الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية معسكر | ثانوية لعروسي الحاج قدور تغنيف

شعبة : الرياضيات | 2012/02/27 | المدة : 03 ساعات

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية ، معرفتان بـ : $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$.

1) برهن أنه من أجل كل $n \in N$ ، $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) أ ـ أحسب $p\gcd(x_8, x_9)$ ثم $p\gcd(x_{2012}, x_{2013})$.

ـ ما القول عن العددين x_8 و x_9 وكذلك عن العددين x_{2012} و x_{2013} ؟

ب ـ هل العددين x_n و x_{n+1} أوّليين فيما بينهما من أجل كل $n \in N$ ؟

3) أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$

ب ـ عبر عن y_n بدلالة n .

جـ ـ أدرس حسب قيم p ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5 .

د ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $d_n = p\gcd(x_n, y_n)$.

برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ثم استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $p\gcd(x_n, y_n) = 1$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) بين أن مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق :

$$(x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

هي مستقيم (D) يطلب تعيين شعاع توجيه له.

2) أ) بين أن مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق :

$$(x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

هي اتحاد مستويين (P) و (Q) يطلب إعطاء معادلتين ديكارتيتين لهما.

ب) تحقق من أن $(P) \cap (Q) = (D)$

3) نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية

$$(1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$$

أ) بين أن (P_m) يحوي (D).

ب) هل أن كل مستوي يحوي (D) هو المستوي (P_m) ؟ برر

التمرين الثالث:(09 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x - 1 - \ln x \quad \text{و} \quad h(x) = x + (x-2)\ln x$$

1. أ) احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0;+\infty[$ ثم ادرس تغيرات g .

2.أ) استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

ب) بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$

3. بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $(x-1)\ln x \geq 0$

4.استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$
و ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1.أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.فسر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2.أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. أ) عين معادلة ديكارتية للمستقيم Δ مماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ في النقطة $A(1;1)$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

جـ) ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحني $\mathcal{C}_f$ و المستقيم Δ.

4.أنشئ Δ و $\mathcal{C}_f$.(نقبل أن $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و $1,5$).

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي n ، $1 < u_n < e$

2.بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3.استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(5.5 نقطة)

n عدد طبيعي غير معدوم ؛ نعتبر الأعداد :

$$c_n = 2\times10^n + 1 \quad , \quad b_n = 2\times10^n - 1 \quad , \quad a_n = 4\times10^n - 1$$

-1 أ- احسب a_1 , b_1 , c_1 و a_2 , b_2 , c_2 ثم a_3 , b_3 , c_3 .

ب – كم رقما تحتوي الكتابة العشرية للأعداد a_n و c_n .

ت - بين أن : a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 .

ث- بين أن b_3 أولي.

-2 أ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $b_n \times c_n = a_{2n}$

ب- استنتج التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 .

-3 أ- بين أن $p\gcd(b_n;c_n) = p\gcd(c_n;2)$: .

ب - استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما .

4 - نعتبر المعادلة (E) : $b_3\, x + c_3\, y = 1$ للأعداد الصحيحة x و y .

أ -- برر لماذا (E) تقبل على الأقل حلا .

ب باستعمال خوارزمية إقليدس للأعداد b_3 و c_3 أوجد حلا خاصا للمعادلة (E).

ت- حل المعادلة (E) .

التمرين الثاني:(5.5 نقطة)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(-1;0;2)$ ، $B(3;2;-4)$ ، $C(1;-4;2)$ و $D(5;-2;4)$

نعرف النقط I ، J و K كما يلي : I منتصف [AB] . K منتصف [CD] و $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

1) عين احداثيات النقط I ، J و K ثم تحقق أن هذه النقط ليست على استقامة واحدة .

2) تحقق أن $\vec{n}(8;9;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية لـ (IJK).

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) ثم تحقق أن (IJK) و(AD) يتقاطعان في نقطة L حيث $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

4) لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;3),(C;1),(D;1)\}$.

أ) عين مرجح الجملة $\{(A;3),(D;1)\}$ ثم مرجح الجملة $\{(B;3),(C;1)\}$.

ب) باستعمال النقطة G ، بين أن المستقيمين (JL) و (IK) متقاطعان.

(يمكن اعتبار G مرجح للجملة $\{(A,3),(B,3),(C,1),(D,1)\}$بطريقتين مختلفتين).

ت) استنتج أن النقط I ، J ، K و L من نفس المستوي

التمرين الثالث: (09 نقاط)

الجزء الأول:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(1-x)e^{x}+1$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و ادرس تغيرات الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,27;1.28[$

3- استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=e^{x}-\ln(x-1)$

(C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=0.5cm$

1- اثبت أنه من اجل كل عدد حقيقي من $]1;+\infty[$ أن : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x-1)}$

2- بين أن : $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ ..

3- بين من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ أن: $f(x)=x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{x-1}{x}\times\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}\right)$

- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$. فسر بيانيا النتيجة.

5- شكل جدول تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى (C).