تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

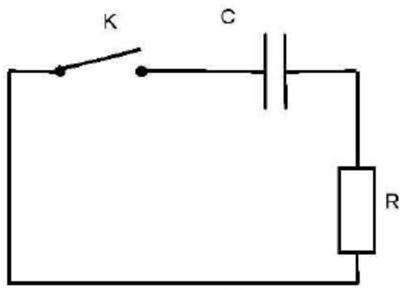
3AS U03 - Exercice 019

المحتوى المعرفي : دراسة ظواهر كهربائية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2013 - رياضيات) (**)

مكثفة سعتها C شحنت كليا تحت توتر كهربائي ثابت : $E = 12V$. لمعرفة سعتها C نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-2) ، حيث $R = 1k\Omega$.



الشكل-2

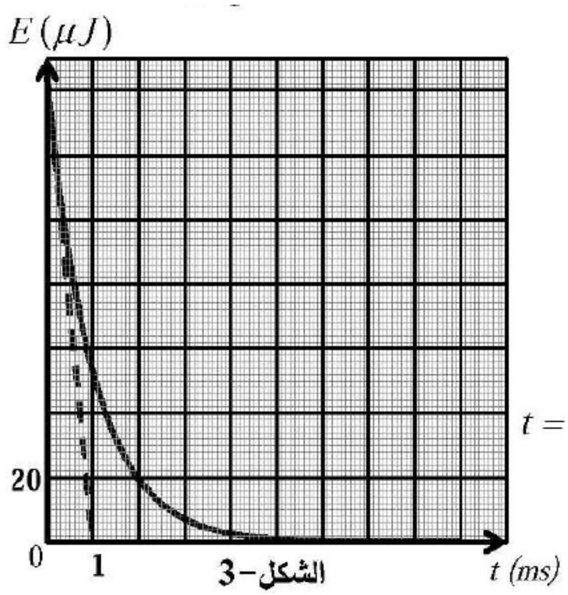
1- نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$ ms .

أ- بتطبيق قانون جمع التوترات ، جد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

ب- حل المعادلة التفاضلية السابقة يعطى من الشكل : $u_C(t) = Ae^{\alpha t}$ ، حيث : A و α ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما .

2- أكتب العبارة اللحظة $E_C(t)$ للطاقة المخزنة في المكثفة .

3- (الشكل-3) يمثل تطور $E_C(t)$ ، الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة الزمن .



الشكل-3

أ- استنتج قيمة E_{C0} الطاقة المخزنة العظمى في المكثفة .

ب- من (الشكل-3) ، بين أن مماس للمنحنى في اللحظة : $t = 0$ ms يقطع محور الأزمنة في اللحظة : $t = \frac{\tau}{2}$.

جـ- أحسب τ ثابت الزمن ، ثم استنتج سعة المكثفة C .

4- اثبت أن زمن تناقص الطاقة إلى النصف هو : $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$.

حل التمرين

1_ المعادلة التفاضلية بدلالة $u_c(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$Ri + u_C = 0$$

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

ومنه :

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

ب- عبارتي A و α :

- $u_C = Ae^{\alpha t}$
- $\frac{du_C}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}A.e^{\alpha t} = 0$$

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{A}{RC}e^{\alpha t} = 0$$

$$e^{\alpha t}\left(A\alpha + \frac{A}{RC}\right) = 0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية ولكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

عند اللحظة $t=0$ (بداية التفريغ) يكون التوتر بين طرفي المكثفة مساوي لـ E (أعظمي)، بالتعويض في العبارة $u_c(t)$:

$$E = Ae^{\alpha(0)} \rightarrow A = E$$

و- العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في المكثفة :

$E_{(c)} = \frac{1}{2} C u_c^2$

عند التفريغ لدينا :

$u_c = E e^{-t/\tau}$

ومنه :

$E_{(c)} = \frac{1}{2} C E^2 \left(e^{-t/\tau}\right)^2$

$E_{(c)} = \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} = E_{(c)_0} e^{-2t/\tau}$

حيث : $E_{(c)_0} = \frac{1}{2} C E^2$ وهي الطاقة الأعظمية في المكثفة .

ي- أ- قيمة $E_{(c)_0}$:

من البيان :

$E_{(c)_0} = 7 \times 20 \times 10^{-6} = 1,4 \times 10^{-4}\ J$

ب- إثبات أن مماس المنحنى $E_{(c)}(t)$ عند $t=0$ يقطع محور الأزمنة عند $t = \frac{\tau}{2}$:

نكتب معادلة المماس :

$E_{(c)} = a t + b$

$\bullet\ b = (E_{(c)})_{t=0} = \left(E_{(c)_0} e^{-2t/\tau}\right)_{t=0} = E_{(c)_0}$

$\bullet\ a = \left(\frac{dE_{(c)}}{dt}\right)_{t=0} =$

$E_{(c)} = E_{(c)_0} e^{-2t/\tau} \rightarrow \frac{dE_{(c)}}{dt} = \left(\frac{2E_{(c)_0}}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)_{t=0}$

إذن :

$a = \left(\frac{-2E_{(c)_0}}{\tau} e^{\frac{-2(0)}{\tau}}\right) = \frac{-2E_{(c)_0}}{\tau}$

ومنه تكون معادلة المماس كما يلي :

$E_{(c)} = -\frac{2E_{(c)_0}}{\tau} t + E_{(c)_0}$

عند تقاطع المماس مع محور الأزمنة يكون : $E_{(c)} = 0$ ومنه

$0 = -\frac{2E_{(c)_0}}{\tau} t + E_{(c)_0}$

$\frac{2\cancel{E_{(c)_0}} t}{\tau} = \cancel{E_{(c)_0}}$

$\frac{2t}{\tau} = 1 \longrightarrow t = \frac{\tau}{2}$

جـ- قيمة τ :

من البيان :

$\frac{\tau}{2} = 10^{-3}\ s \rightarrow \tau = 2 \times 10^{-3}\ s$

* قيمة C :

$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^3} = 2 \times 10^{-6} F = 2\ \mu F$

4- اثبات أن $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$:

لدينا :

$$E_{(c)} = E_{(c)_0}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$t = t_{1/2} \rightarrow E_{(c)} = \frac{E_{(c)_0}}{2}$$

بالتعويض :

$$\frac{\cancel{E_{(c)_0}}}{2} = \cancel{E_{(c)_0}}\, e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{2t_{1/2}}{\tau}$$

$$-\ln 2 = -\frac{2t_{1/2}}{\tau} \rightarrow t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$$