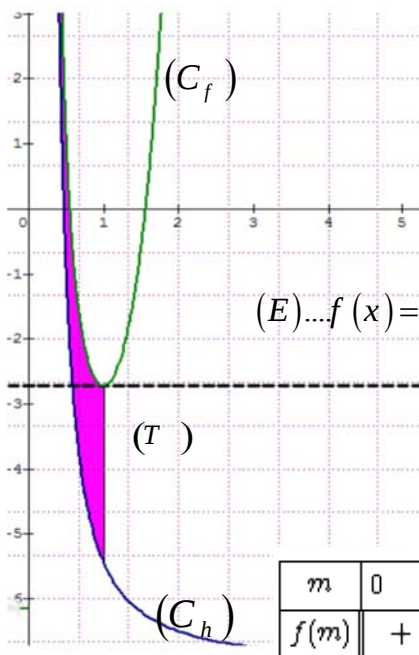
بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها (C_f)

يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0; +\infty[$ مماسا

$$f'(1) = 0; f(1) = -e, (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه : $(T): y = -e$

(4) / رسم (T) و (C_f) :



ب/ إيجاد قيم m حتى

تقبل المعادلة (E)

حليين متمايزين :

لدينا m وسيط حقيقي

حيث $m > 0$

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ

$$f(x) = f(m)$$

إشارة $f(m)$:

m	0	α	1	$E + \infty$
$f(m)$	+	0	-	-

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنه : المعادلة (E) تقبل حليين متمايزين لما

$$m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

(5) / نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

$$\text{لدينا : } \int_1^x [f(t) - h(t)] dt = \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt$$

الدالة : $t \rightarrow (t^2 - 2t + 2)e^t$ مستمرة على $]0; +\infty[$ فهي تقبل

دوالا أصلية على $]0; +\infty[$

$$[(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e]' = (t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x [(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e] dt$$

$$= (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

(2) f معرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right), \text{ ثم حساب } f'(1)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{ومنه : } f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	+

إشارة $f'(x)$:

f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$

f متناقصة تماما على $]0; 1[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-e = -2.71$	$+\infty$

(3) / نبين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل

حليين α و β حيث : $0.5 < \alpha < 0.6$ و $1.5 < \beta < 1.6$

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0 \text{ تكافئ } (x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا : $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5; 0.6]$

$$f(0.6) \times f(0.5) < 0 \text{ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α

$$\text{حيث : } f(\alpha) = 0, 0.5 < \alpha < 0.6$$

$$\text{لدينا : } f(1.5) \approx -0.60, f(1.6) \approx 0.44$$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5; 1.6]$

$$f(1.6) \times f(1.5) < 0 \text{ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد β

$$\text{حيث : } f(\beta) = 0, 1.5 < \beta < 1.6$$

***/** استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين :

بما ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حليين α و β فإن (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

ب/ استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h)

و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \lambda$ و $x = 1$
مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda \in]0; 1]$:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt = - \int_\lambda^1 [f(t) - h(t)] dt$$

$$A(\lambda) = - \left[(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e \right] \\ = (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u a$$

حساب $A(\lambda)$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda] = 3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$D(0; 0; m)$ و $C(3; 2; 1)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $A(3; 1; 0)$

1) حساب $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BA}(2; -1; 0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2; 0; 1)$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$$

استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos \angle ABC$ و

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cos \angle ABC \quad \text{لدينا} \quad \sin \angle ABC$$

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \angle ABC = 1 - \cos^2 \angle ABC$$

$$\sin \angle ABC = -\frac{3}{5} \quad \text{أو} \quad \sin \angle ABC = \frac{3}{5}$$

حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC} :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2} u a$$

ج/ نبين أن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 1(2) + 2(0) - 2(1) = 0 \quad \text{وكذلك}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 1(2) + 2(-1) - 2(0) = 0$$

فإن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$$(ABC): x + 2y - 2z + d = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$A \in (ABC) \quad \text{تكافئ} \quad 3 + 2 + d = 0 \quad \text{تكافئ} \quad d = -5$$

$$(ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$$

د/ تبين أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0 + 2(0) - 2m - 5 = 0$ أي $m = -\frac{5}{2}$ إذن: $D \notin (ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V = \frac{2m+5}{6} uv$

لدينا $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$ ، $h = d(D, (ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2m - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2m + 5}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2m + 5}{3} = \frac{2m + 5}{6} uv \quad \text{ومنه}$$

2) نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم

$$[AB] \quad \text{معادلته الديكارتية} \quad -2x + y = \frac{-5}{2} \quad \text{هناك عدة طرق منها}$$

إحداثيات $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيط لـ

(Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2; -1; 0)$ عمودي على شعاعي توجيهه

$$\vec{u}(1; 2; 0) \quad \text{و} \quad \vec{v}(-2; -4; -5) \quad \text{ومنه} \quad (Q) \text{ مستوي محوري لـ } [AB]$$

تعيين معادلة (Q) : لدينا

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \dots (1) \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \dots (2) \\ z = -5\alpha \dots (3) \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{من (1) نجد: } z = -5\alpha$$

$$x = 2 - 2\left(\frac{z}{-5}\right) + \beta \quad \text{نجد: (1) في (2) نجد:}$$

$$\beta = x - 2 - \frac{2z}{5} \quad \text{ومنه:}$$

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \quad \text{ومنه: } y = \frac{3}{2} - 4\left(\frac{z}{-5}\right) + 2\left(x - 2 - \frac{2z}{5}\right)$$

$$-4x + 2y + 5 = 0 \quad \text{هي (Q) معادلة}$$

بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيط يحقق

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \quad \text{(Q) ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم } [AB]$$

استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما

متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطى:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 0 \cdot (-2) = 0 \quad \text{فإن (Q)}$$

و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

تعيين التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 5 = 0 \dots (1) \\ -4x + 2y + 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{ب طرح (2) من (1) نجد:}$$

$$n \in \mathbb{N}^*, b = 11n + 4 \text{ و } a = 5n + 2$$

$$11a - 5b = 11(5n + 2) - 5(11n + 4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$$

ومنه : $d/2$ إذن : $d \in D_2 = \{1; 2\}$.

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون :

$$PGCD(a; b) = 2 \text{ لدينا } PGCD(a; b) = 2$$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$
أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$ الشكل :

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون

العددين a و b أوليان فيما بينهما : من السؤال السابق

$$n = 2\alpha \text{ / } \alpha \in \mathbb{N}^* \text{ قيم } PGCD(a; b) = 2$$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a; b) = 1$ هي : $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$

(3) أ* / نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$$n \in \mathbb{N}, B = 11n^2 + 15n + 4 \text{ و } A = 5n^2 + 7n + 2$$

$$B = (n+1)(11n+4) = b(n+1), A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين

A و B :

$$PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a; b) = 2$ معناه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)2 = 4\alpha + 2$$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ معناه $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1 + 1)1 = 2\alpha + 2$$

التمرين الثالث (05 نقاط)

(1) تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \dots (1) \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \dots (2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1') \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

الأولى في $(-i)$ نجد

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1') \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1')$ و (2) : $\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}(1 - i)$ ومنه $z_1 = 1 - i$

بالتعويض في (1) نجد : $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

(2) أ* / كتابة z_A على الشكل الأسّي : $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\text{ب* / نبين أن : } \frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه :}$$

$$5x - 2z - 10 = 0 \text{ نضع } z = t \text{ (وسيط حقيقي) نجد}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \text{ و } t \in \mathbb{R}$$

ج* / حساب $d(D; (Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين

$$D \text{ و } (\Delta) : d(D; (Q)) = \frac{|-4(0) + 2(0) + 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بمأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D; (\Delta))^2 = d(D; (Q))^2 + d(D; (ABC))^2$$

$$\text{ومنه : } d(D; (\Delta)) = \sqrt{\frac{5}{4} + \left(\frac{2m + 5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16m^2 + 80m + 145}}{6}$$

(3) أ* / تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي m - (S_m) سطح كرة

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها :

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$$

ومنه : $x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 9$ إذن : (S_m) سطح

كرة مركزها النقطة $D(0; 0; m)$ ونصف قطرها $r = 3$.

