www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

3AS U05 - Exercice 004

المحتوى المعرفي : تطور حملة ميكانيكية .

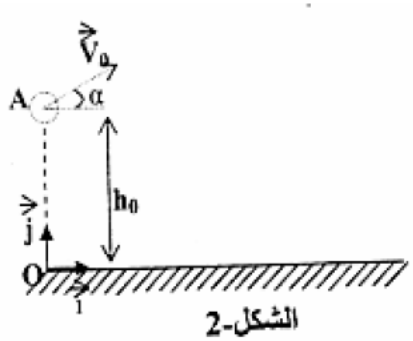
تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2008 – علوم تجريبية) (**)

في مقابلة لكرة القدم ، خرجت الكرة إلى التماس ، و لإعادتها إلى الميدان ، يقوم أحد اللاعبين برميها من خط التماس بكلتا يديه لتمريرها فوق رأسه .

لدراسة حركة الكرة ، نهمل تأثير الهواء و ننمذج الكرة بنقطة مادية .

في اللحظة ($t = 0$) تغادر الكرة يدي اللاعب في النقطة A تقع على ارتفاع $h_0 = 2\ m$ من سطح الأرض بسرعة $(\vec{v_0})$ يصنع حاملها مع الأفق و إلى الأعلى زاوية $\alpha = 25°$ (الشكل-2) . تمر الكرة فوق رأس الخصم ، الذي طول قامته $h = 1.80\ m$ و الواقف على بعد $12\ m$ من اللاعب الذي يرمي الكرة .

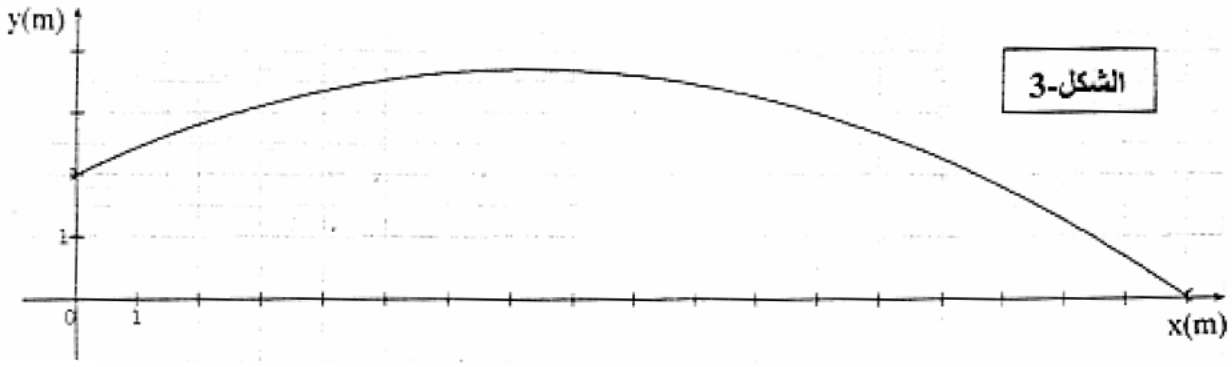


الشكل-2

1- بين أن معادلة مسار الكرة في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$y = (-\frac{g}{2\,v_0^2\,\cos\alpha^2})\,x^2 + x\tan\alpha + y_0$$

2- يمثل البيان (الشكل-3) مسار الكرة في المعلم المذكور $(O,\vec{i},\vec{j})$.



الشكل-3

باستغلال المنحنى البياني أجب عما يلي :

أ) على أي ارتفاع (h_2) من رأس الخصم تمر الكرة ؟

ب) ما قيمة السرعة الابتدائية (v_0) التي أعطيت للكرة لحظة مغادرتها يدي اللاعب ؟

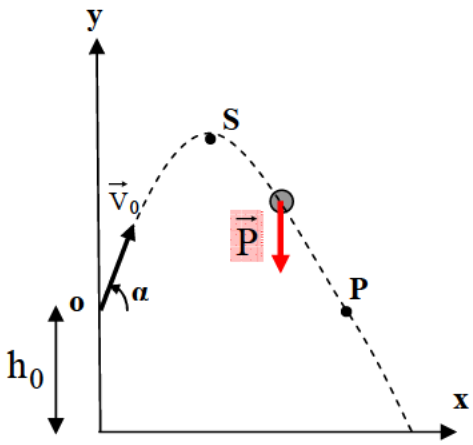
جـ) حدد الموضع M للكرة في اللحظة $(t = 1.17\ s)$. وما قيمة سرعتها عندئذ ؟

د) أحسب الزمن الذي تستغرقه الكرة من لحظة انطلاقها إلى غاية ارتطامها (اصطدامها) بالأرض .

