

تمارين مقترحة

3AS U03 - Exercice 021

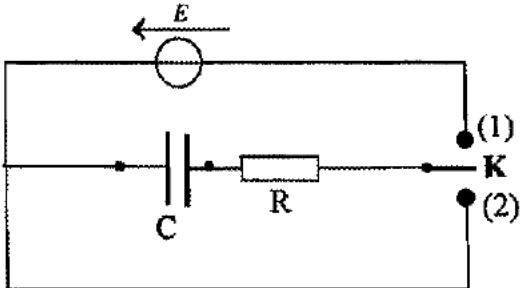
المحتوى المعرفي : دراسة ظواهر كهربائية .

تاريخ آخر تحدث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (**)

بغرض شحن مكثفة فارغة ، سعتها C ، نصلها على التسلسل مع العناصر الكهربائية التالية :

- مولد ذو توتر كهربائي ثابت $E = 5V$ و مقاومته الداخلية مهملة .
- ناقل أومي مقاومته $\Omega = 120$. $R = 120 \Omega$.
- بادلة k (الشكل-2) .



(الشكل-2)

1- لمتابعة تطور التوتر الكهربائي u_C بين طرفي المكثفة بدلاة الزمن ، نوصل مقياس فولطmeter رقمي بين طرفي المكثفة وفي اللحظة $t = 0$ ، نضع البادلة في الوضع (1) .

و بالتصوير المتعاقب تم تصوير شاشة جهاز الفولط متر الرقمي لمدة معينة و بمشاهدة شريط الفيديو ببطء سجلنا النتائج التالية :

t (ms)	0	4	8	16	20	24	32	40	48	60	68	80
u_C (V)	0	1.0	2.0	3.3	3.8	4.1	4.5	4.8	4.9	5.0	5.0	5.0

أ/ أرسم البيان $u_C = f(t)$.

ب/ عين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثاني القطب RC و استنتج قيمة السعة C للمكثفة .

2- كيف تتغير قيمة ثابت الزمن τ في الحالتين ؟

- الحالة (أ) : من أجل مكثفة سعتها C' حيث $C' > C$ حيث $C' > C$ و $\Omega = 120 \Omega$.

- الحالة (ب) : من أجل مكثفة سعتها C'' حيث $C'' = C$ و $\Omega = 120 \Omega$.

أرسم كيفيا ، في نفس المعلم المنحنيين (1) ، (2) المعبرين عن u_C في الحالتين (أ) و (ب) السابقتين .

$$3- \text{أ/} \text{ بين أن المعادلة التفاضلية المعبرة عن } q(t) \text{ تعطى بالعبارة : } \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{E}{R} .$$

ب/ يعطى حل المعادلة التفاضلية بالعبارة $q(t) = Ae^{\alpha t} + \beta$ حيث A و β ثوابت يطلب تعبيئها ، علما أنه في اللحظة $t = 0$ تكون $q(0) = 0$.

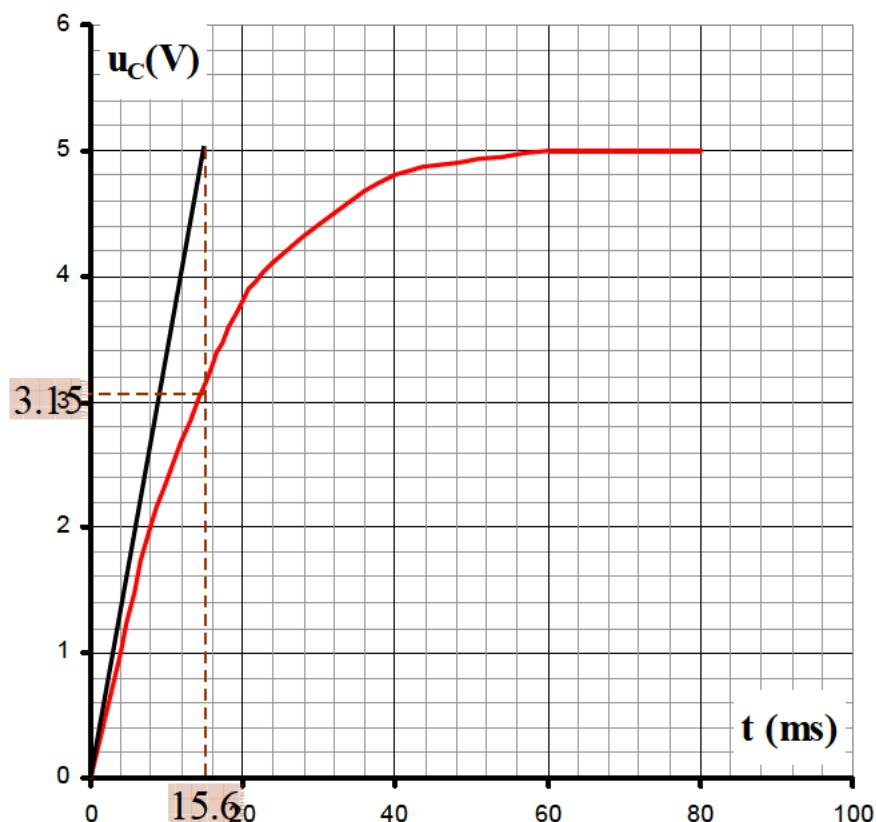
4- المكثفة مشحونة نضع البادلة في الوضع (2) في لحظة تعتبرها كمبدا للأزمنة .

