www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

3AS U05 - Exercice 035

المحتوى المعرفي : تطور جملة ميكانيكية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

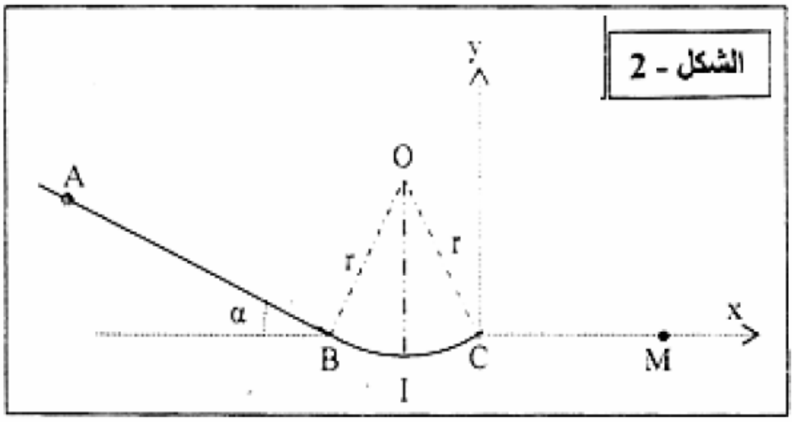
نص التمرين : (بكالوريا 2008 – رياضيات) (***)

ملاحظة : نهمل تأثير الهواء و كل الاحتكاكات .

يترك جسم نقطي (S) ، دون سرعة ابتدائية من النقطة A لينزلق وفق خط الميل الأعظم AB لمستو مائل يصنع مع الأفق زاوية $\alpha = 30°$. المسافة $(AB = L)$.

يتصل AB مماسيا في النقطة B بمسلك دائري (BC) مركزه (O) و نصف قطره (r) بحيث تكون النقاط A ، B ، C ، O ضمن نفس المستوي الشاقولي و النقطتان B ، C على نفس المستوي الأفقي (الشكل-2) .

يعطى : كتلة الجسم (S) $m = 0.2 \text{ kg}$ ، $g = 10 \text{ m/s}^2$ ، $L = 5 \text{ m}$ ، $r = 2 \text{ m}$.



1- أوجد عبارة سرعة الجسم (S) عند مروره بالنقطة B بدلالة L ، g ، α ثم أحسب قيمتها .

2- حدد خصائص شعاع السرعة للجسم (S) في النقطة C .

3- أ) أوجد بدلالة m ، g ، α عبارة شدة القوة التي تطبقها الطريق على الجسم (S) خلال انزلاقه على المستوي المائل . أحسب قيمتها .

ب) لتكن I أخفض نقطة من المسار الدائري (BC) . يمر الجسم (S) بالنقطة I بالسرعة $v_1 = 7.37 \text{ m/s}$. أحسب شدة القوة التي تطبقها الطريق على الجسم (S) عند النقطة I .

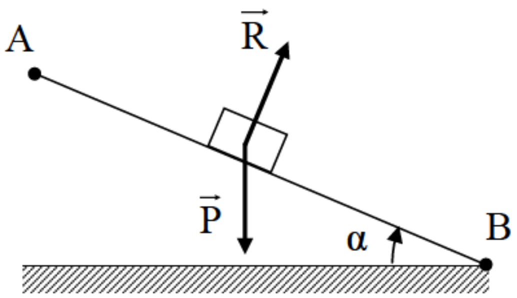
4- عند وصول الجسم (S) إلى النقطة C يغادر المسار (BC) ليقفز في الهواء .

أ) أوجد في المعلم $(\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{Cy})$ المعادلة الديكارتية $y = f(x)$ لمسار الجسم (S) . نأخذ مبدأ الأزمنة $(t = 0)$ لحظة مغادرة الجسم النقطة C .

ب) يسقط الجسم (S) على المستوي الأفقي المار بالنقطتين B ، C في النقطة M . أحسب المسافة CM .

حل التمرين

1- عبارة سرعة (S) عند مروره بالنقطة B بدلالة L ، g ، α :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوة الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A\text{-}B}(\vec{P}) + W_{A\text{-}B}(\vec{R}) = E_{CB}$$

- $E_{CA} = 0$
- $W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m\,g\,h = m\,g\,AB\sin\alpha$
- $W_{A\text{-}B}(\vec{R}) = 0 \quad (\vec{R} \perp \overrightarrow{AB})$
- $E_{CB} = \frac{1}{2} m\, v_B^{\,2}$

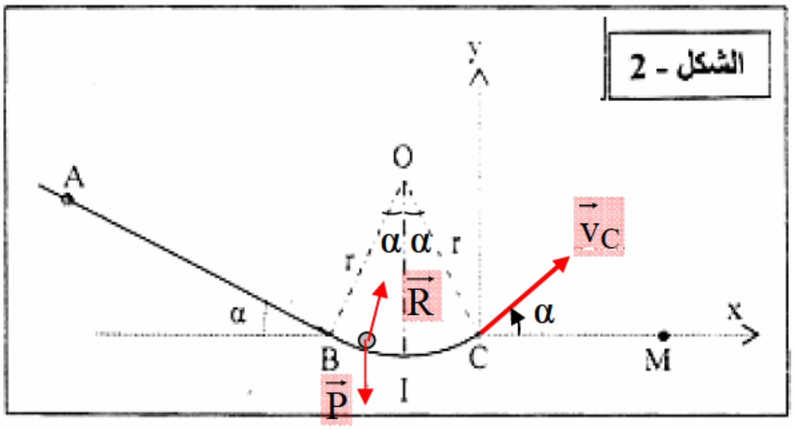
يصبح لدينا :

$$m\,g\,AB\sin\alpha = \frac{1}{2} m\, v_B^{\,2}$$

$$g\,AB\sin\alpha = \frac{1}{2} v_B^{\,2} \rightarrow v_B = \sqrt{2\,g\,AB\sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{2\,.10\,.\,5\,.\,0.5} = 7.07\ m/s$$

