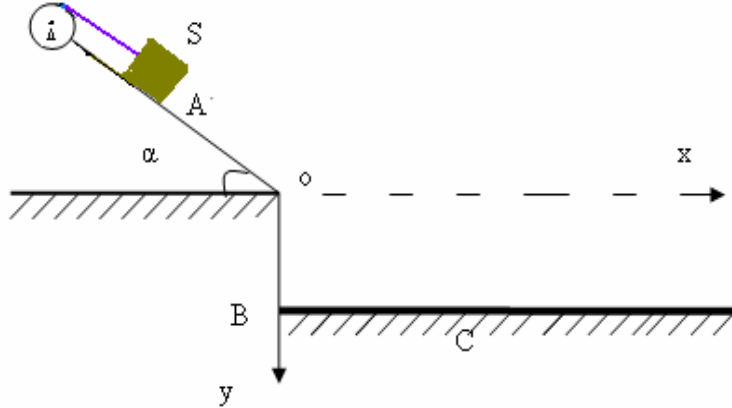


(I)

نعتبر جسما (S) صلبا كتلته $m = 0,25kg$ ، يمكنه أن ينزلق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة للخط الأفقي .

الجسم (S) مثبت في طرف حبل ذي كتلة مهملة وغير قابل للتمدد و يدور بدون انزلاق على مجرى بكرة شعاعها $r = 5cm$ قابلة للدوران حول محور أفقي وثابت Δ .
 نعطي عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور Δ : $J_{\Delta} = 2,5 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$ و شدة الثقالة: $g = 10m/s^2$.



1 نطلق الجسم (S) من النقطة A بدون سرعة بدئية فينزل فوق المستوى المائل مسببا دوران البكرة .
 1-1 احسب تسارع الجسم (S) واستنتج طبيعته حركته .

2-1 احسب سرعة الجسم (S) في النقطة O علما أن : $OA = 2m$.

2 في النقطة O ينفلت الحبل من البكرة فيسقط الجسم (S) في النقطة C من علو $OB = 75cm$.

1-2 أعط المعادلتين الزميتين لحركة الجسم (S) في المعلم (o, x, y) .

2-2 استنتج : (ا) مدة السقوط الحر للجسم (S) .

(ب) المسافة BC .

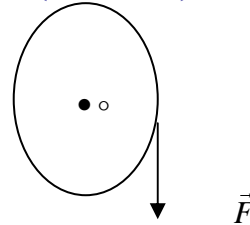
3 عندما ينفلت الحبل من البكرة تخضع هذه الأخيرة إلى مزدوجة مقاومة عزمها ثابت $M_{\Delta} = -7,5 \times 10^{-2} N \cdot m$ ليتوقف بعد انجاز عدة دورات .

1-3 احسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة .

2-3 ما عدد الدورات التي أنجزتها البكرة خلال مدة الكبح ؟

(II)

يمكن لقرص متجانس كتلته m وشعاعه $r = 5cm$ ، أن يدور حول محوره الأفقي Δ بدون احتكاك . نلف على محيط القرص خيطا رقيقا . (انظر الشكل)



عزم قصور القرص بالنسبة لمحور الدوران : $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$.

1 نطبق على القرص قوة \vec{F} مماسة لمحيطه وثابتة ، شدتها تساوي نصف شدة الوزن P للقرص مسببة دوران القرص حول محوره Δ . علما أنه في اللحظة $t = 0$ ، $\theta = 0$ و السرعة البدئية منعدمة .

1-1 أوجد تعبير التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة بدلالة g و r ثم احسب قيمته .

2-1 ما المدة الزمنية التي ينجز فيها القرص دورة كاملة ؟

3-1 ما السرعة الزاوية بعد هذه المدة ؟

2 عندما تصير سرعة القرص 10 دورات في الثانية، نحذف تأثير الخيط . نلاحظ أنه نتيجة التأثيرات العديدة التي تسبب كبح القرص ، فإن سرعته تتناقص لتتعدم بعد 5 دقائق .

