www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

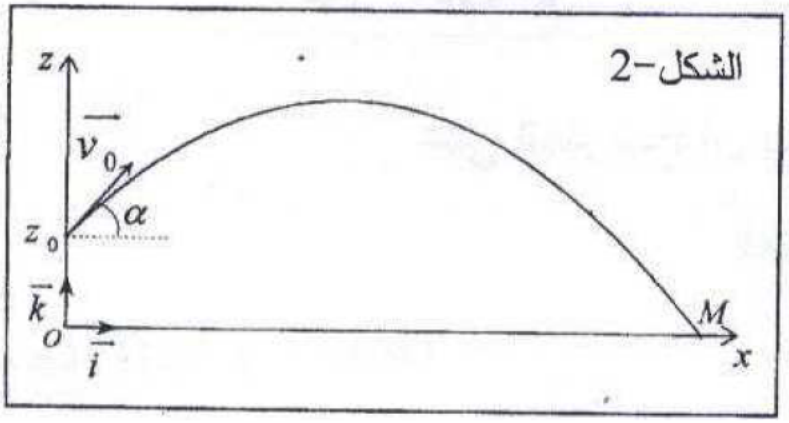
3AS U05 - Exercice 013

المحتوى المعرفي : تطور حملة ميكانيكية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2011 - رياضيات) (**)

في لعبة رمي الجلة ، يقذف اللاعب في اللحظة $t = 0\ s$ الجلة من ارتفاع $oz_0 = h = 2.0\ m$ ، عن سطح الأرض ، بسرعة ابتدائية $v_0 = 13.7\ m.s^{-1}$ ، شعاعها يصنع زاوية $\alpha = (\overrightarrow{ox}, \vec{v}_0) = 35°$.
نهمل تأثير الهواء (مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس) ، و نأخذ $g = 9.80\ m.s^{-1}$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المعلم المبين على (الشكل-2) ، استخرج :
أ- المعادلة التفاضلية للحركة .
ب- المعادلات الزمنية للحركة .
2- اكتب معادلة المسار $z = f(x)$.
3- اوجد إحداثيات M نقطة سقوط القذيفة . و ما هي سرعتها عندئذ ؟

حل التمرين

1- المعادلات التفاضلية للحركة :

1- الجملة المدروسة : جلة .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oz) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_z \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases}$$

ب- المعادلات الزمنية :

لدينا

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

- نكامل طرفين عبارة التسارع بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_z = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0\cos\alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha = -g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_z = -g\,t + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

نكامل طرفي عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :.Erreur ! Liaison incorrecte

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\,t + C_1' \\ z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\sin\alpha\,t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = 0 \\ z = h_0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0\cos\alpha\,(0) + C_1' \rightarrow C_1' = 0 \\ h_0 = -\frac{1}{2}g\,(0)^2 + v_0\sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C_2' = h_0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\,t \\ z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\sin\alpha\,t + h_0 \end{cases}$$

2- معادلة المسار :

من المعادلة $x = f(t)$: $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ بالتعويض في $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right) + h_0$$

$$z = -\frac{g}{2{v_0}^2\cos\alpha^2}x^2 + \tan\alpha\,x + h_0$$

3- إحداثيات M موضع سقوط القذيفة :

عند M لدينا $z_M = 0$ بالتعويض في معادلة المسار :

$$0 = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x_M^2 + \tan\alpha \, x_M + z_0$$

$$\frac{-10}{2 (13.7)^2 \cos^2 35} x_M^2 + \tan 35 \, x_M + 2 = 0$$

$$-0.04 \, x_M^2 + 0.70 \, x_M + 2 = 0$$

$$\Delta = (0.70)^2 - 4(-0.04)(2) = 0.81 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 0.9$$

$$x_{M1} = \frac{-0.70 + 0.9}{2 (-0.04)} = -2.5 \text{ m} \quad \text{(موفوض)} \quad ; \quad x_{M2} = \frac{-0.70 - 0.9}{2 (-0.04)} = 20 \text{ m} \quad \text{(مقبول)}$$

إذن احداثيي M موضوع سقوط الجلة هي : ($x_M = 20$ m , $z_M = 0$) .

<u>- سرعة الجلة عند M :</u>

لدينا $x_M = 20$ m بالتعويض في x(t) :

$$20 = 13.7 \cos 35 \, t_M \quad \rightarrow \quad t_M = 1.78 \text{ s}$$

بالتعويض في $\vec{v}(t)$:

$$\begin{cases} v_x = 13.7 \cos 35 \\ v_z = -10 (1.78) + 13.7 \, . \sin 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = 11.22 \text{ m/s} \\ v_z = -9.94 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$v_M = \sqrt{(11.22)^2 + (-9.94)^2} \approx 15 \text{ m/s}$$