المستوى : 3 رياضي + تقني رياضي **المدة : 04 ساعات**

الإختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

n عدد طبيعي اكبر تماما من 3

نضع : $A = n^3 + 3n^2 + 2n - 4$ و $C = n - 3\,; B = n^2 + 2n - 1$

1-عين العدد الطبيعي x_n بحيث : $A = Bx_n + C$

2-بين أن $p\gcd(A;B) = p\gcd(C;14)$

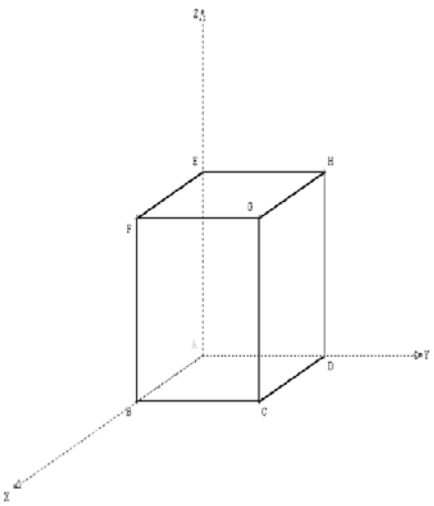
3-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p\gcd(A;B) = 7$

4- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p\gcd(A;B) = 1$

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء مكعبا $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$ABCDEFGH$ ، نرمز بـــ I ,J وK الى منتصفات القطع [BC] ,[BF] و$[HF]$ على الترتيب



1. عين إحداثيات النقط I ,J وK
2. أ- بين أن الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{IK}$ و$\overrightarrow{IJ}$
ب - استنتج أن المعادلة $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ هي معادلة للمستوي (IJK)
3. أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CD)
ب)استنتج أن إحداثيات R نقطة تقاطع المستوي (IJK) والمستقيم ( ) هي $\left(\frac{3}{4};1;0\right)$

ثم عين النقطة R على الرسم

4. ارسم على الشكل تقاطع المكعب $ABCDEFGH$ و المستوي (IJK)
5. أ) بين أن المسافة بين النقطة G والمستوي (IJK) هي $\frac{\sqrt{6}}{4}$
6. ب)ليكن S سطح الكرة ذات المركز G والتي تشمل F بين أن المستوي (IJK) يقطع سطح الكرة S وفق الدائرة (C) يطلب نصف قطرها

التمرين الثالث :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$.

نضع Z_M لاحقة النقطة M و لتكن A النقطة ذات اللاحقة 4 و B النقطة ذات اللاحقة $4i$

1) لتكن θ عدد حقيقي من المجال $[0;2\pi[$ و r عدد حقيقي موجب تماما .

نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $re^{i\theta}$ و F نقطة بحيث OEF قائم ومتساوي الساقين و $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$.

- أوجد بدلالة r و θ لاحقة النقطة F .

2) نختار $\theta = \frac{5\pi}{6}$ و $r = 3$ ، ضع رسما توضح فيه النتائج السابقة .

3) نعتبر النقط P ، Q ، R ، S منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BE]$ ، $[EF]$ ، $[FA]$ على الترتيب

أ - بين أن $PQRS$ متوازي أضلاع .

ب – نضع : $Z=\dfrac{Z_R-Z_Q}{Z_p-Z_Q}$

عين طويلة وعمدة العدد Z ثم إستنتج أن $PQRS$ مربع .

4) أ- أحسب بدلالة r و θ لاحقتي النقطتين P و Q .

ب - أحسب بدلالة r و θ مساحة المربع $PQRS$.

جـ - r عدد ثابت من اجل أية قيمة لـ θ تكون مساحة المربع أعظمية

ما هي لاحقة النقطة F .

التمرين الرابع:

الجزء (I): g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) أدرس تغيرات g .

2) بين أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,8\prec\alpha\prec1,9$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

الجزء (Π): f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$.

(c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$.

1) عين نهايات f عند 0 و $+\infty$ ،فسر بيانيا النتائج .

2) بين انه من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$.

3) استنتج اتجاه تغير f .

4) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم شكل جدول تغيرات f .

5) أرسم (c_f) بعناية . يعطـــــى : $f(\alpha)=0,23$.

السنة الثالثة : رياضي + تقني رياضي

تصحيح الإختبار الثاني في مادة الرياضيات

2011/ 2012

التمرين الأول :

1)تعيين العدد الطبيعي x_n بحيث : $A = Bx_n + C$

لدينا $A = Bx_n + C$ ومنه $x_n = \frac{A-C}{B} = \frac{n^3+3n^2+n-1}{n^2+2n-1}$

بالقسمة نجد : $x_n = n+1$

2) تبيين أن $p\gcd(A;B) = p\gcd(C;14)$

نضع : $PGCD(A;B)=d \;\; ;PGCD(C;14)=d'$

ونبين أن $d'=d$

لاحظ أن : $B=(n-3)(n+5)+14$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} d/A \\ d/B \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} d/A \\ d/Bx_n \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} d/A \\ d/A-Bx_n \end{array}\right.$ أي

$\left\{\begin{array}{l} d/B \\ d/C \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} d/n^2+2n-1 \\ d/n-3 \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} d/n^2+2n-1 \\ d/(n-3)(n+5) \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} d/n^2+2n-1 \\ d/n^2+2n-15 \end{array}\right.$ ومنه