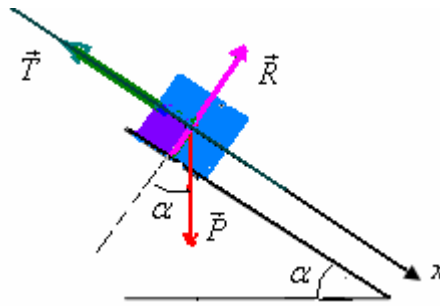
1-2: احسب عدد الدورات التي ينجزها القرص قبل توقفه النهائي (باعتبار لحظة الانفصال عن القرص هي اللحظة $t=0$).

2-2: عبر بدلالة m و r عن العزم M لمزدوجة الكبح الذي نعتبره ثابتا . نعطي : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

تصحيح

I - 1: خلال حركته على المستوى المائل يخضع الجسم S للقوى التالية:

\vec{P} : وزنه. و \vec{R} : القوة المقرونة بتأثير سطح التماس وهي \perp عليه لأن الاحتكاك مهمل.



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S نحصل على: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$

بما أن حركة الجسم S مستقيمة فإن: $\vec{a}_G = a \cdot \vec{i}$ المتجهة الواحدة التي توجه المحور $0x$. نسقط هذه العلاقة على المحور $0x$.

$$+ P \sin \alpha + 0 - T = m \cdot a$$

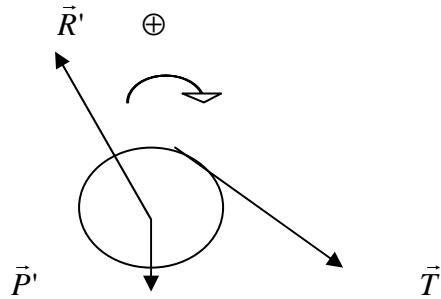
$$T = mg \sin \alpha - ma$$

(1)

وبتطبيق العلاقة الأساسية للحريك على البكرة التي أثناء دورانها تخضع للقوى التالية:

\vec{P}' : وزن البكرة. و R' : القوة المقرونة بتأثير محور الدوران على البكرة. ثم \vec{T}' : توتر الخيط.

تكتب العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن كما يلي: $M\vec{P}'_{\Delta} + MR'_{\Delta} + M\vec{T}'_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$ وباعتبار المنحى الموجب للدوران:



تصبح العلاقة السابقة كما يلي: $0 + 0 + T' \cdot r = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$

لأن: \vec{R}' و \vec{P}' تتقاطعان مع محور الدوران ومنه: $T' = \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}}{r}$ (2)

ولدينا من جهة $T = T'$ لأن الخيط المستعمل غير قابل للتمدد وذي كتلة مهملة ومن جهة أخرى $a = r\ddot{\theta}$ لأن الخيط

يدور بدون انزلاق على البكرة. إذن: $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$ إذن: $mg \cdot \sin \alpha - ma = \frac{J_{\Delta} \cdot a}{r^2}$ أي:

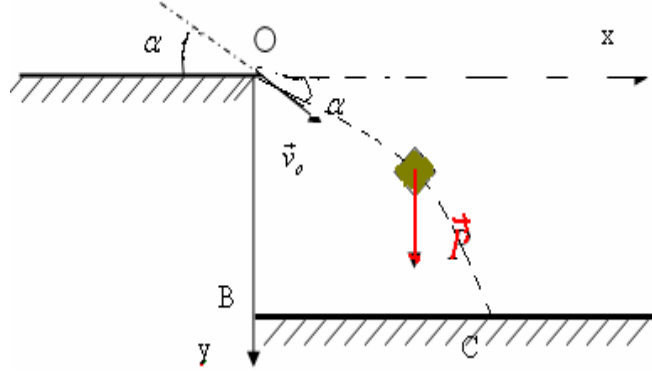
$$a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}$$

ت.ع: $a = \frac{0,25 \cdot 10 \cdot 0,5}{0,25 + \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}}} = \frac{1,25}{0,25 + \frac{25 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-4}}} = \frac{1,25}{1,25} = 1 \text{ m.s}^{-2}$ (هذا التطبيق العددي لا يحتاج إلى استعمال الآلة الحاسبة)

ينتقل الجسم S على مسار مستقيمي بتسارع ثابت إذن حركته مستقيمية متغيرة بانتظام. 2-1- بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين A و O :

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot a \cdot OA} = \sqrt{2 \times 1 \times 2} = 2 \text{ m/s} : v_A = 0 \text{ وبما أن } v_0^2 - v_A^2 = 2 \cdot a \cdot OA$$

(2) عندما يغادر الجسم S المستوى المائل في النقطة O يصبح خاضعا لتأثير وزنه \vec{P} فقط.



