ثانوية محمد طويلب - براقي — السنة الدراسية: 2011 - 2012

المستوى والشعبة: 3علوم تجريبية — 2012 / 02 / 28 — المدة: 02 ساعة

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (07 نقاط):

اختر في كل حالة الإجابة الصحيحة مع التعليل.

أ – $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a العبارة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ تساوي

1) a^2 2) $\dfrac{a^2}{2}$ 3) $-a^2$ 4) $\dfrac{-a^2}{2}$

ب – نعتبر مكعبا $ABCDIJKL$ و نزود الفضاء بمعلم $(A\ ,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$. المسافة من النقطة J إلى المستوي (BIK) هي

1) $\sqrt{3}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ج – المستويان (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب : $3x-5y+2z=1$ و $6x-10y+z=3$ هما مستويان

1) متعامدان 2) متوازيان 3) متقاطعان 4) متوازيان تماما

د – نضع $A(1,0,-1)$ ؛ $B(0,1,1)$ ؛ $P(2,0,1)$ ؛ $Q(1,1,0)$ و $R(1,0,1)$ تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (PQR) هي

1) النقطة $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 2) المستقيم (AB) 3) النقطة $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 4) لا يوجد

هـ – نعتبر المستوي P ذو المعادلة $x+2y-z-4=0$ و المستقيم (d) المعرف بالنقطة $A(1,-3,0)$ و شعاع التوجيه $\vec{u}(-1,0,2)$. المستوي P و المستقيم (d) يتقاطعان في نقطة فاصلتها

1) 4 2) 0 3) -2 4) 1

و– نعتبر ثلاث مستويات P و P' و P'' معادلاتهم على الترتيب $x+2y-z-4=0$ و $-2x+3y+z-1=0$ و $-5x+4y+3z+2=0$. تقاطع هذه المستويات الثلاثة هي

1) خالية 2) نقطة 3) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{1}{7},1\right)$ 4) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$

ي – نعتبر مكعبا $ABCDEFGH$ و نزود الفضاء بمعلم $(A\ ,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. المستوي (CFH) معادلته :

1) $x-y+z=2$ 2) $x+y+z=2$ 3) $x+y-z+2=0$ 4) $x+y-z=2$

التمرين الثاني (06 نقاط):

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A، B، C ذات اللواحق على الترتيب

$a=2$ و $b=1-i$ و $c=1+i$.

1) أحسب $\dfrac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) أ) نسمي r الدوران الذي مركزه A حيث $r(B)=C$.

- حدد زاوية r ثم احسب اللاحقة d للنقطة $D=r(C)$.

ب) ليكن (Γ) الدائرة التي قطرها $[BC]$.

- عين الصورة (Γ') للدائرة (Γ) بالدوران r .

3) لتكن M نقطة من (Γ) مختلفة عن C لاحقتها Z و M' نقطة لاحقتها Z' صورتها بـ r .

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي θ ينتمي إلى لمجال $[0,2\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ بحيث $Z=1+e^{i\theta}$

ب) عبر عن Z' بدلالة θ .

جـ) بين أن $\frac{Z'-c}{Z-c}$ عدد حقيقي .

استنتج أن النقط C، M و M' في استقامية .

<u>التمرين الثالث (07 نقاط):</u>

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}$

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

وليكن (C') التمثيل البياني للدالة h المعرفة بـ $h(x)=\frac{1}{x}$.

1) عين نهايات f عند 0 و $+\infty$.

- استنتج أن البيان (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تحديدهما .

2) احسب مشتقة f ثم ادرس تغيرات f

3) ليكن I نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل .

- عين إحداثيي النقطة I

4) من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ نضع $g(x)=1-x+2\ln x$

أ - ادرس تغيرات g

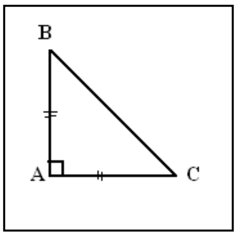
ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في كل من المجالين $]0;2[$ و $]2;4[$.

جـ - ليكن α الحل من المجال $]2;4[$ ، أعط حصرا لـ α سعته 10^{-2} .

5) بين أن $f(x)-\frac{1}{x}=\frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم استنتج أن (C) و (C') يتقاطعان في نقطتين .

