38

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غرداية

المقاطعة رقم: 01 — دورة ماي 2017

امتحان البكالوريا التجريبي — الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ للفضاء نعتبر النقاط: $A(0;0;2)$، $B(0;4;0)$ و $C(2;0;0)$

1) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ؛ ثمّ احسب بُعد النقطة O عن المستوي (ABC) .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و العمودي على (BC).

3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

4) ماذا يمثّل المستقيم (Δ) في المثلّث ABC .

5) بيّن أنّ الجملة: $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (d) المتوسط المار من B في المثلث ABC .

6) بيّن أنّ إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) هي $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

7) بيّن أنّ النّقطة H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).

8) احسب من جديد بُعد النّقطة O عن المستوي (ABC).

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 3\alpha+i\beta=2-5i \\ \overline{\alpha}+i\,\overline{\beta}=-2-i \end{cases}$ حيث $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A و B نقطتان لاحقتاهما: $z_A=-i$ و $z_B=-2-2i$

أ. أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب. أحسب العدد $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2016}$.

ج. عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{n}$ حقيقيا .

3) z عدد مركب صورته M حيث $z\neq-2-2i$ و z' عدد مركب حيث: $z'=\frac{z+i}{z+2+2i}$

أ. عبر هندسيا عن طويلة z' بدلالة AM و BM، ثم استنتج (E) مجموعة النقط M حتى يكون $|z'|=1$. أرسم المجموعة (E) .

ب. عبر هندسيا عن عمدة z' بدلالة $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ ، استنتج (F) مجموعة النقاط M حيث يكون z' تخيليا صرفا، أرسم المجموعة (F) .

ج. أحسب لاحقة كل من C و D نقطتي تقاطع (E) و (F) .

د. عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث: (5,5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بالدستور: $f(x)=x+2-2\ln|2x+1|$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. خذ $\|\vec{i}\|=1cm$

.I

1. احسب نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\frac{1}{2}$ واستنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f).
2. ادرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها.
3. أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.
4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 وأكتب معادلته.
5. أحسب $f(-1)$ وَ $f(0)$ ، أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m . عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

.II نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة: $F(x)=-2x+(2x+1)\ln(2x+1)$

1. بيّن أن الدالة F أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة: $h:x\mapsto 2\ln(2x+1)$.
2. احسب بالسنتمتر المربع المساحة A للحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=\frac{3}{2}$ وَ $x=0$.

.III نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي: $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-\ln(2x+1)^2$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ يكون لدينا : $-1-x\neq-\frac{1}{2}$ وَ $g(-1-x)=g(x)$
2. استنتج أن (Γ) المنحنى الممثل للدالة g يقبل محور تناظر يطلب تعيين معادلته.
3. أثبت أن $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تعيينه.
4. استنتج إنشاء (Γ) انطلاقا من (C_f) ، ارسم (Γ) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (5,5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ $u_1=\frac{3}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . $\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$
3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}$ وَ $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^n}$

اعتمادا على النتيجة التالية: من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$

4. عبّر بدلالة n عن كل من المجموعين S_n وَ T_n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.
5. أ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب) نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) وَ (w_n) متقاربتان حيث $w_n\leq v_n$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\lim\limits_n w_n\leq\lim\limits_n v_n$

." علما أن (u_n) متقاربة نحو العدد l ، بين أن : $\frac{5}{6}\leq\ln l\leq 1$ ، ثم استنتج حصرا للعدد l .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) برهن أن الدوران r ذو الزاوية α و المركز Ω ذو اللاحقة ω هو التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'-\omega = e^{i\alpha}(z-\omega)$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة البيانية $1cm$

نعتبر التحويل النقطي T في هذا المستوي والذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = iz + 4 + 4i$$

أ. عين اللاحقة ω للنقطة Ω حيث $T(\Omega) = \Omega$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $z'-4i = i(z-4i)$

ج. استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميّزة.

3) A و B نقطتان لاحقتاهما: $z_A = 4-2i$ و $z_B = -4+6i$

أ. عين لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي A و B على الترتيب بالتحويل T .

ب. علم النقط A' ، B' ، A ، B و Ω في المستوي المركب.

