الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية ميلة — متقن علي جعفر - تاجنانت

《إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات》 2008/02/23

الشعبة: 3 علوم تجريبية — **المدة: ساعتان**

التمرين الأول:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$2z^3-(15+2i)z^2+5(7+i)z-14-2i=0 \quad ....①$$

1) برهن أن المعادلة ① تقبل حل حقيقي z_0 يطلب تعيينه.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ①.

نسمي z_1 ، z_2 الحلين الآخرين للمعادلة ① حيث $|z_1| \prec |z_2|$

3) في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد: z_1، z_2 ، $z_3=4z_0$ على الترتيب .

- أحسب عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$.
- استنتج طبيعة المثلث ABC.

المسألـــة:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل :

$$f(x)=-x+1+e^{2x}-e^{x}$$

$(\mathscr{C})$ المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$).

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و ماذا تستنتج؟

ب- برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$.

جـ- أدرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) ليكن x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (D) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة التي فاصلتها x_0.

عين x_0 حتى يكون (D) موازيا لــ(Δ) ، أكتب عندئذ معادلة للمستقيم (D) .

4) بين أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

5) أرسم (D) و $(\mathscr{C})$ في نفس المعلم.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-x+m$

متقن علي جعفر تاجنانت — السنة الدراسية:2007-2008

الأستاذ: **يوسفي ك** — الشعبة: 3علوم تجريبية

《 الحل النموذجي لاختبار الثلاثي الثاني 》

التمرين الأول: لدينا في C

$2z^3-(15+2i)z^2+5(7+i)z-14-2i=0$

1/ برهان أن المعادلة تقبل حل حقيقي z_0

نفرض أن $z_0=\alpha$ و منه

$2\alpha^3-(15+2i)\alpha^2+5(7+i)\alpha-14-2i=0$

$2\alpha^3-15\alpha^2+35\alpha-14+i(-2\alpha^2+5\alpha-2)=0$

$$\begin{cases} 2\alpha^2-15\alpha^2+35\alpha-14=0 & (1) \\ -2\alpha^2+5\alpha-2=0. & (2) \end{cases}$$

حل المعادلة (2) نجد: $\Delta=9$

المعادلة (2) تقبل حلين. $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1/2$.

من أجل $\alpha=2$ نعوض في (1) غير محققة.

من أجل $\alpha=1/2$ نعوض في (1) محققة

و منه الحل الحقيقي هو $\boxed{z_0=1/2}$.

2/ حل في C المعادلة.

بما أن $z_0=1/2$ هو حل للمعادلة (1) فإن

(1) تكافئ $(z-1/2)(2z^2+bz+c)=0$

و منه $2z^3+(b-1)z^2+(c-\frac{b}{2})z-\frac{c}{2}=0$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} b-1=-15-2i \\ c-\frac{b}{2}=35+5i \\ -\frac{c}{2}=-14-2i \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} b=-14-2i \\ c=28+4i \end{cases}$$

و منه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل:

$(z-1/2)(2z^2-(14+2i)z+28+4i)=0$

و منه

$$\begin{cases} z-1/2=0 \quad \text{معناه } z=1/2. \\ \text{أو} \quad 2z^2-(14+2i)z+28+4i=0 \quad (*) \end{cases}$$

حل المعادلة (*)

$\Delta=(14+2i)^2-4\times2(28+4i)$

$=-32+24i$

ليكن $\delta=x+yi$ جذر تربيعي لـ Δ

فإنه تكون لدينا الجملة

$$\begin{cases} x^2-y^2=-32 & (1) \\ x^2+y^2=40 & (2) \\ 2xy=24 & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $2x^2=8$ ومنه $x=-2$ أو $x=2$

من أجل $x=2$ نعوض في (3) فنجد $y=6$

و منه $\delta=2+6i$.

و منه المعادلة (*) تقبل حلين.

$z_1=\frac{14+2i-(2+6i)}{4}=3-i$

$z_2=\frac{14+2i+(2+6i)}{4}=4+2i.$

و منه $S=\{1/2, 3-i, 4+2i\}$.

لدينا $|Z_1|<|Z_2|$ و منه

$Z_1=3-i$, $Z_2=4+2i$.

و لدينا $Z_3=4Z_0=2$.

حساب عمدة $\frac{Z_2-Z_3}{Z_1-Z_3}$.

$\frac{Z_2-Z_3}{Z_1-Z_3}=\frac{4+2i-2}{3-i-2}=\frac{2+2i}{1-i}$

$=2i.$

و هو عدد تخيلي صرف وجزؤه التخيلي موجب

و منه $\arg\frac{Z_2-Z_3}{Z_1-Z_3}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

$\arg\frac{Z_2-Z_3}{Z_1-Z_3}=\arg\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=(\vec{CA},\vec{CB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه فالمثلث ABC قائم في C.

المسألة:

f دالة معرفة على R بالشكل:

$f(x)=-x+1+e^{2x}-e^x$.

دراسة تغيرات الدالة f.

$D_f=]-\infty,+\infty[$.

النهايات: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ح ع ت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$

[illegible]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\cancel{\frac{-x}{e^{2x}}}^{0} + \cancel{\frac{1}{e^{2x}}}^{0} + 1 - \cancel{\frac{e^{x}}{e^{2x}}}^{0}\right) = +\infty.$$

المشتق:

$$f'(x) = -1 + 2e^{2x} - e^{x}.$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1.$$

إشارة المشتق.

