تمارين مقترحة

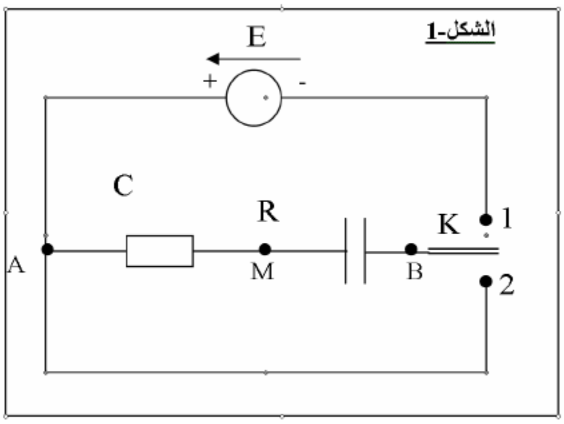
www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

3AS U03 - Exercice 025

المحتوى المعرفي : دراسة ظواهر كهربائية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (**)



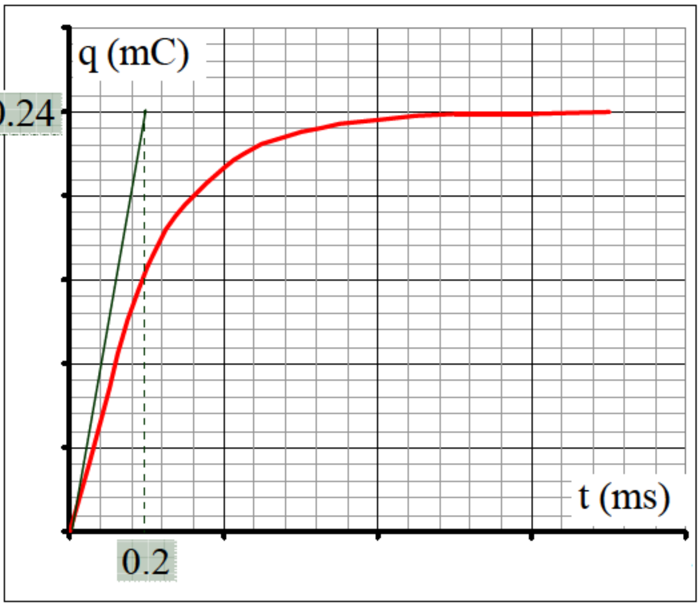
لدراسة تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة نحقق الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و المتكونة على التسلسل من : مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12\ V$ ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R .

1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن .

أ- أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q(t)$.

ب- حل هذه المعادلة التفاضلية هو $q = A + B e^{-\alpha t}$ ، حيث A و B ، α ثوابت يطلب إيجاد عبارتهم .

جـ- المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات شحنة المكثفة q بدلالة الزمن .



اعتمادا على هذا البيان أوجد سعة المكثفة C .

2- نضع البادلة في الوضع (2) :

أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q = f(t)$.

ب- أثبت أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $q = Q_0 e^{-t/\tau}$ حيث Q_0 هي شحنة المكثفة الأعظمية .

جـ- عبر عن طاقة المكثفة $E_{(C)}$ بدلالة الزمن t ، ثابت الزمن τ ، سعة المكثفة C ، شحنة المكثفة الأعظمية Q_0 ، ثم أحسب قيمتها عند بداية التفريغ .

حل التمرين

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

- حسب قانون جمع التوترات

$$U_{AB} = U_{AM} + U_{MB}$$

$$E = Ri + \frac{q}{C}$$

$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}\cdot q = \frac{E}{R}}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى

ب- الثوابت A, B, α :

- $q = A + B\,e^{-\alpha t}$
- $\frac{dq}{dt} = -B\alpha\, e^{-\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ،

$$-B\alpha\, e^{-\alpha t} + \frac{1}{RC}(A + B e^{-\alpha t}) = \frac{E}{R}$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية ولكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\cancel{B}\alpha = \frac{\cancel{B}}{RC} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

- $\frac{A}{RC} = \frac{E}{R} \rightarrow A = EC$

- عند اللحظة $t=0$ المكثفة غير مشحونة $(q=0)$ أي :

$$t=0 \rightarrow q=0$$

بالتعويض في الحل $q(t)$:

$$0 = A + B\,e^{\alpha(0)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -EC$$

ج- سعة المكثفة C :

- من البيان وعند النظام الدائم :

$q = Q_0 = 0{,}24\, mC$

- ونعلم أيضا أن عند النظام الدائم تكون شحنة المكثفة أعظمية أي :

$q = Q_0 = EC$

اذن :

$$C = \frac{Q_0}{E}$$

$$C = \frac{0{,}24 \cdot 10^{-3}}{12} = 2 \times 10^{-5}\, F$$

2 - أ/ المعادلة التفاضلية بدلالة q(t) :

حسب قانون جمع التوترات

$$U_{AB} = U_{AM} + U_{MB}$$

$$0 = Ri + \frac{q}{C}$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى

ب- اثبات حل المعادلة :

$$\bullet\ q = Q_0 e^{-t/\tau} = EC e^{-t/\tau}$$

$$\bullet\ \frac{dq}{dt} = EC\left(-\frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$= -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{R\cancel{C}}\left(E\cancel{C} e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = 0$$

$$-\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = 0$$

$$0 = 0$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

- عبارة E_C بدلالة t, Q_0, C :

لدينا :

$$E_{C(0)} = \frac{1}{2} C U_C^2$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$U_C = \frac{q}{C} \longrightarrow U_C^2 = \frac{q^2}{C^2}$$

ومنه

$$E_{C(0)} = \frac{1}{2} \cancel{C} \cdot \frac{q^2}{C^{\cancel{2}}}$$

$$E_{C(0)} = \frac{1}{2C} \cdot q^2_{(t)}$$

عند التفريغ لدينا :

$$q = Q_0 e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في العبارة الأخيرة :

$$E_{C(0)} = \frac{1}{2C} Q_0^2 e^{-2t/\tau}$$

$$\boxed{E_{C(0)} = \frac{Q_0^2}{2C} e^{-2t/\tau}}$$

* قيمة $E_{C(0)}$ عند بداية التفريغ $(t=0)$:

$$t = 0 \longrightarrow E_{C(t)} = E_{C(0)} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

$$E_{C(0)} = \frac{(0{,}24 \cdot 10^{-3})^2}{2 \times 2 \cdot 10^{-5}} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\ J$$