تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

3AS U05 - Exercice 016

المحتوى المعرفي : تطور جملة ميكانيكية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2012 - رياضيات) (**)

في فبراير 2012 ، هبت عاصفة ثلجية على شمال شرق الجزائر ، فاستعملت الطائرات المروحية للجيش الوطني الشعبي لإيصال المساعدات للمتضررين خاصة في المناطق الجبلية منها .

أولا :

تطير المروحية على ارتفاع ثابت h من سطح الأرض بسرعة أفقية ثابتة قيمتها $v_0 = 50\ m.s^{-1}$.

يُترك صندوق مواد غذائية مركز عطالته G يسقط في اللحظة $t = 0$ انطلاقا من النقطة O مبدأ الإحداثيات و بالسرعة الابتدائية الأفقية $\vec{v}_0$ ليرتطم بسطح الأرض في النقطة M (الشكل-6) .

ندرس حركة G في المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المرتبط بسطح الأرض الذي نعتبره غاليليا ، نهمل أبعاد الصندوق و تؤثر عليه قوة وحيدة هي قوة ثقله .

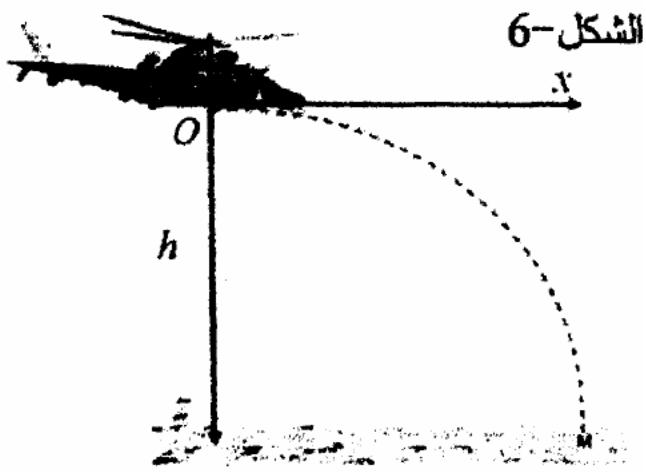
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جد :

أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $z(t)$.

ب- معادلة المسار $z(x)$.

جـ- إحداثيتي نقطة السقوط M .

د- الزمن اللازم لوصول الصندوق إلى الأرض .



الشكل-6

ثانيا :

لكي لا تتلف المواد الغذائية عند الارتطام بسطح الأرض ، تم ربط الصندوق بمظلة تمكنه من النزول شاقوليا ببطء . تبقى المروحية على نفس الارتفاع h السابق في النقطة O ، ليترك الصندوق يسقط شاقوليا دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ (الشكل-7) . يخضع الصندوق لقوة احتكاك الهواء نعبر عنها بالعلاقة $\vec{f} = -100 \times \vec{v}$.

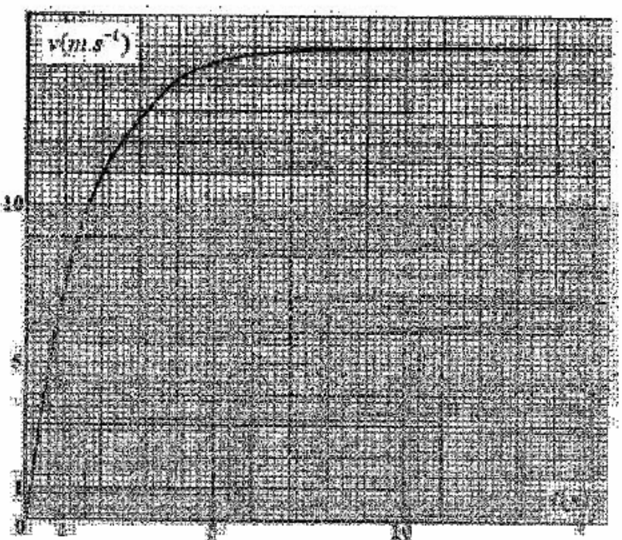
حيث : $\vec{v}$ يمثل شعاع سرعة الصندوق في اللحظة t مع إهمال دافعة أرخميدس خلال السقوط .

1- جد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الصندوق .