نضع $e^{x} = y$ فيكون لدينا:

$f'(x) = 0$ معناه $2y^2 - y - 1 = 0$

$\Delta = 9 > 0 \quad y_1 = \frac{-1}{2} \; , \; y_2 = 1.$

$y = e^{x} = -\frac{1}{2}$ مرفوض

$y = e^{x} = 1$ ومنه $x = 0.$

ومنه يمكن كتابة $f'(x)$ على الشكل:

$$f'(x) = \underbrace{(2e^{x}+1)}_{+}(e^{x}-1).$$

إشارة المشتق هي من إشارة $e^{x} - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2/ حساب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1+e^{2x}-e^{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -1 + \cancel{\frac{1}{x}}^{0} + \frac{e^{2x}}{x}^{+\infty}\left(1 - \cancel{e^{-x}}^{0}\right) = +\infty$$

نستنتج أن المنحنى يقبل فرع مكافئ باتجاه محور التراتيب في جوار $+\infty$.

ب/ برهان أن $(\Delta): y = -x+1$ هو مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x+1) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - e^{x} = 0$$

ومنه فالمنحنى (C) يقبل خط مقارب مائل معادلته $y = -x+1$ في جوار $-\infty$.

جـ/ دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

$$d(x) = f(x) - (-x+1) = e^{2x} - e^{x}$$
$$= e^{x}(e^{x} - 1).$$

إشارة الفارق $d(x)$ هي من إشارة $e^{x} - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d(x)$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع Δ	(C) فوق (Δ)

3) تعيين x_0.

(D) موازي لـ (Δ) معناه لهما نفس معامل التوجيه

ومنه $f'(x_0) = -1.$

ومنه $2e^{2x_0} - e^{x_0} - 1 = -1$

$$e^{x_0}(2e^{x_0} - 1) = 0.$$

معناه $2e^{x_0} - 1 = 0 \quad e^{x_0} \neq 0.$

$e^{x_0} = \frac{1}{2}$ ومنه $x_0 = \ln\frac{1}{2}$.

معادلة المماس (D).

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$= -1\left(x - \ln\tfrac{1}{2}\right) + f(\ln 1/2).$$
$$y = -1(x + \ln 2) + \ln 2 + \frac{3}{4}$$

$y = -x + \frac{3}{4}$ هي معادلة (D).

4/ نقطة الانعطاف:

$$f''(x) = e^{x}(4e^{x} - 1).$$

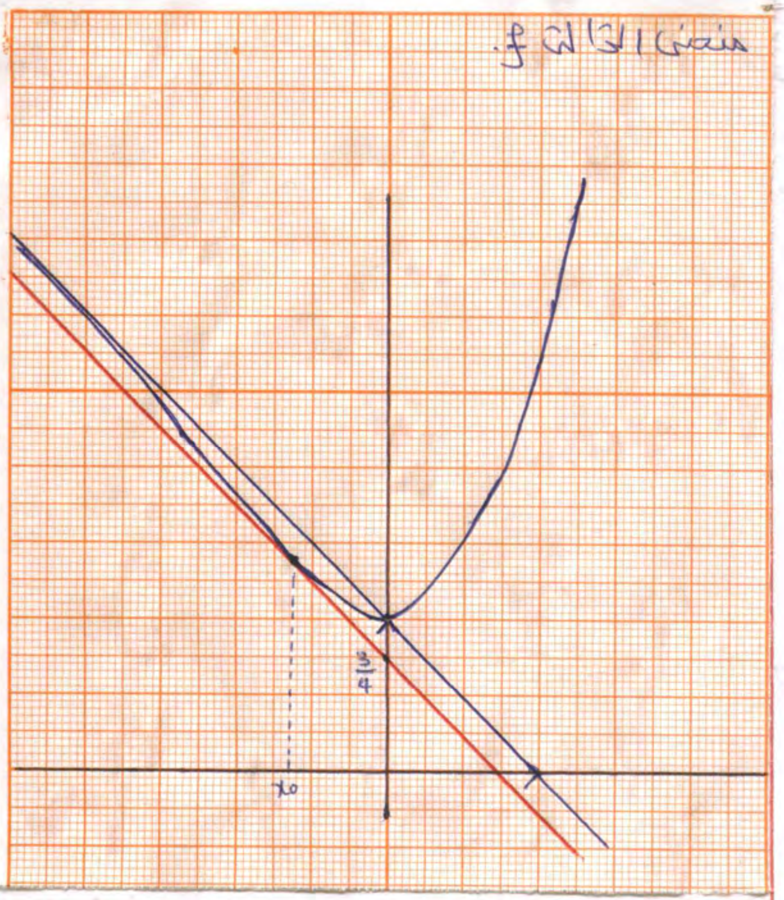
إشارة $f''(x)$ هي من إشارة $4e^{x} - 1$

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها عند $x = -\ln 4$

ومنه فالمنحنى يقبل نقطة انعطاف $\omega\left(\ln 1/4 \, ; \ln 4 + \frac{13}{16}\right)$.

رسم المنحنى البياني و D.



المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$f(x) = -x + m$.

نمثل حلول هذه المعادلة بيانيا فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم $(\Delta_m): y = -x + m$ والموازي لكل من (Δ) و (D).

المناقشة:

① $m \in]-\infty, \frac{3}{4}[$ المعادلة ليس لها حل.

② $m = \frac{3}{4}$ المعادلة تقبل حل مضاعف فاصلته $x_0 = \ln\frac{1}{2}$.

$m \in]\frac{3}{4}, 1[$ يوجد حلين سالبين.

$m = 1$ يوجد حل وحيد معدوم.

$m \in]1, +\infty[$ يوجد حل وحيد موجب.