

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول : الفضاء منسوب إلى معلم متعمد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1- نعتبر النقطة $A(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(-1; 5; -1)$ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يمر من النقطة A وشعاع توجيهه \vec{u} .

2- نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتهما الديكارتية على التوالي: $x - y - z = 7$ و $x - 2z = 11$.
برهن أن المستويين (P) و (Q) متلقعين وفق مستقيم (d') ، يطلب تعين تمثيلا وسيطيا له.

3- بين أن المستقيمين (d) و (d') لا يقعان في نفس المستوى .

4- نعتبر نقطتين $H' \in (d')$ و $H \in (d)$ تتحقق أن $H' \in (3; 0; -4)$ و $H \in (3; 3; 5)$

ب) برهن أن المستقيم (HH') عمودي على المستقيمين (d) و (d')

ج) أحسب المسافة بين المستقيمين (d) و (d') ، أي المسافة HH'

5- عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$

التمرين الثاني: 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة التالية :

2) لتكن النقط K ، L و M التي لواحقها على الترتيب : $z_M = -i\sqrt{3}$ ، $z_L = 1-i$ ، $z_K = 1+i$ و

أرسم هذه النقط في معلم متعمد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة $4cm$.

3) تتحقق أن z_N لاحقة النقطة M نظيرة النقطة N بالنسبة للنقطة L هي :

ب) نعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث: $r(N) = C$ و $r(M) = A$

عين اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و C على الترتيب .

ج-) نعتبر الإسحاب t الذي شعاعه لاحقته $2i$ حيث : $t(N) = B$ و $t(M) = D$

عين اللاحقتين z_D و z_B للنقطتين D و B على الترتيب .

4-) بين أن النقطة K منتصف قطعة المستقيم $[DB]$ هي منتصف قطعة المستقيم $[AC]$

ب) بين أن $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث : لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بـ

1- أدرس تغيرات الدالة f ، ثم بين أنه من أجل $x \in [0; 1]$ فإن $f(x) \in [0; 1]$

2- لتكن (u_n) متالية معرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n :

- أ) مثل المنحنى (C_f) في معلم متعمد ومتجانس وحدة الطول 10cm .

ب) باستخدام المنحنى (C_f) والمنصف الأول : $y = x$ (Δ) مثل الحدود الأربع الأولي للمتالية (u_n) على محور الفواصل.

ج) خمن اتجاه تغير المتالية (u_n) ، هل هي متقاربة؟

-3-أ-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [0;1]$.

ب) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 2)(1 - u_n)}{u_n + 3}$ وبين أنها متقاربة وعين نهايتها؟

4) لتكن المتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

أ) برهن أن (v_n) متالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدتها الأول.

ب) عين عبارة v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج من جديد نهاية المتالية (u_n)

التمرين الرابع: لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[-\infty; 3]$ كما يلي:

> 1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

> 2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$ ، واستنتاج إشارة $g(x)$ على $[-\infty; 3]$.

ب) لتكن f الدالة المعرفة على $[-\infty; 3]$ بـ $f(x) = (x+1)\ln(-x+3)$ تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعمد ومتجانس $(O; i; j)$ وحدة الطول 2cm .

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) بين أن : $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$ واستنتاج حصرًا

3) حل في المجال $[-\infty; 3]$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتاج إشارة $f(x)$ على $[-\infty; 3]$

4) أحسب $f(-2)$ و $f(-3)$ ثم أرسم المنحنى (C_f) بدقة.

ج) دالة K معرفة على $[-\infty; 3]$ كما يلي :

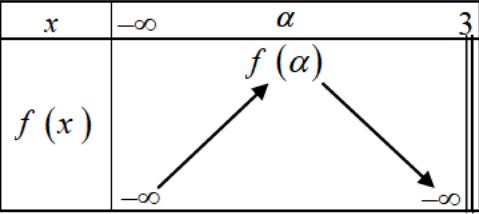
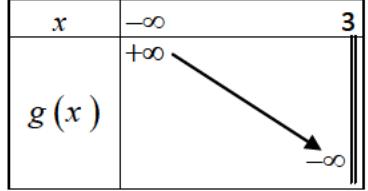
1) أحسب $\lim_{h \xrightarrow[>]{} 0} \frac{k(-1+h) - k(-1)}{h}$ ، $\lim_{h \xrightarrow[<]{} 0} \frac{k(-1+h) - k(-1)}{h}$ مادا تستنتج، وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