ب* / تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح

الكرة (S_m) : (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني

$$d(D; (ABC)) = 3 \text{ أي أن : } \frac{2m + 5}{3} = 3 \text{ ومنه : } m = 2$$

(4) معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC)

$$\text{و } (S_m) \text{ لدينا : } (P) : x + 2y - 2z + d = 0$$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني :

$$|-4 + d| = 9 \text{ أي } d(D; (P)) = \frac{|-4 + d|}{3} = 3$$

ومنه : $d = -5$ أو $d = 13$ هو المستوي (ABC)

$$\text{إذن : } (p) : x + 2y - 2z + 13 = 0$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) أ* / إثبات أن : $y \equiv 4[11]$ ، $11x - 5y = 2$... (E)

$$11x - 5y = 2 \text{ يكافئ } 5y = 11x + 2 \text{ ومنه } 5y \equiv -2[11] \text{ أي } 5y \equiv 9[11]$$

$$\text{أي } 5y \equiv 20[11] \text{ ومنه : } y \equiv 4[11]$$

ب* / استنتاج حلول المعادلة (E) :

$$y \equiv 4[11] \text{ معناه } y = 11k + 4 \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{ ، نعوض قيمة}$$

$$y \text{ في المعادلة (E) نجد : } x = 5k + 2$$

$$\text{ومنه : } S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) أ* / تعيين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$:

* استنتاج الشكل الأسى للعدد : z_B

$$z_B = z_A (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ومنه : } z_B = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}}$$

ج/ تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد

$$\left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n \text{ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :}$$

$$\left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = (1 + \sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{3}} : \text{ لدينا } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{أي : } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{n\pi}{3} [2\pi] : \text{ ومنه : } \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ، } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أي } 4n - 12k = 3 \text{ ، } PGCD(12; 4) = 4 \text{ لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد قيم لـ } n \text{ تحقق المطلوب .}$$

3) * إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران

$$r \text{ الذي مركزه النقطة } O \text{ وزاويته } -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{عبارة الدوران } r \text{ من الشكل : } z' = e^{-i \frac{\pi}{6}} z$$

$$z_{B'} = e^{-i \frac{\pi}{6}} z_B = e^{-i \frac{\pi}{6}} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}} = \overline{z_B} = 2 + \sqrt{3} - i$$

ب/ حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا

$$R = \frac{BB'}{2} = \frac{|z_{B'} - z_B|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = \frac{2}{2} = 1, S = \pi R^2$$

$$\text{ومنه : } s = \pi u.a$$

ج/ تعيين مجموعة النقط (z) من المستوى حيث:

$$\arg \left[(z - z_B)^2 \right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{تفسيرها : } (\vec{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ومنه مجموعة النقط هي المستقيم } (OB) \text{ ماعدا النقطة } B.$$

د/ تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \arg \left(\frac{z_A - z_{B'}}{z_B - z_{B'}} \right) = \arg(z_A - z_{B'}) - \arg(z_B - z_{B'})$$

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \arg(1 - i - 2 - \sqrt{3} + i) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ومنه نجد : } (\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{يكفي أن نبين : } \overline{B'B} = \overline{AC} \text{ معناه : } \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \text{ ومنه } z_C = 1 + i$$

$$\text{بطريقة أخرى : لدينا } z_{B'} = \overline{z_B} \text{ معناه } B \text{ و } B' \text{ متناظرتان}$$

بالنسبة لمحور الفواصل ولدنيا : $A(1; -1)$ و $B'(2 + \sqrt{3}; -1)$ أي : A و B' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم $y = -1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد : $z_C = \overline{z_A} = 1 + i$

* إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

$$z_I = \frac{1 - i + 4 + 2\sqrt{3} + 1 + i}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } z_I = \frac{z_A + z_B + z_{B'} + z_C}{4}$$

4) * أ/ تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

$$f = \text{تشابه مباشر مركزه } O \text{ ونسبته } 2 \text{ وزاويته } \frac{\pi}{3} : f = \text{ros}$$

$$S \text{ تشابه مباشر مركزه } O \text{ ونسبته } k \text{ وزاويته } \theta \text{ أي } \text{ros}$$

$$\text{تشابه مباشر مركزه } O \text{ ونسبته } k \text{ وزاويته } \theta - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ومنه : } k = 2 \text{ و } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ أي } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{ومنه عبارة التشابه } S \text{ هي : } z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z \text{ ونكتب } z' = 2iz$$

ب/ إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

$$\text{مساحة صورة الدائرة } (\gamma) \text{ هي } S' : s' = k^2 s = 4\pi u.a$$

5) * أ/ إذا كان $S(M) = M'$ ، إيجاد طبيعة المثلث OMM' :

$$z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z \text{ ومنه : } \frac{z'}{z} = 2e^{i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \arg \frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{معناه } \left(\overline{OM}; \overline{OM'} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } \left| \frac{z'}{z} \right| = 2 \text{ أي } |z'| = 2|z|$$

$$\text{معناه } \|\overline{OM'}\| = 2\|\overline{OM}\| \text{ ومنه : المثلث } OMM' \text{ قائم في } O$$