انتهى و بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	• (أ) النتيجة (2): $\frac{a^2}{2}$ لأن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}$ .... • (ب) النتيجة (2): $\frac{\sqrt{3}}{3}$ لأن ناظمي (BIK) هو $\overrightarrow{JD}(-1;1;-1)$ فتكون معادلته $-x+y-z+1=0$ و لدينا النقطة $J(1;0;1)$ فتكون المسافة $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$ • (جـ) النتيجة (3): متقاطعان لأن ناظمي المستويين $\overrightarrow{n_1}(3;-5;2)$ هو $\overrightarrow{n_2}(6;-10;1)$ غير مرتبطين خطيا • (د) النتيجة (3): النقطة $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ لأن $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ و معادلة (PQR) هي $y+z-1=0$ • (هـ) النتيجة (1): العدد 4 لأنه يحقق المعادلة • (و) النتيجة (3): مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\left(\frac{5}{7},\frac{1}{7},1\right)$ • (ي) النتيجة (2): المستوي (CFH) معادلته $x+y+z=2$ لأنها تحقق إحداثيات C و F و H	01 ن 01 ن 01 ن 01 ن 01 ن 01 ن 01 ن	07 ن
التمرين الثاني	 1) حساب $\frac{c-a}{b-a}$. لدينا $\frac{c-a}{b-a}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i$. و لدينا $\frac{AC}{AB}=\frac{\|c-a\|}{\|b-a\|}=\frac{\|-1+i\|}{\|-1-i\|}=\|-i\|=1$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ - نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في A و متساوي الساقين. 2) أ) لدينا $\begin{cases} r(B)=C \\ r(A)=A \end{cases}$ ومنه $c-a=e^{i\theta}(b-a)$ أي أن $e^{i\theta}=\frac{c-a}{b-a}=-i$ إذن $\theta=-\frac{\pi}{2}\equiv[2\pi]$ - العبارة المركبة للدوران r هي $Z'-2=-i(Z-2)$ إذن $Z'=iZ+2+2i$ ومنه اللاحقة d للنقطة $D=r(C)$ هي $d=i(1+i)+2+2i$ هي $d=3+i$ ب) صورة الدائرة (Γ) هي الدائرة (Γ') التي لها نفس نصف القطر و مركزها هو صورة مركز (Γ) لدينا $r(B)=C$ و $r(C)=D$ و بمأن (Γ) قطرها $[BC]$ فان (Γ') قطرها $[r(B),r(C)]=[CD]$ 3) أ) لدينا الدائرة $\Gamma(\Omega,R)$ مركزها $\omega=\frac{b+c}{2}=1$ لاحقة Ω ونصف قطرها $R=\frac{BC}{2}=\frac{\|c-b\|}{2}=1$ إذن $\Gamma(\Omega,1)$ ولدينا $M\in\{(\Gamma)-(C)\}$ إذن $\Omega M=1$ و $M\neq C$ معناه $\|Z-1\|=1$ و $Z\neq 1+i$ أي أن $Z-1=e^{i\theta}$ و $\theta\neq\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن $Z=1+e^{i\theta}$ و $\theta\in[0,2\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ب) بتطبيق العبارة المركبة السابقة و بالتعويض نجد $Z'=ie^{i\theta}+2+i$ جـ) لدينا $\frac{Z'-c}{Z-c}=\frac{-ie^{i\theta}+2+i-(1+i)}{1+e^{i\theta}-(1+i)}=\frac{-ie^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-i}\times\frac{e^{-i\theta}+i}{e^{-i\theta}+i}=\frac{2\cos\theta}{\|e^{i\theta}-i\|^2}$ و هو عدد حقيقي . نستنتج $\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CM'}\right)=0[\pi]$ ومنه النقط C، M و M' في استقامية .	0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن	06 ن

التمرين الثالث (07 ن)

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0^+$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2\ln x}{x^2}=-\infty$ — 0.5 ن

$f(x)=\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$ — 0.5 ن

- نستنتج أن البيان (C) يقبل محور الفواصل و محور التراتيب مستقيمين مقاربين. — 01 ن

2) حساب المشتقة $f'(x)=\frac{-4\ln x}{x^3}$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

f متناقصة على المجال $[1;+\infty[$

و f متزايدة على المجال $]0;1]$. — 0.5 ن

3) تعيين إحداثيا النقطة I نجد $f(x)=0$ ومنه $x=e^{-\frac{1}{2}}$ إذن $I\left(e^{-\frac{1}{2}},0\right)$ — 0.5 ن

4) أ – دراسة تغيرات g : — 01 ن

حساب المشتقة $g'(x)=\frac{-x+2}{x}$

x	0		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	
x		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

g متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ — 0.5 ن

و g متزايدة على المجال $]0;2]$ — 0.5 ن

ب – g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;2[$ و $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$ و $g(2)>0$ إذن — 0.5 ن

و حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا يحقق $g(1)=0$ أي $x=1$.

و بالمثل g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]2;4[$ و $g(2).g(4)<0$ إذن — 0.5 ن

و حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2;4[$

جـ – نجد بالآلة الحاسبة حصرا لـ α سعته 10^{-2} هو $3.51<\alpha<3.52$. — 0.5 ن

5) $f(x)-\frac{1}{x}=\frac{1+2\ln x}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ محققة . — 0.5 ن

عدد نقاط تقاطع (C) و (C') يساوي عدد حلول المعادلة $f(x)=h(x)$ أي $f(x)-h(x)=0$

أي أن دينا $g(x)=0$ هي تقبل حلان في المجالين $]0;2[$ و $]2;4[$. — 0.5 ن