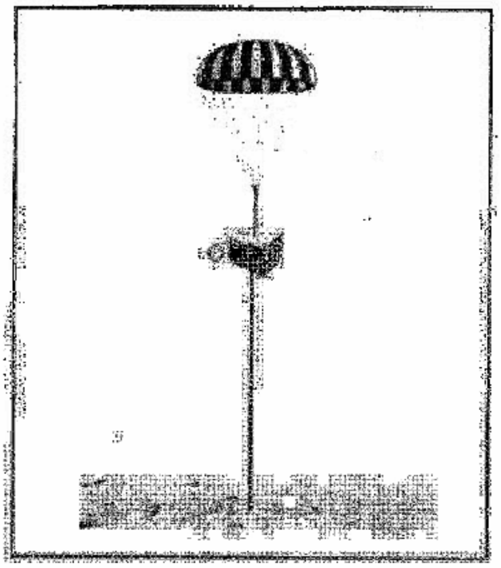
2- يمثل (الشكل-8) تطور v سرعة مركز عطالة الصندوق بدلالة الزمن t .

أ- جد السرعة الحدية v_ℓ .

ب- حدد قيمتي السرعة و التسارع في اللحظتين : $t = 0\ s$ و $t = 10\ s$.



الشكل-8

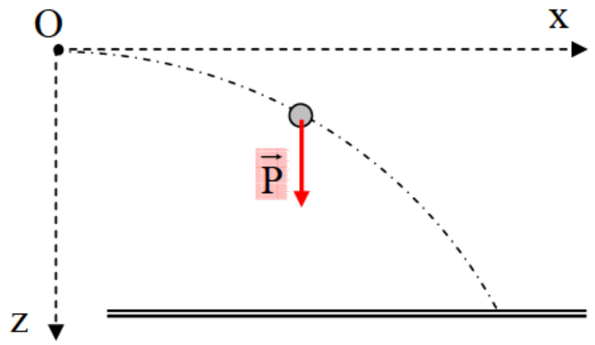


الشكل-7

يعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$ ، $h = 405\ m$ ، كتلة الصندوق و المظلة $m = 150\ kg$.

حل التمرين

1- أ- المعادلتين الزمنيتين x(t) ، y(t) :



- الجملة المدروسة : صندوق .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_z = m\,a_z \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ P = m\,a_z \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ m\,g = m\,a_z \end{cases}$$
$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \\ 0 = g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = g\,t \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0\,t + C_1' \\ z = \dfrac{1}{2}g\,t^2 + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0\,(0) + C_1' \rightarrow C'_1 = 0 \\ 0 = \dfrac{1}{2}g\,(0)^2 + C_2' \rightarrow C'_2 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0\,t \\ z = \dfrac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

ب- معادلة المسار :

من المعادلة $x = f(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

بالتعويض في $z(t)$:

$$z = \frac{1}{2}g\,(\frac{x}{v_0})^2$$

$$z = \frac{g}{2{v_0}^2}x^2$$

جـ- إحداثيي نقطة السقوط M :

لدينا :

$$x = x_M \rightarrow z = h = 405$$

بالتعويض في معادلة المسار :

$$h = \frac{g}{2\,v_0^2}\,x_M^2 \quad \rightarrow x_M = \sqrt{\frac{2\,h\,v_0^2}{g}}$$

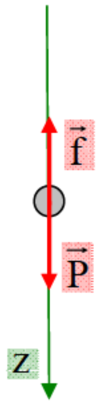
$$x_M = \sqrt{\frac{2.405.(50)^2}{9.8}} = 454\,m$$

إذن احداثيي النقطة M هي : $(x_M = 454\ m\ ,\ z_M = 405\ m)$.

<u>ثانيا :</u>

<u>1- المعادلة التفاضلية :</u>

- الجملة المدروسة : صندوق .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oz) يكون :

$$P - f = m\,a_G$$

$$m\,g - 100\,v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{100}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{100}{150}v \qquad \rightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = g - \frac{2}{3}v$$

<u>2- أ- السرعة الحدية :</u>

من البيان مباشرة و عند النظام الدائم يكون :

$$v_\ell = 15\ m/s$$

<u>ب- قيمتي v و a عند اللحظتين $t = 0$ ، $t = 10\ s$:</u>

- من البيان مباشرة :

- $t = 0 \ \rightarrow \ v = 0$
- $t = 10\ s \rightarrow v = 15\ m/s$

- يمثل a في كل لحظة ميل مماس المنحنى البياني عند هذه اللحظة ، و إذا اعتبرنا $\tan\alpha$ هو ميل المماس عند هذه اللحظة يكون :

$$a = \tan\alpha$$

- بعد رسم المماس و حساب ميله عند اللحظتين نجد :

- $t = 0 \ \rightarrow \ \tan\alpha = 9.85 \rightarrow \ a = 9.8$
- $t = 0 \ \rightarrow \ \tan\alpha = 0 \ \rightarrow \ a = 0$