ثانوية عبد الحميد قباطي

الإختبار الثاني في مادة الرياضيات

المستوى 3 رياضيات المدة 4 ساعات

<u>الموضوع الأول</u>

التمرين 1

1- لتكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $PGCD(a+b,ab)=p$ حيث p عدد أولي

أ- بين أن p يقسم a^2 لاحظ أن $a^2=a(a+b)-ab$

ب- استنتج أن p يقسم a

2- ليكن a و b عددان طبيعيان بحيث $a\le b$

أ.حل الجملة $\begin{cases}PGCD(a,b)=5\\PPCM(a,b)=170\end{cases}$

ب. استنتج حلول الجملة $\begin{cases}PGCD(a+b,ab)=5\\PPCM(a,b)=170\end{cases}$

تمرين2:

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس و المباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$

1- نر يد حل في C المعادلة (E) $z^3+4z^2+2z-28=0$

أ. عين العددين الحقيقين a و b بحيث المعادلة (E) تكتب

$$(z-2)(z^2+az+b)=0$$

ب. حل (E)

2- لتكن (H) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z تحقق: $z^2-4=4-\bar{z}^2$

أ. نسمي x و y الجزء الحقيقي و التخيلي للاحقة z للنقطة M

بين أن النقطة M تنتمي الى (H) إذا و فقط اذا كان: $x^2-y^2=4$

ب. لتكن A ، B و C النقط ذات اللواحق على الترتيب 2 ، $-3-i\sqrt{5}$ و $-3+i\sqrt{5}$.تحقق أن A ، B و C تنتمي الى (H).

3- لتكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{4}$

أ. عين لواحق 'A ، 'B و 'C صور A ،B و C على الترتيب بالدوران r

ب. نسمي 'M صورة M ذات اللاحقة z بالدوران r.و نسمي 'z لاحقة 'M.الجزأين الحقيقي و التخيلي لـ z هما x و y و لـ'z هما 'x و 'y. نسمي ('H) مجموعة النقط من المستوي ذات السابقة (H) بالتحويل r.

- عبر عن x و y بدلالة 'x و 'y

- باستعمال السؤال 2 أ برهن أن 'M ينتمي الى ('H) إذا وفقط أذا كان x'y'=-2

4- أنجز شكلا تضع عليه النقط A، B، C، 'A، 'B ، 'C المنحني ('H) ثم المنحني (H)

التمرين 3:

الجزء الأول

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر:

- النقط $A(0,0,3)$ ، $B(2,0,4)$ ، $C(-1,1,2)$ و $D(1,-4,0)$
- المستويات: (P_1) $7x+4y-3z+9=0$ و (P_2): $x-2y=0$
- المستقيمات (Δ_1) و (Δ_2) المعرفة بجملة المعادلات الوسيطية على الترتيب

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-8+2t \quad ,t\in R \\ z=-10+5t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' ,t'\in R \\ z=8-t' \end{cases}$$

لكل سؤال اقتراح واحد من بين الأربعة صحيحا .

	a	b	c	d
1.المستوي (P_1) هو:	المستوي (ABC)	المستوي (BCD)	المستوي (ACD)	المستوي (ABD)
2.المستقيم (Δ_1) يشمل	النقطة A	النقطة B	النقطة C	النقطة D
3.الوضعية النسبية لـ(P_1)و (Δ_2)	(Δ_2)توازي تماما (P_1)	(Δ_2)محتوى في (P_1)	(Δ_2)يقطع (P_1)	(Δ_2)عمودي على (P_1)
4.الوضعية النسبية لـ(Δ_1) و (Δ_2)	(Δ_1)يوازي تماما(Δ_2)	(Δ_1) و (Δ_2) منطبقان	(Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان في نقطة	(Δ_1) و (Δ_2) لا ينتميان لنفس المستوي
5.تقاطع (P_1)و (P_2) هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي:	$\begin{cases} x=t \\ y=-2+\frac{1}{2}t \\ z=3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=3+6t \end{cases}$	$\begin{cases} x=5t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$

الجزء الثاني

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبرالمستقيم (D) يشمل $A(0,0,3)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(1,0,-1)$ و المستقيم (D') يشمل النقطة $B(2,0,4)$ و شعاع توجيه له $\vec{v}(0,1,1)$

الهدف هو أثبات وجود مستقيم وحيد عمودي على كل من(D) و (D') ثم تعينه ثم استخلاص خاصية له.