2- خصائص شعاع السرعة عند C :



- الجهة : نحو الأعلى .
- الحامل : يعمل الزاوية α مع المحور (ox) حيث α هي زاوية المستوي المائل .
- الشدة :

بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين B و C :

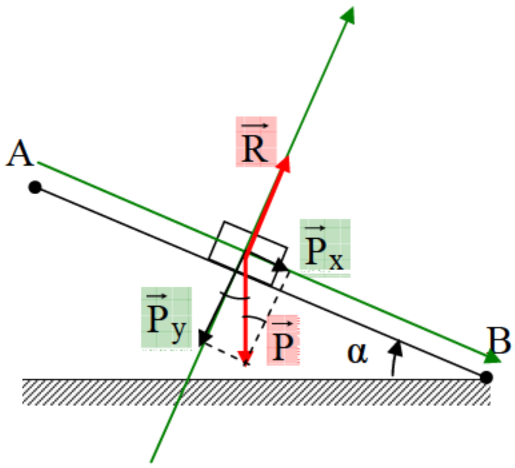
$$E_B + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_C$$

$$E_{CB} + W_{B\text{-}C}(\vec{P}) + W_{B\text{-}C}(\vec{R}) = E_{CC}$$

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv_C{}^2 \rightarrow v_C = v_B = 7.07\ m/s$$

3-أ- عبارة القوة التي تطبقها الطريق على الجسم (S) :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوة الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجملة (S) .



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oy) :

$$P_y + R_y = m\,a_y$$

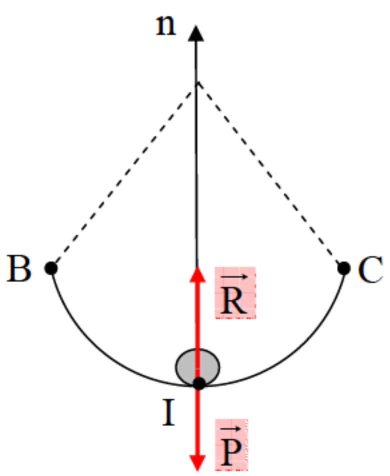
في الحركات المستقيمة يكون شعاع التسارع موازي للمسار و كون أن المحور ox يوازي مسار الحركة يكون شعاع التسارع موازي للمحور ox و بالتالي عمودي على المحور oy . لذا يكون $a_y = 0$ و يصبح :

$$P_y + R_y = 0$$
$$-P\cos\alpha + R = 0$$
$$-m\,g\cos\alpha + R = 0 \rightarrow R = m\,g\cos\alpha$$
$$R = 0.2 \,.\, 10 \,.\, 0.86 = 1.72\ N$$

ب- شدة القوة التي تطبقها الطريق على الجسم (S) في (I) :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (S) في الموضع (I) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G$$



بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور الناظمي (on) و المتجه نحو مركز المسار (الناظمي) يكون :

$$-P + R = m\,a_n$$

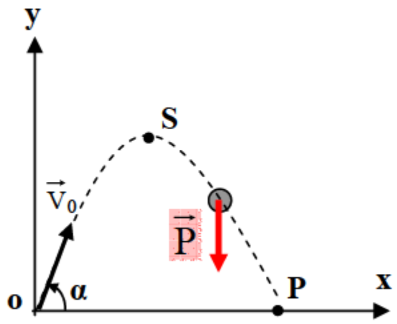
حيث a_n هو التسارع الناظمي المعرف بالعلاقة $a_n = \frac{v^2}{R}$ و منه يصبح :

$$-m\,g + R = m\frac{v^2}{R}$$
$$R = m\frac{v^2}{R} + m\,g \rightarrow R = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)$$
$$R = 0.2\left(\frac{(7.37)^2}{2} + 10\right) = 7.43\ N$$

4- أ- معادلة المسار :

- الجملة المدروسة : كرة.
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$



بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha = -g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + C_1' \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos\alpha\,(0) + C_1' \rightarrow C_1' = 0 \\ 0 = -\dfrac{1}{2} g\,(0)^2 + v_0 \sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C_2' = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

<u>ب- المسافة CM :</u>

المسافة CM تمثل فاصلة M على المحور ox أي :

$$CM = x_M$$

لدينا : $y_M = 0$ بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2} x_M^2 + \tan\alpha \, x_M$$

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2} x_M^2 = \tan\alpha \, x_M$$

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2} x_M = \tan\alpha$$

$$x_M = \frac{2\, v_0^2 \cos\alpha^2 \,.\tan\alpha}{g} \quad \rightarrow x_M = \frac{2\,(7.07)^2\,.\,(0.86)^2\,.\,0.58}{10} \approx 4.3\,\text{m} = CM$$