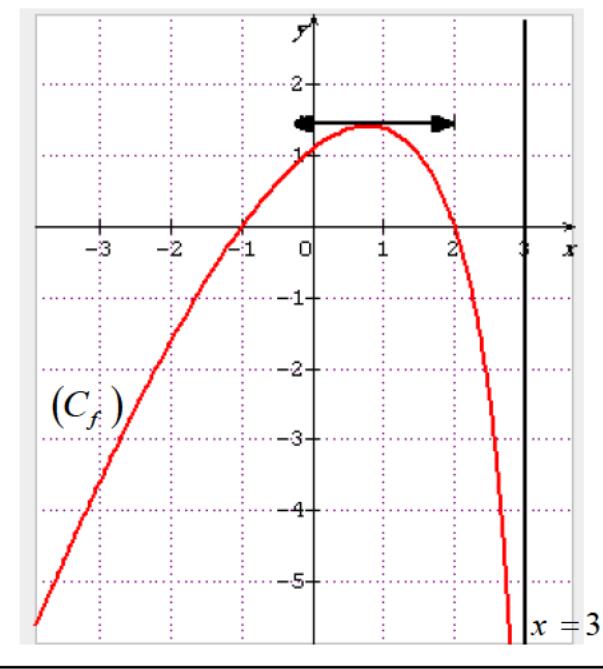
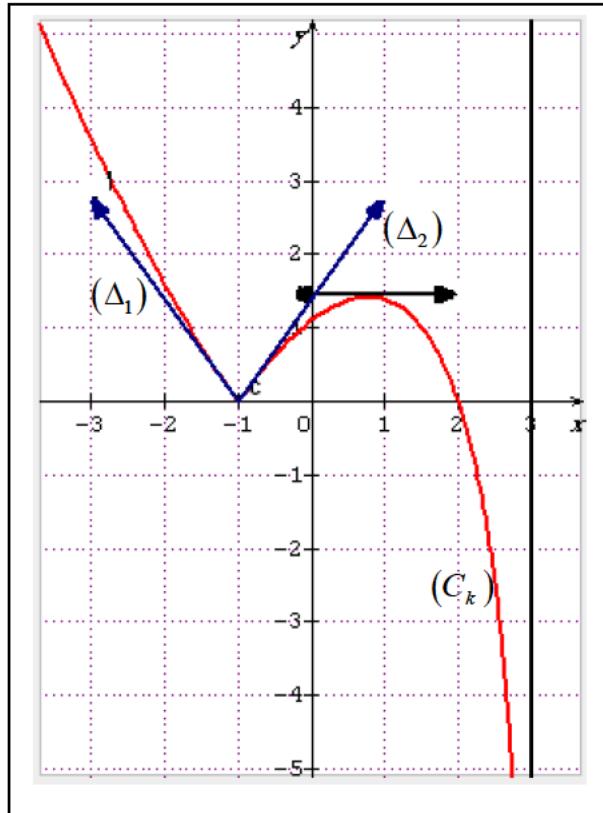
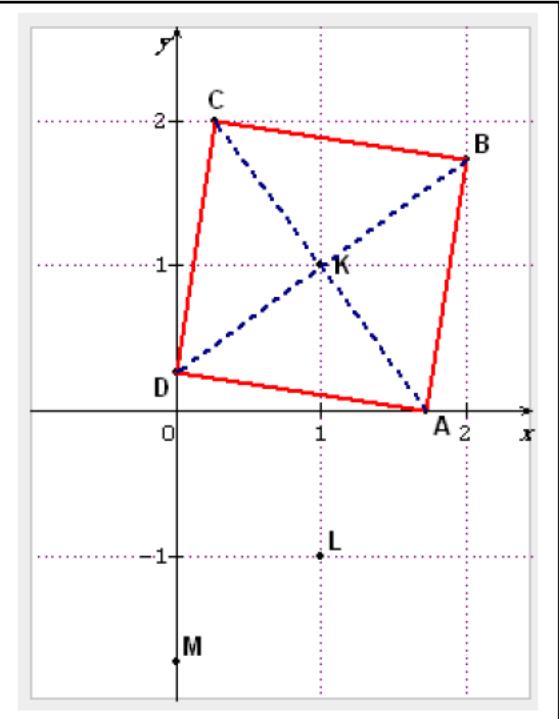
2) أكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = -1$

3) أرسم (C_k) و (Δ_1) و (Δ_2) .
الصفحة (2 من 2)

// اللهم وفق الذين هم على أبواب البكالوريا بال توفيق والنجاح ويسر لهم أمرهم // - الأستاذ - قحام