1.نعتبر نقطة M تنتمي الى (D) و نقطة 'M تنتمي الى (D') معرفتين بـ $\vec{AM}=a\vec{u}$و $\vec{BM}=b\vec{v}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

عبر عن احداثيات M و 'M ثم الشعاع $\vec{MM}$ ، بدلالة a و b

2.بين أن المستقيم (MM') عمودي على كل من (D) و (D') اذا وفقط اذا كانت الثنائية حلا للجملة

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=-1 \end{cases}$$

3. حل الجملة .استنتج احداثيات النقط الوحيدة M و 'M و التي نسميها H و 'H بحيث ('HH) عمودي على كل من (D) و (D') .بين أن $HH'=\sqrt{3}$ وحدة طول.

4.نعتبر نقطة M كيفية من المستقيم (D) و نقطة 'M كيفية من (D') .

أ. بإستعمال الإحداثيات المحصل عليها في السؤال 1 بين أن:

$$MM'^2=(a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2+3$$

ب.استنتج أن المسافة 'MM تكون أصغر ما يمكن عندما تكون M في H و 'M في 'H

التمرين 4:

ليكن n عدد طبيعي نسمي n عاملي العدد الطبيعي الذي نرمز له بالرمز $n!$ و المعرف بـ

$n!=1x\,2x\,3x\,.......xn$ من أجل $n\geq 1$ و $0!=1$

-1 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $n!\geq 2^{n-1}$

ب- باستعمال الألة الحاسبة أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $n!\geq 10^7$

-2 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

أ.أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

ب. بين أن المتتالية (u_n) مزايدة تماما .

ج.بين أن $u_n\leq 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

د. بين أن $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

و. استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ3

هـ. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة(لا يطلب حساب النهاية)

-3 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n=u_n+\frac{1}{n!}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. أحسب v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3

ب. بين أن (v_n) من أجل $n\geq 2$ متتالية متناقصة تماما

إستنتج أن $(u_n)_{n\geq 2}$ و $(v_n)_{n\geq 2}$ متتاليتن متجاورتين.

نسمي L نهايتهما المشتركة

ج.أعط قيمة مقربة الى 10^{-2} لـ L (يمكن استعمال السؤال 1. ب

د. نفرض في هذا السؤال ان L عدد ناطق أي يوجد عددين طبيعين p و q بحيث $L=\frac{p}{q}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 فإن $u_n\leq L\leq v_n$ أي

$u_n\leq\frac{p}{q}\leq v_n$ و خصوصا $u_q\leq\frac{p}{q}\leq v_q$

- بين أنه يوجد عدد طبيعي a بحيث $\frac{a}{q!}<\frac{p}{q}<\frac{a}{q!}+\frac{1}{q!}$

- بين أن $a<p(q-1)!<a+1$

- استنتج تناقضا. ماذا تستخلص.

التمرين 5:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N^* بـ:

$$u_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+......+\frac{1}{2n}$$

الجزء 1

1- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\in N^*$ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2- استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

3- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة

الجزء 2

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(\dfrac{x}{x+1})$

1- أ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم الحصر $\dfrac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx\le\dfrac{1}{n}$

ب. تحقق أن $\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{1}{n}-f(n)$

ج. استنتج أنه من أجل كل عدد $n\in N^*$: $0\le f(n)\le\dfrac{1}{n(n+1)}$

2- نعتبر المتتالية (S_n) معرفة على N^*

بـ: $S_n=\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+....\dfrac{1}{2n(2n+1)}$

أ. برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $0\le f(n)+f(n+1)+......f(2n)\le S_n$

ب. عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن -1 لدينا $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$

ج.استنتج المساواة : $S_n=\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

د. باستعمال الأسئلة السابقة عين نهاية:

$$\sum_{k=n}^{2n}f(k)=f(n)+f(n+1)+......f(2n)$$ لما n يؤول الى $+\infty$

و. تحقق أنه من اجل $n\ge1$ لدينا: $f(n)+f(n+1)+......f(2n)=u_n-\ln(2+\dfrac{1}{n})$

3- هـ. عين نهاية المتتالية (u_n)