* متجهة السرعة \vec{v}_0 في النقطة O :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{V}_0 \\ V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{لها إحداثيتين في المعلم } (0, x, y) \\ \text{وتكون زاوية } \alpha \text{ مع المحور } 0x. \end{array}$$

العلاقة الأساسية للديناميك (القانون الثاني لنيوتن) تكتب كما يلي : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$

* إسقاطها على المحور oy $+P = m \cdot a_y \Leftrightarrow m \cdot g = m \cdot a_y$ أي $a_y = g$ الحركة مستقيمية

متغيرة بانتظام. وبذلك تكون المعادلة الزمنية للحركة حسب هذا المحور : $y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$ أي :

$$y = 5t^2 + t \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$$

* إسقاطها على المحور ox $0 = m \cdot a_x \Leftrightarrow a_x = 0$ أي : الحركة مستقيمية منتظمة تتم

بسرعة ثابتة وهي : $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ إذن : المعادلة الزمنية للحركة حسب ox هي : $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$

$$x = 1,73t$$

(2-2) لتكن t_c مدة السقوط الحر للجسم S . عند وصول الجسم S إلى النقطة C يكون لدينا :

$$0,75 = 5t_c^2 + t_c \quad \text{نعوض في (3) : } y = y_c = y_B = OB$$

$$5t_c^2 + t_c - 0,75 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\text{هذه المعادلة لها حلين : } t_c = \frac{-1 \pm 4}{10} \quad \text{أي } 0,3 \text{ و } -0,5 \text{ وبما أن } t > 0 \text{ فإن : } t_c = 0,3 \text{ s}$$

تحديد المسافة BC

لدينا : $BC = xc$ ونعوض في x المتغيرة t بمدة السقوط t_c :

$$xc = 1,73t_c = 1,73 \cdot 0,3 = 51,9 \text{ m} \approx 52 \text{ m}$$

(3) (1-3) نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة بعد انفلات الحبل: فهي لا تخضع لوزنها \vec{P} وتأثير محور

الدوران \vec{R} بالإضافة إلى المزدوجة المقاومة ذات العزم $M_{\Delta} = -7,5 \times 10^{-2} N.m$

أي: $M_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$ إذن: 2-3 : في لحظة انفلات الحبل السرعة الزاوية

$$M_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$\omega_0 = \frac{v_o}{r} = \frac{2}{5.10^{-2}} = 40 \text{ rad / s}$$

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \Delta\theta$ مع السرعة الزاوية عند التوقف $\omega = 0$ و

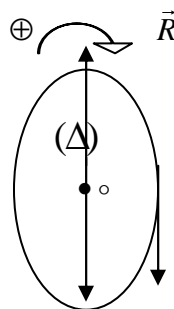
$$n = \frac{-\omega^2}{4 \cdot \pi \cdot \ddot{\theta}} = 4,25$$

تمثل عدد الدورات التي أنجزتها الاسطوانة قبل التوقف. $\Delta\theta = 2\pi \cdot n$

(1 II)

(1-1) بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة التي تخضع للقوى التالية:

\vec{P} : وزن البكرة. و \vec{R} : تأثير محور الدوران Δ ثم \vec{F} : القوة المطبقة على البكرة.



$$\sum M\vec{F}_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M\vec{F}_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

نختار منحى موجبا للدوران (انظر الشكل)

وبما عزم \vec{P} وعزم \vec{R} منعدمان لان خطي تأثيرهما يتقاطعان مع محور الدوران (لا مقدرة لهما على إدارة البكرة) فإن