المعطيات : $g = 10\ m/s^2$ ، $\sin\alpha = 0.4226$ ، $\cos\alpha = 0.9063$ ، $\tan\alpha = 0.4663$.

حل التمرين

1- معادلة المسار :



- الجملة المدروسة : كرة (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha = -g(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

نكامل طرفي عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \, t + C_1' \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = 0 \\ y = h_0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos\alpha (0) + C_1' \rightarrow C'_1 = 0 \\ h_0 = -\frac{1}{2} g (0)^2 + v_0 \sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C'_2 = h_0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \, t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t + h_0 \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$: $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) + h_0$$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha \, x + h_0$$

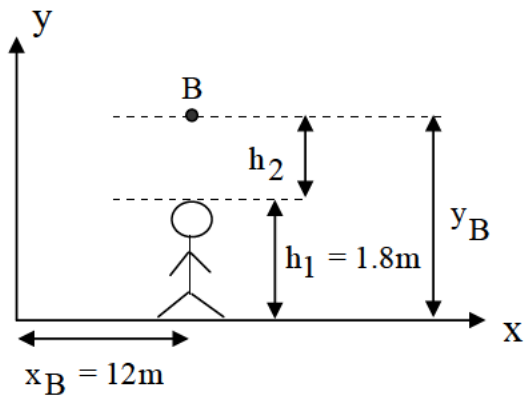
و هي معادلة قطع مكافئ . إذن مسار الكرة عبارة عن قطع مكافئ .

2- أ- ارتفاع الكرة عن رأس الخصم :

نعتبر B موضع الكرة عندما تكون فوق رأس الخضم .

- إذا كان y_B هي فاصلة B على المحور oy و كان h_1 طول الخصم و h_2 هو ارتفاع الكرة عن رأس الخصم يكون :

$y_B = h_1 + h_2 \rightarrow h_2 = y_B - h_1$



من الشكل :

$$x_B = 12\ m \ \rightarrow \ y_B = 3m$$

بالتعويض :

$h_2 = 3 - 1.8 = 1.2\ m$

ب- سرعة الكرة الابتدائية v_0 :

من الشكل :

$x = 18\ m \ \rightarrow \ y = 0$

بالتعويض في معادلة المسار :

$$0 = \frac{-10}{2v_0^{\,2}(0.9063)^2}(18)^2 + 0.4663\,(18) + 2$$

$$0 = \frac{-10}{2v_0^{\,2}(0.9063)^2}(18)^2 + 10.4$$

$$\frac{10\,(18)^2}{2v_0^{\,2}\,(0.9063)^2} = 10.4 \ \rightarrow \ v_0 = \sqrt{\frac{10\,(18)^2}{2\times\ 10.4\ \times(0.9063)^2}} \approx 13.8\ m/s$$

جـ- تحديد الموضع M في اللحظة $t = 1.17\ s$:

بالتعويض في $x(t)$ ، $y(t)$ نجد :

$$\begin{cases} x = 13.8\,.\,0.9063\,.\,1.17 = 14.6\ m \\ y = -\frac{1}{2}.10\,.\,(1.17)^2 + (13.8\ .\ 0.4226.1.17) + 2 = 2\ m \end{cases}$$

إذن موضع M في اللحظة $t = 1.17$ معرف بالإحداثيتين : $(x = 14.6\ m\ ,\ y = 2\ m)$.

سرعة الكرة عند M :

بتعويض $t = 1.17\ s$ في عبارة $\vec{v}$ يكون :

$$\vec{v}_M \begin{cases} v_{xM} = 13.8\ .0.9063 = 12.5\ m/s \\ v_{yM} = -10\,(1.17) + (13.8\,.\,0.4226) = -5.9\ m/s \end{cases}$$

$$v_M = \left\|\vec{v}_M\right\| = \sqrt{(12.5)^2 + (-5.9)^2} = 13.8\ m/s$$

د- الزمن الذي تستغرقه الكرة من لحظة انطلاقها إلى غاية ارتطامها بالأرض :

بفرض أن P هو موضع ارتطام الكرة بالأرض ، يكون من (الشكل-3) ($x_P = 18\ m$) و بالتعويض في $x(t)$:

$$x_P = v_0 \cos\alpha\ t_P$$

$$18 = 13.8 \,.\, 0.9063 \,.\, t_P \ \rightarrow\ t_P = \frac{18}{13.8 \,.\, 0.9063} = 1.44\ s$$