تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

3AS U05 - Exercice 038

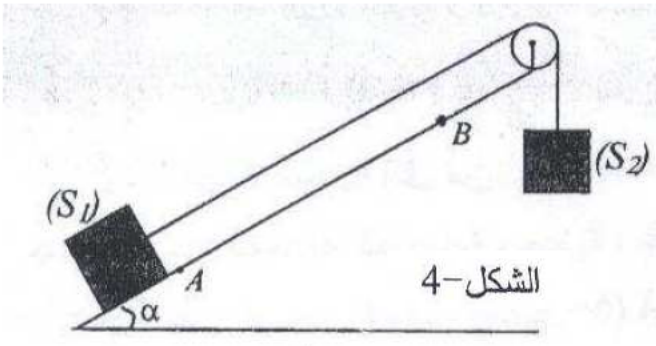
المحتوى المعرفي : تطور جملة ميكانيكية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2011 - رياضيات) (***)

يجر جسم صلب (S_2) كتلته $m_2 = 600\ g$ ، بواسطة خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة ، عربة (S_1) كتلتها $m_1 = 800\ g$ تتحرك على مستو يميل عل الأفق بزاوية $\alpha = 30°$. في وجود قوى احتكاك $\vec{f}$ شدتها ثابتة و لا تتعلق بسرعة العربة .

في اللحظة $t = 0\ s$ تنطلق العربة من النقطة A دون سرعة ابتدائية ، فتقطع مسافة $AB = x$ ، كما موضح في (الشكل-4) . نأخذ كمبدأ للفواصل النقطة A .



1- أعد رسم (الشكل-4) ، أحص و مثل عليه القوى الخارجية المؤثرة على كل من (S_1) و (S_2) .

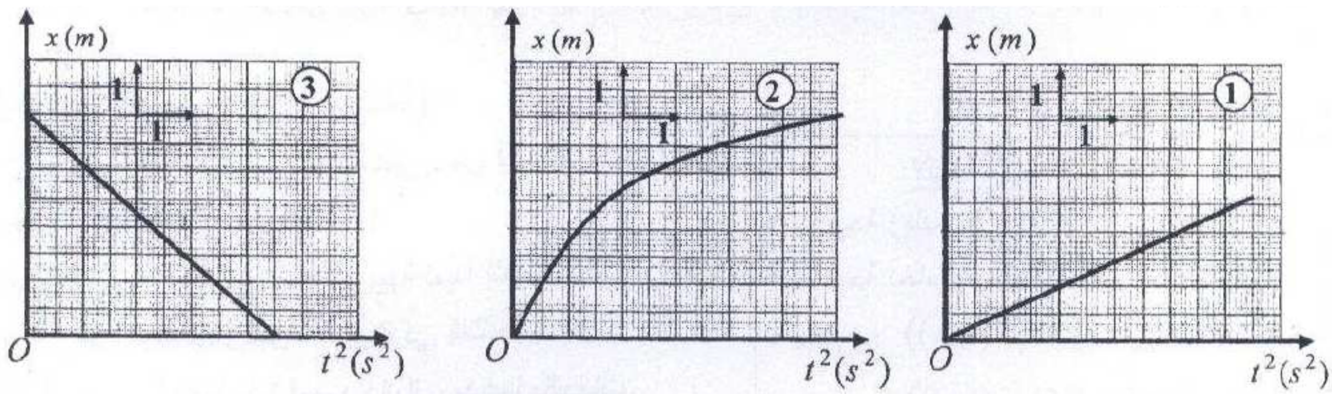
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على (S_1) و (S_2) .

أ- بين أن المعادلة التفاضلية للفاصلة x تعطى بالعلاقة : $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1\sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}$.

ب- استنتج طبيعة حركة الجسم (S_1) .

جـ- باستغلال الشروط الابتدائية أوجد حلا للمعادلة التفاضلية .

3- من أجل قيم مختلفة لـ x كررنا التجربة السابقة عدة مرات فتحصلنا على منحنى بياني يلخص طبيعة حركة الجسم (S_1) .

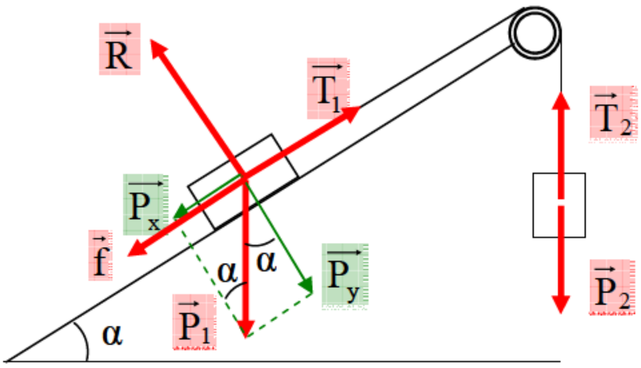


أ- من بين البيانات الثلاثة (1) ، (2) و (3) ما هو البيان الذي يتفق مع الدراسة النظرية السابقة ؟ علل .
ب- احسب من البيان قيمة التسارع a .
جـ- استنتج قيمة كل من قوة الإحتكاك f و توتر الخيط T . علما أن : $g = 9.80\ m.s^{-2}$.