ب/ تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من

$$\text{أجلها : } \overline{AM}(x-1; y+1), \overline{AM}(z-z_A) : \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$$

$$\text{و } \overline{AM'}(z' - z_A) \text{ أي } \overline{AM'}(2iz - z_A) \text{ ومنه } \overline{AM'}(-2y-1; 2x+1)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0 \text{ معناه } (x-1)(-2y-1) + (y+1)(2x+1) = 0$$

$$\text{معناه } x + 3y + 2 = 0$$

$$\text{مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته } x + 3y + 2 = 0.$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

1) * أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

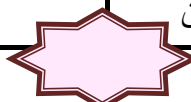
$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$\text{ب/ * حساب النهايات : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ج/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}}$$



حيث m وسيط حقيقي.

$$\text{معناه } y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{معناه } m \left(x - e - \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0$$

$$\frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ و } x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

ب/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط

تقاطع المستقيم (D_m) والمنحنى (C_f) :

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $y = \ln \sqrt{2}$ لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-1; 1[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

(5) / التفسير الهندسي العدد I : هو مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

$$\text{الذيهم معادلتيهما } x = \ln \sqrt{2} + e, \quad x = \ln \sqrt{3} + e$$

$$\text{حساب العدد } I_1 : I_1 = \int_0^1 \ln(1+X) dX \text{ بالمكاملة بالتجزئة}$$

$$\text{بوضع: } u(X) = \ln(1+X), \quad u'(X) = \frac{1}{1+X}$$

$$v(X) = X, \quad v'(X) = 1$$

$$I_1 = \left[X \ln(1+X) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{X+1-1}{X+1} dX$$

$$= \left[X \ln(1+X) \right]_0^1 - \int_0^1 1 dX + \int_0^1 \frac{1}{X+1} dX$$

$$= \left[X \ln(1+X) - X + \ln(1+X) \right]_0^1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{ب/ نبي أن } 0 \leq I_n \leq \ln 2 : \text{ لدينا } I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$$

$$0 \leq \ln(X^n + 1) \leq \ln 2 \text{ معناه } 1 \leq X^n + 1 \leq 2$$

$$\text{ومنه: } 0 \leq I_n \leq \ln 2 \text{ إذن } 0 \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX \leq \int_0^1 \ln 2 dX$$

ج/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases} \text{ بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

$$x = e + \ln \sqrt{2} \text{ معناه } 1 - 2e^{-2(x-e)} = 0 \text{ معناه } f'(x) = 0$$

x	$-\infty$	$e + \ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+

الدالة f متزايدة تماماً على $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماماً على $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\ln 2/2 + e$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+
$f(x)$	$+\infty$	$3\ln 2/2 + e$	$+\infty$

(2) / نبي أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y = -x + \ln 2 + e$ و $y = x - e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ **على الترتيب:** بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

$$\text{لدينا: } f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$\ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ معناه } 1 + 2e^{-2(x-e)} > 1$$

ومنه: $f(x) - (x - e) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

$$\text{لدينا: } f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$\ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ معناه } 2 + e^{2(x-e)} > 2$$

$$f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقع فوق م.م } (D')$$

من أجل كل عدد حقيقي x

$$\text{ج/ نبي أن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$$

هو محور تناظر للمنحنى (C_f) :

من أجل كل x من $\square$: $\square \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right)$ من $\square$ ، لدينا

$$f \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right) = f(\ln 2 + 2e - x)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

$$\text{ومنه: } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e : (\Delta) \text{ محور تناظر للمنحنى } (C_f)$$

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) :

(4) / نبي أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$$A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right) : (D_m) : y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

(6) باستعمال: $\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ*/ استنتاج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

لدينا: $1 + 2e^{-2(x-e)} > 0$ بوضع: $X = 1 + 2e^{-2(x-e)}$ نجد:
وبالتالي $0 \leq \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) \leq 2e^{-2(x-e)}$

$$0 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx$$

ومنه: $0 \leq -1 + \ln 4 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب*/ اعطاء حصر العدد: $I + I_1$

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx = - \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)} dx = - \left[e^{-2(x-e)} \right]_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

ومنه: $0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ لأي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \leq I_n \leq \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases} \text{ بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ لأي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \leq I_n \leq \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

(3) رسم: (Δ) , (D) , (D') و (C_f) .

