www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

3AS U03 - Exercice 015

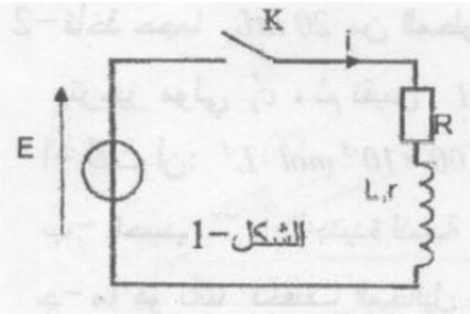
المحتوى المعرفي : دراسة ظواهر كهربائية .

تاريخ آخر تحديث : 2015/04/20

نص التمرين : (بكالوريا 2012 - رياضيات) (**)

نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-1) المكونة من :

- مولد توتر كهربائي ثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 2V$.
- ناقل أومي مقاومته $R = 100\ \Omega$.
- وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها r .
- قاطعة K .



1- نغلق القاطعة K :

أ- اكتب العلاقة التي تربط التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة $u_b(t)$ و التوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة $u_R(t)$ و E .

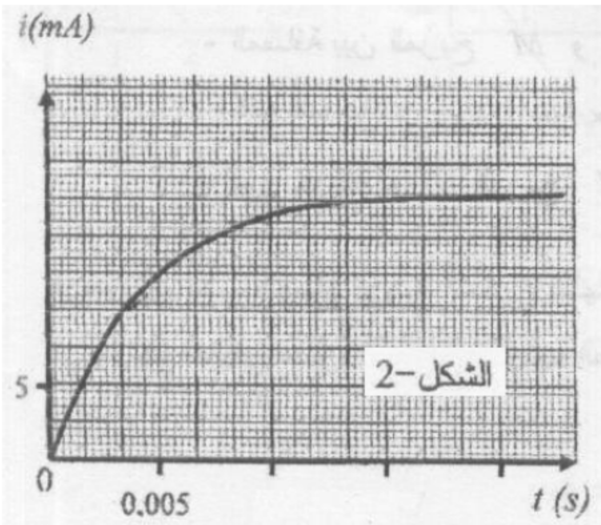
ب- جد عبارة $u_b(t)$ بدلالة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ ، ثم بدلالة $u_R(t)$.

جـ- استنتج المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_R(t)$ للدارة .

2- يعطى حل المعادلة التفاضلية التي يحققها بالشكل التالي :

$u_R(t) = A + Be^{-mt}$ حيث A و B و m ثوابت يطلب تعيينها

3- يسمح تجهيز الـ ExAO بمتابعة التطور الزمني لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة فنحصل على المنحنى البياني (الشكل-2)



لتكن I_0 شدة التيار الكهربائي الأعظمي في النظام الدائم .

أ- جد العبارة الحرفية للشدة I_0 .

ب- جد بيانيا قيمة الشدة I_0 ، ثم استنتج مقاومة الوشيعة r .

جـ- اكتب عبارة ثابت الزمن τ للدارة و بين بالتحليل البعدي أن τ متجانس مع الزمن .

د- جد بيانيا قيمة τ ، ثم استنتج قيمة ذاتية الوشيعة L .

حل التمرين

1- أ- العلاقة بين u_b و u_R و E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_R + u_b$$

ب- عبارة u_b بدلالة i :

$$u_b = L\frac{di}{dt} + r\,i$$

- عبارة u_b بدلالة u_R :

- $u_R = R\,i \;\rightarrow\; i = \frac{1}{R}u_R$
- $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d\,u_R}{dt}$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = L\left(\frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}\right) + r\left(\frac{1}{R}u_R\right)$$

$$u_b = \frac{L}{R}\frac{d\,u_R}{dt} + \frac{r}{R}u_R$$

جـ- المعادلة التفاضلية التي يحققها u_R :

بتعويض عبارة u_b الأخيرة في العبارة الأولى التي تحصلنا عليها بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$E = u_R + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R}u_R$$