حل التمرين

1- تمثيل القوى :

2- أ- المعادلة التفاضلية :



- الجملة جسم (S_1) :
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة التوتر $\vec{T}_1$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a}_G$$
$$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{f} = m_1 \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} -p_1 \sin\alpha - f + T_1 = m_1 a_x \text{ .... } (1) \\ -P_1 \cos\alpha + R = 0 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

الجملة جسم (S_2) :
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة التوتر $\vec{T}_2$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_2 \vec{a}_G$$
$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 + = m_2 \vec{a}$$

- بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (ox) :

$$P_2 - T_2 = m_2 a \text{ .... } (3)$$

بجمع العلاقتين (1) ، (2) مع الأخذ بعين الاعتبار $T_2 = T_1$ كون أن البكرة مهملة الكتلة :

$$-P_1 \sin\alpha - f + P_2 = (m_1 + m_2) a$$

$$- m_1 g \sin\alpha - f + m_2 g = (m_1 + m_2) \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2x}{dt^2} = (m_2 - m_1 \sin\alpha) g - f$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}$$

- طبيعة الحركة :

العبارة السابقة تمثل تسارع حركة كل من الجسمين S_1 ، S_2 و هي تتعلق بمقادير كلها ثابتة مما يدل على أن تسارع الحركة ثابت ، و كون أن مسار كل من الجسمين (S_1) ، (S_2) مستقيم فإن حركة كل منهما مستقيمة متغيرة بانتظام .

جـ- حل المعادلة التفاضلية :

- نكامل طرفي المعادلة السابقة :

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}\right) t + C_1$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

و منه يصبح :

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}\right) t$$

- نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}\right) t^2 + C_2$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

و منه يصبح :

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}\right) t^2$$

و هو حل المعادلة التفاضلية المطلوب .

3- أ- البيان الموافق للدراسة النظرية :

من الدراسة النظرية السابقة وجدنا المعادلة المعبرة عن تغيرات x بدلالة الزمن من الشكل : $x = k\,t^2$ حيث k هو ثابت التناسب ، نستنتج من ذلك أن الفاصلة x تتناسب طرديا مع مربع اللحظة الزمنية t و هذا ينطبق على البيان (1) .

ب- قيمة التسارع من البيان (1) :

وجدنا سابقا :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}$$

و من عبارة x الأخيرة :

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}\right) t^2 + C_2$$

يمكن كتابتها كما يلي (بتعويض عبارة التسارع بالتسارع a) :

$$x = \frac{1}{2} a\ t^2 + C_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

و من البيان (1) :

$$x = k\, t^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

بمطابقة العلاقتين (4) ، (5) :

$$\frac{1}{2} a = k \ \rightarrow\ a = 2k$$

من البيان (1) : (حساب الميل)

$$k = \frac{1 \times 1}{2 \times 1} = 0.5 \quad \rightarrow\ a = 2\,(0.5) = 1\ m/s^2$$

<u>جـ- قيمة قوة الاحتكاك :</u>

مما سبق :

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{f}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - a$$

بضرب الطرفين في $(m_1 + m_2)$ يصبح :

$$f = (m_1 - m_1 \sin\alpha)\, g - (m_1 + m_2)\, a$$

$$f\,(\,(0.6 - (0.8 \sin 30)\,)\, 9.8 - (0.8 + 0.6)\,(1) = 0.56\ N$$

<u>- قيمة التوتر T :</u>

<u>الطريقة (1) :</u>

لدينا مما سبق من العلاقة (1) :

$$- m_1\, g \sin\alpha - f + T = m_1\, a$$

$$T = m_1 a + m_1 g \sin\alpha + f$$

$$T = (0.8\ .\ 1) + (\,0.8\ .\ 9.8\ .\ \sin 30) + 0.56 = 5.28\ N$$

<u>الطريقة (2) :</u>

لدينا مما سبق من العلاقة (3) :

$$m_2\, g - T_2 = m_2\, a$$

$$T_2 = m_2\, g - m_2\, a$$

$$T_2 = m_2\,(\,g - a\,)$$

$$T_2 = 0.6\,(\,9.8 - 1\,) = 5.28\ N$$