4) نسمي p ، m ، n و q لواحق النقط P ، M ، N و Q على الترتيب منتصفات للقطع المستقيمة: $[A'B]$ ، $[BB']$ $[AA']$ و $[B'A]$ على الترتيب.

أ. أحسب p ، m ، n و q ثم علم النقط P ، M ، N و Q في نفس المعلم السابق.

ب. برهن أن المستقيمين (AB') و (ΩN) متعامدان.

ج. بين أن: $\dfrac{q-m}{n-m} = i$ و $\dfrac{q-p}{m-n} = 1$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $MNPQ$.

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(-2;1;1)$ والشعاع $\vec{n}(2;1;-5)$ ناظم له، والمستوي (P') ذو المعادلة: $2x+y+z-10=0$

أ. برهن أن المستويين (P) و (P') متعامدان.

ب. برهن أن المستويين (P) و (P') متقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(3;1;3)$ و الموجّه بالشعاع $\vec{u}(-1;2;0)$

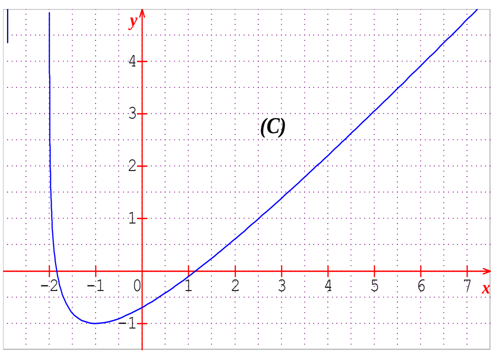
ج. احسب المسافة بين النقطة $A(3;1;2)$ والمستقيم (Δ) .

2. نعتبر من أجل كل عدد حقيقي t النقطة $M(3-t;1+2t;3)$ من الفضاء .

أ. عبر عن المسافة AM بدلالة t .

ب. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي t معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(t) = AM$

أدرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج من جديد المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .



التمرين الثالث: (4,5نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \ln(x+2)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الشكل المقابل...

1) أحسب $g(-1)$ ، وبقراءة بيانية ، حدد اتجاه تغير الدالة g .

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ وَ $u_{n+1} = g(u_n)$

3) أعد رسم المنحني (C) على ورقتك المليمترية وضع على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 وَ u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

4) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$

5) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

6) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

7) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: المعرّفة بـ $v_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$v_n = \ln(u_0+2)(u_1+2)...(u_{n-1}+2)$$

أ. أثبت أنه من أجل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$

ب. أستنتج: $\lim\limits_{n}(u_0+2)(u_1+2)...(u_{n-1}+2)$

التمرين الرابع: (06نقاط)

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$ نسمي (C_f) المنحنى الممثّل للدالة f وَ (Γ) المنحنى الذي معادلتة $y = \ln x$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أدرس ووضح النهايات للدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > 1$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها.

4. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x]$ ، قدم تفسيرا هندسيا للنتيجة.

5. وضح الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) وَ (Γ) .

II. نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة بالمبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$.

1. برهن أن المماس T_a للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر بمبدأ الإحداثيات إذا و فقط إذا كان $f(a) - af'(a) = 0$

لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $g(x) = f(x) - xf'(x)$

2. برهن أنه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x) = 0$ و $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ لهما نفس الحلول.

3. لتكن الدالة u ذات المتغير الحقيقي t والمعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$

أ. ادرس تغيرات الدالة u وأنشئ جدول تغيراتها.

ب. بين أن الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج. استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر بالمبدأ O .

د. أثبت أن الحل الوحيد α للمعادلة $u(x) = 0$ يحقق: $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$.

هـ. استنتج أن معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ O هي $y = \left(\dfrac{1+\alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}\right)$.

III. الإنشاء والدراسة البيانية

1. أنشئ هـ المماس (T_{e^α}) والمنحنيين (Γ) وَ (C_f) ، يعطى ما يلي: $\alpha \approx 1{,}8$ وَ $e^\alpha \approx 6{,}26$

2. نعتبر عدد حقيقي m ، من قراءة بيانية أدرس حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$ التي تنتمي إلى المجال $]1;10[$.