بضرب الطرفين في R :

$$ER = R\,u_R + L\frac{du_R}{dt} + r\,u_R$$

$$L\frac{du_R}{dt} + (R+r)\,u_R = ER$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{L}u_R = \frac{ER}{L}$$

2- تعيين الثوابت A و B و m :

- $u_R = A + Be^{-mt}$
- $\frac{du_R}{dt} = -B.m\,e^{-mt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-B.m\,e^{-mt} + \frac{R+r}{L}(A + B\,e^{-mt}) = \frac{ER}{L}$$

$$-B.m\,e^{-mt} + \frac{(R+r)A}{L} + \frac{(R+r)B}{L}e^{-mt} = \frac{ER}{L}$$

$$(-B.m + \frac{(R+r)B}{L})\,e^{-mt} + \frac{(R+r)A}{L} = \frac{ER}{L}$$

الحل المعطى هو حل المعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $(-B.m + \frac{(R+r)\,B}{L}) = 0 \;\rightarrow\; B.m = \frac{(R+r)\,B}{L} \;\rightarrow\; m = \frac{(R+r)}{L}$
- $\frac{(R+r)A}{L} = \frac{ER}{L} \;\rightarrow\; (R+r)A = ER \rightarrow A = \frac{ER}{R+r}$

- من الشروط الابتدائية : $t = 0 \rightarrow u_R = 0$ بالتعويض في عبارة u_R (حل المعادلة التفاضلية) :

$$0 = A + B\,e^{-m(0)} \;\rightarrow\; A + B = 0 \;\rightarrow\; B = -A \;\rightarrow\; B = -\frac{ER}{R+r}$$

3- أ- العبارة الحرفية للشدة I_0

لدينا : $u_R = R\,i$ و في النظام الدائم يكون :

- $i = I_0 \;\rightarrow\; u_R = R\,I_0$
- $\frac{di}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{du_R}{dt} = 0$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{R+r}{L}(RI_0) = \frac{ER}{L} \;\rightarrow\; I_0 = \frac{E}{R+r}$$

ب- قيمة I_0 :

من البيان مباشرة :

$$I_0 = 3.6 \times 5\,.\,10^{-3} = 1.8\,.\,10^{-2}\ A$$

- قيمة r :

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow (R+r) = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{2}{1.8\,.10^{-2}} - 100 = 11\,\Omega$$

جـ- عبارة τ :

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

- إثبات أن τ متجانس مع الزمن :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R_T]}$$

لدينا :

- $u_b = L\dfrac{di}{dt} \rightarrow [U]=[L]\dfrac{[I]}{[T]} \rightarrow [L]=\dfrac{[U][T]}{[I]}$
- $u_R = RI \rightarrow [U]=[R][I] \rightarrow [R]=\dfrac{[U]}{[I]}$

بالتعويض في عبارة $[\tau]$ نجد :

$$[\tau]=\frac{\dfrac{[U][T]}{[I]}}{\dfrac{[U]}{[I]}}=\frac{[U][T]}{[I]}\cdot\frac{[I]}{[U]} \rightarrow [\tau]=[T]=s$$

<u>د- قيمة τ :</u>

$$t=\tau \rightarrow i=0.63\, I_0 = 0.63\ .\ 1.8\ .\ 10^{-2} = 1.13\ .\ 10^{-2}$$

بالإسقاط في البيان : $\tau = 1.2$ cm

و اعتمادا على سلم الرسم :

$$\begin{cases} 1.5\text{ cm} \rightarrow 0.005 \\ 1.3\text{ cm} \rightarrow \tau\ (s) \end{cases}$$

$$\tau=\frac{1.3\,.\,0.005}{1.5} \approx 4.3\ .10^{-3}s = 4.3\,ms$$

<u>- قيمة L :</u>

$$\tau=\frac{L}{R+r} \rightarrow L=\tau\,(R+r)$$

$$L=4.3\,.10^{-3}\,(100+11)=0.48\,H$$