العلاقة السابقة تصبح:

$$+ F \times d + 0 + 0 = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad (1)$$

مع: $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2$ و $[d = r]$ و $[F = \frac{m \cdot g}{2}]$ إذن العلاقة (1) تصبح:

$$\ddot{\theta} = \frac{10}{5.10^{-2}} = 200 \text{ rad / s}^2 \quad \text{ت.ع.} \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \quad \text{ومنه} \quad \frac{m \cdot g}{2} \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta}$$

(2-1) بما أن حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام متسارعة. المعادلة الزمنية للحركة تكتب كما يلي:

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \times t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (a)$$

في هذه العلاقة وحدة θ هي rad.

عندما ينجز القرص دورة كاملة: $\theta = 2\pi$ ومن خلال المعطيات: $\theta_0 = 0$ و $\omega_0 = 0$ إذن العلاقة (a) تصبح:

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \times t^2 \quad \text{ومنه}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times \theta}{\ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\pi}{200}} = 0,25 \text{ s}$$

(3-1) من خلال دالة السرعة الزاوية: $\omega = \dot{\theta} \cdot t + \theta_0$ مع $\theta_0 = 0$ إذن: $\omega = 200t$

وفي اللحظة $t = 0,25 \text{ s}$ نحصل على:

$$\omega = 200 \cdot 0,25 = 50 \text{ rad / s}$$

(2) 1-2 لتكن ω_1 السرعة الزاوية لدوران القرص في لحظة انفصاله عن الخيط أي اللحظة التي تصير فيها سرعة القرص 10 دورات في الثانية. نعلم أن عدد الدورات في الثانية يمثل التردد N (لان الدور T هي المدة التي ينجز فيها القرص دورة واحدة. فبما أنه أصبح ينجز n دورة في 1 s إذن دورة سينجزها في $\frac{1}{n}$ وهو الدور

T وهو مقلوب التردد وبالتالي عددا لدورات في الثانية n يعبر عن التردد (N) .

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi.N$$

إذن: $\omega_1 = 2\pi.N_1 = 2 \times 3,14 \times 10 = 62,8 \text{ rad/s}$ ولتكن ω_F السرعة الزاوية للقرص عند التوقف $\omega_F = 0$.

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على القرص بين لحظة انفصاله عن الخيط ولحظة توقفه عن الحركة :

$$(1) \quad \omega_F^2 - \omega_1^2 = 2.\dot{\theta}'.\Delta\theta$$

مع $\Delta\theta = 2\pi n$ و $\omega_F = 0$ وهكذا (1) تصبح $-\omega_1^2 = 4.\dot{\theta}'\pi.n$ إذن: $n = \frac{-\omega_1^2}{4.\pi.\dot{\theta}'}$ ومن

خلال دالة السرعة الزاوية (باعتبار لحظة الانفصال هي اللحظة $t = 0$) لدينا: $\omega_F = \dot{\theta}' \times t + \omega_1$ مع: بما أنه يتم

التوقف بعد 5 دقائق: $\dot{\theta}' = \frac{-\omega_1}{t}$ مع (c) $\omega_1 = 62,8 \text{ rad/s}$ و $t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s}$ و $\omega_F = 0$:

نعوض (c) في (b) فنحصل على:

$$n = \frac{\omega_1.t}{4.\pi} = \frac{62,8 \times 300}{4 \times 3,14} = 1500 \text{ tr}$$

(2-2) بتطبيق ع.أ.للتحريك على البكرة في المرحلة الأخيرة (بعد انفصالها عن الخيط) نحصل على :

$$\omega_1 = 62,8 \text{ rad/s} \quad \dot{\theta}' = \frac{-\omega_1}{t} \quad \text{مع} \quad 0 + 0 + M = \frac{1}{2} m.r^2.\ddot{\theta}' \quad \Leftarrow \quad M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M = J_\Delta.\ddot{\theta}'$$

$$M = -0,105.m \times r^2 \quad \text{إذن:} \quad \ddot{\theta}' = \frac{-62,8}{300} \approx -0,21 \text{ rad/s}^2 \quad \text{و} \quad t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s}$$