$d/(n^2+2n-1)-(n^2+2n-15)$ أي $d/14$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} d/C \\ d/14 \end{array}\right.$ ومنه $d/PGCD(C;14)$ أي $d/d'....(1)$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} d'/C \\ d'/14 \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} d'/n-3 \\ d'/14 \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} d'/(n-3)(n+5) \\ d'/14 \end{array}\right.$ أي

$\left\{\begin{array}{l} d'/n^2+2n-15 \\ d'/14 \end{array}\right.$ ومنه $d'/(n^2+2n-15)+14$ أي

$d'/(n^2+2n-1)$ أي d'/B

$\left\{\begin{array}{l} d'/C \\ d'/B \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} d'/C \\ d'/Bx_n \end{array}\right.$ ومنه d'/Bx_n+C أي d'/A

إذن $\left\{\begin{array}{l} d'/A \\ d'/B \end{array}\right.$ ومنه $d'/PGCD(A;B)$ أي $d'/d....(2)$

من (1) و (2) نجد $d'=d$

3) -تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $PGCD(A;B)=7$

$PGCD(A;B)=7$ معناه $PGCD(C;14)=7$

أي $PGCD(n-3;14)=7$ و هذا معناه

$n-3$ مضاعف لـ 7 و ليس مضاعفا لـ14 أي

$n-3=7k$ و $n-3\neq 14k$

أي $n=7k+3$ و $n\neq 14k+3$ و هذا معناه أن k فردي

ومنه $n=7(2k+1)+3$ أي $n=14k+10$

إذن : $PGCD(n-3;14)=7$ معناه $n=14k+10$

ملاحظة : $PGCD(n-3;14)=14$ معناه $n=14k+3$

4)تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p\gcd(A;B)=1$

$PGCD(n-3;14)=1$ معناه :

$n\neq 14k+10$ و $n\neq 14k+3$ و $n-3$ عدد فردي أي $n-1$ فردي (أي n زوجي) ومنه $n=2k$ و عليه $n=14k+\alpha$ مع :

$\alpha \in \{0;2;4;6;8;12\}$

التمرين الثاني :

1)تعيين إحداثيات النقط : $K;J;I$

لدينا : $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$ ، $C(1,1,0)$ ، $F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$ ، $D(0,1,0)$ ، $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ ، $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ ،

$K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$

2)أ- تبيين أن الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$

لدينا : $\overrightarrow{IJ}\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$ ومنه :

$\overrightarrow{IJ}\bullet\vec{n}=0\,;\overrightarrow{IK}\bullet\vec{n}=0$ ومنه الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$

إذن : الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ عمودي على المستوي (IJK) .

ب- لدينا $\overrightarrow{\ }(2;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (IJK) ومنه معادلة المستوي (IJK) من الشكل : $2x+y+z+d=0$

لدينا مثلا $I\in(IJK)$ منه نجد $2(1)+\frac{1}{2}+0+d=0$ وعليه $d=-\frac{5}{2}$ ومنه : $2x+y+z-\frac{5}{2}=0$ وبالضرب في 5 نجد :

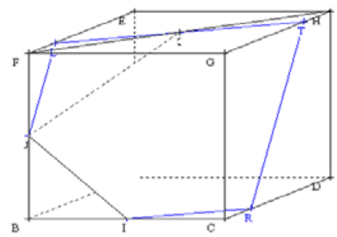
$$(IJK):\ 4x+2y+2z-4=0$$

3)كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD)

لدينا : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ ومنه $(CD):\begin{cases}x=-t\\y=1 \quad ....(t\in\mathbb{R})\\z=0\end{cases}$

ب) لدينا إحداثيات النقطة $R\left(\frac{3}{4};1;0\right)$ تحقق كلا من معادلة المستوي (IJK) و التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD)

(4



الخماسي $(IJLKTR)$

5)أ- المسافة بين النقطة $G(1;1;1)$ والمستوي (IJK) هي :

$$d(G,(IJK))=\frac{|4(1)+2(1)+2(1)-5|}{\sqrt{(4)^2+(2)^2+(2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{24}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{24}}=\frac{3}{\sqrt{24}}\times\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}}=\frac{6\sqrt{6}}{24}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

6)بما أن سطح الكرة (S) مركزها $G(1;1;1)$ وتشمل F فإن نصف قطرها هو : $r=FG=1$

بما أن : $d(G,(IJK))\prec 1$ فإن سطح الكرة (S) يقطع المستوي (IJK) وفق دائرة نصف قطرها هو r' حيث :

$r^2=r'^2+d^2$ ومنه

$r'^2=r^2-d^2=(1)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$ ومنه

$$r'=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

التمرين الثالث :

1)إيجاد بدلالة r و θ لاحقة النقطة F أي Z_F

لدينا : $|Z_F|=OF$ و $Arg(Z_F)=(\vec{u};\overrightarrow{OF})$

بما ان المثلث OEF متساوي الساقين فإن $|Z_F|=OF=OE=r$

و

$$Arg(Z_F)=(\vec{u};\overrightarrow{OF})=(\vec{u};\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF})=\frac{\pi}{2}+\theta$$

ومنه : $Z_F=r\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

2)نختار $\theta=\frac{5\pi}{6}$ و $r=3$ ، ضع رسما توضح فيه النتائج السابقة

3)أ - بين أن $PQRS$ متوازي أضلاع .

يكفي إثبات أن :