الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2016

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأول:(04 نقاط)

1- نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$.

أ) تحقّق أنّ $P\left(2\sqrt{3}\right)=0$.

ب) جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

جـ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$.

أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) بيّن أنّه يوجد دوران r مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .

جـ) استنتج طبيعة المثلث ABC .

د) عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثمّ حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3- عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث: $\arg\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

(العدد $\overline{z}$ هو مرافق العدد z).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1;-1)$ وليكن (Δ') المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x=\lambda\\ y=4+\lambda;(\lambda\in\mathbb{R})\\ z=2+\lambda\end{cases}$.

1 – أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2 – أ) بيّن أنّ النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ').

ب) تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ').

جـ) استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ').

3- لتكن N نقطة إحداثياتها $(-2+t;2+t;t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ ولتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AN^2$.

أ) بيّن أنّ النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') ، ثم اكتب عبارة $h(t)$ بدلالـة t .

ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن. ثمّ قارن بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة AB .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $\mathrm{I}=[0;4]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$.

1- أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

3- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$.

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.

ب) اكتب v_n بدلالة n.

ج) استنتج أنّ : $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.

(حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1- ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2- بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث : $-0{,}34<\alpha<-0{,}33$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}f(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$. (f' هي مشتقة الدالة f).

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

د) ارسم المنحنى (C_f). (نقبل أنّ: $f(\alpha)\simeq 3.16$)

2-أ) بيّن أنّ الدالة: $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.

3- نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدالة k زوجية.

ب) بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدالة k).

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $k(x)=m$.

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ونعتبر النقط $A(2;1;-3)$ ، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$

1- أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) بيّن أن المعادلة: $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (BC) .

3- أ) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

ب) بيّن أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC.

4- ليكن (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC.

أ) بيّن أنّ الجملة : $k\in\mathbb{R}$; $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}k \\ y=k \\ z=-2-4k \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ المستقيمين (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة G يطلب تعيين إحداثياتها.

جـ) بيّن أنّ المثلث ABC متساوي الساقين .

د) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

5- عيّن طبيعة وعناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$.

التمرين الثاني: (4.50 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2\overline{z}^3+3\overline{z}^2-3\overline{z}+5=0....(E)$.

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z.

1- أ) أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\overline{z}+5)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)=0$.

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ ، $z_c=-1$ ، $z_D=-\dfrac{5}{2}$

أ) اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) أنشئ النقط A ، B ، C و D.

جـ) أثبت أن : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3- ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ و نسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S.

أنشئ النقطة F ثمّ حدّد طبيعة المثلث AFC.

4- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z+1=kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

<u>التمرين الثالث</u>: (4,50 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

2- أ) عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n .

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

ب) تحقق أن: $\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2}$ وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n.

جـ) استنتج بدلالة n المجموع: $S_n' = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + ... + \frac{1}{u_n + 2}$

<u>التمرين الرابع</u>: (06 نقاط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

1- أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب) بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x) > 0$.

جـ) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38 < \alpha < -1,37$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II- لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

جـ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2-أ) بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x^2\right]$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا .

جـ) أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \simeq 0.29$)

انتهى الموضوع الثاني