أ/ أحسب في اللحظة $t = 0$ الطاقة الكهربائية المخزنة E_0 في المكثفة .

$$\text{ب/ ما هو الزمن الذي من أجله تصبح الطاقة المخزنة في المكثفة } ? E = \frac{E_0}{2}$$

حل التمرين

أ- البيان : $u_C = f(t)$



ب- ثابت الزمن :

$$t = \tau \rightarrow u_C = 63 \quad u_{C0} = 0.63 \cdot 5 = 3.15 \text{ V}$$

بالإسقاط في البيان نجد : $\tau \approx 15.6 \text{ ms}$.

يمكن الحصول على نفس النتيجة باستعمال المماس عند اللحظة $t = 0$ (الشكل).

- سعة المكثفة :

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{15.6 \cdot 10^{-3}}{100} = 15.6 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 156 \mu\text{F}$$

2- تغير حالة ثابت الزمن :

الحالة (أ) :

يتنااسب ثابت الزمن طرديا مع كل من R و C ، و حيث أن $\Omega' = R' = 120 \Omega$ (لم تغير R) فإن ثابت الزمن يزداد بازدياد السعة و يتلاقص بتلاقصها لذا يكون :

$$C' > C \rightarrow \tau' > \tau$$

الحالة (ب) :

يتاسب ثابت الزمن طرديا مع كل من R و C ، و حيث أن $C'' = C''$ (لم تتغير C) فإن ثابت الزمن يزداد بازدياد المقاومة و يتناقص بتناقصها لذا يكون :

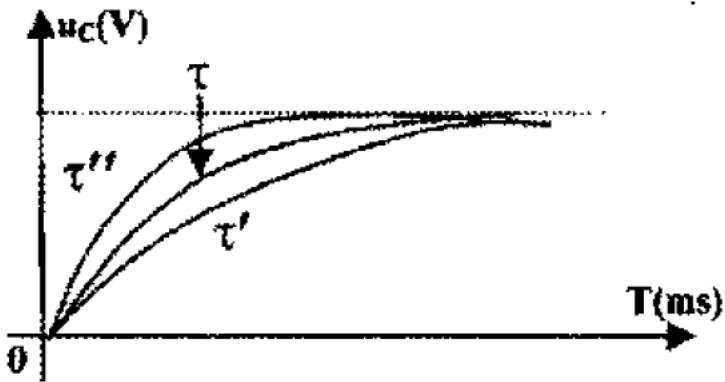
$$R' < R \rightarrow \tau'' < \tau$$

البيانين الموافقين لـ τ' ، τ ، τ'' :

كلما ازداد τ يزداد زمن اتمام الشحن (تأخر عملية الشحن) و كون أن :

$$\tau' > \tau , \tau'' < \tau \rightarrow \tau' > \tau > \tau''$$

و عليه يكون البيانات الموافقين لـ τ' و τ'' كما يلي :

3- أ/ المعادلة التفاضلية:

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_R + u_C$$

$$E = R i + u_C$$

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

بقسمة الطرفين على R :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$$

ب- تعين α ، A ، β :

$$q = A e^{\alpha t} + B$$

$$\frac{dq}{dt} = A \alpha e^{\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$A \alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC} (A e^{\alpha t} + B) = \frac{E}{R}$$

$$A \alpha e^{\alpha t} + \frac{A}{RC} e^{\alpha t} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{R}$$

$$(A\alpha + \frac{A}{RC}) e^{\alpha t} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{R}$$

الحل المعطى هل حل للمعادلة التفاضلية و لتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\bullet \quad (A\alpha + \frac{A}{RC}) = 0 \rightarrow A\alpha = -\frac{A}{RC} \rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

$$\bullet \quad \frac{\beta}{RC} = \frac{E}{R} \rightarrow \frac{\beta}{C} = E \rightarrow \beta = EC$$

لدينا من معطيات التمرين :

$$t = 0 \rightarrow q = 0$$

بالت遇ويض في عبارة الحل $q = Ae^{\alpha t} + B$ نجد :

$$0 = Ae^{\alpha \cdot 0} + B \rightarrow A + B = 0 \rightarrow A = -\beta \rightarrow A = -EC = -Q_0$$

4- أ. الطاقة الكهربائية عند $t = 0$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

عند بداية التفريغ تكون $V = E = 5V$ و عليه :

$$t = 0 \rightarrow E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \cdot (5)^2 = 1.25 \cdot 10^{-4} J$$

ب- الزمن الذي من أجله تصبح الطاقة المخزنة في المكثفة

$$\underline{\underline{E = \frac{E_0}{2}}}$$

لدينا :

$$E_{(C)} = E_{(C)_0} e^{-2t/\tau}$$

إذا فرضنا أن الزمن المطلوب هو $t_{1/2}$ يكون :

$$t = t_{1/2} \rightarrow E_{(C)} = \frac{E_{(C)_0}}{2}$$

بالت遇ويض في عبارة الطاقة يكون :

$$\frac{E_{(C)_0}}{2} = E_{(C)_0} e^{-2t_{1/2}/\tau}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-2t_{1/2}/\tau} \rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-2t_{1/2}/\tau} \rightarrow -\ln 2 = -\frac{2t_{1/2}}{\tau} \rightarrow t_{1/2} = \frac{\tau}{2} \ln 2$$