س-ت	عناصر الإجابة	س-ت	عناصر الإجابة							
(0.5)	$f(x) \in [f(0); f(1)]$ فان $x \in [0;1]$ لأن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R}^+ ومن ثم فهي متزايدة $f(x) \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ ومنه : $f(x) \in \left[\frac{2}{3}; 1\right] \subset [0;1]$ فان : $f(x) \in [0;1]$ إذن من أجل $x \in [0;1]$ $f(x) \in [0;1]$ (أ) التمثيل البياني على الورقة الأخيرة : (ج) التخمين: المتالية (u_n) متزايدة تماما بما أن (u_n) متزايدة ومحددة من أعلى فهي متقاربة $u_n \in [0;1]$ نسمى $P(n)$ الخاصية : $u_0 \in [0;1]$ من أجل $n=0$: لدينا $u_0 = 0$ ومنه أي : $P(0) P(0)$ صحيحة . $u_n \in [0;1]$ نفرض أن $P(n)$ أي $u_{n+1} \in [0;1]$ أي $P(n+1)$ أي ثبت صحة الخاصية $P(n+1)$ لدينا من فرض التراجع $u_n \in [0;1]$ وبما أن f متزايدة $f(u_n) \in [f(0); f(1)]$ فان: $[0;1]$ $u_{n+1} \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$: أي $u_{n+1} \in \left[\frac{2}{3}; 1\right] \subset [0;1]$ لأن $P(n+1)$ ومنه $u_n \in [0;1]$ إذن من أجل $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 3}$ (ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 2)(u_n - 1)}{u_n + 3} = \frac{(u_n + 2)(1 - u_n)}{u_n + 3}$ بما أن $u_n \geq 0$ $u_n + 2 \geq 0$ فان: $u_n \in [0;1]$ و $u_{n+1} - u_n \geq 0$ $u_n + 3 \geq 0$ وبالتالي: إذن : المتالية (u_n) متزايدة . بما أن المتالية (u_n) متزايدة ومحددة من أعلى بـ 1 فهي متقاربة و $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1\right)$ (فاصلة نقطة تقاطع المنحني $(\Delta): y = x$ والمستقيم (C_f) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)}$ (أ-4) أي $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ ومنه متالية هندسية أساسها $v_0 = -\frac{1}{2}$ وحدتها الأولى $q = \frac{1}{4}$	0.25	$z_c = a.z_N$ يعني $r(N) = C$ $z_c = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (2 + i(\sqrt{3} - 2)) = (2 - \sqrt{3}) + 2i$ ج) إنسحاب شعاعه لاحقته t_u $z_D = z_M + b$: لدينا: $t(M) = D$ $z_D = i(2 - \sqrt{3})$: $z_D = -i\sqrt{3} + 2i$ $z_B = z_N + b$: $t(N) = B$ * $z_B = 2 + i\sqrt{3}$: $z_B = 2 + i(\sqrt{3} - 2) + 2i$ $\frac{z_D + z_B}{2} = \frac{(2 - \sqrt{3})i + 2 + i\sqrt{3}}{2}$: (أ) لدينا : $[BD]$ منه K منتصف $\frac{z_D + z_B}{2} = 1 + i = z_K$ $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2i}{2}$ و $[AC]$ منه K مننصف $\frac{z_A + z_C}{2} = 1 + i = z_K$ $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{(2 - \sqrt{3}) + 2i - 1 - i}{2 + i\sqrt{3} - 1 - i}$: (ب) لدينا : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{(1 - \sqrt{3}) + i}{1 + i(\sqrt{3} - 1)}$ $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{i[1 + i(\sqrt{3} - 1)]}{1 + i(\sqrt{3} - 1)}$ منه : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ طبيعة الرباعي $ABCD$: لدينا $(\overrightarrow{KB}; \overrightarrow{KC}) = \frac{\pi}{2}$ و $KB = KC$ وهذا يعني أن القطران متساويان ولهم نفس الطول ومتعاددان ، إذن الرباعي $ABCD$ مربع . $D_f = \mathbb{R}^+$ و $f(x) = \frac{2x + 2}{x + 3}$ التمرين الثالث : $f(0) = \frac{2}{3}$ دراسة تغيرات f : $f(x) = 2$: الدالة f قابلة لاشتقاق على \mathbb{R}^+ و $f'(x) = \frac{4}{(x + 3)^2}$ من أجل $x \in \mathbb{R}^+$ فان $f'(x) > 0$ ، وهذا يعني أن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R}^+ جدول التغيرات : <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{2}{3}$</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	0.25
x	0	$+\infty$								
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2								
(0.5)										

س-ت	عناصر الإجابة	س-ت	عناصر الإجابة
0.25	<p>* الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; \alpha]$ * ومتناقصة تماماً على $[\alpha; 3[$</p> <p style="text-align: center;"><u>جدول التغيرات</u></p> 	0.25	$v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{2^{2n+1}}$ ومنه $v_n = v_0 \times q^n$ (ب)
0.25		0.25	$-1 < q < 1$. بما أن $u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} = \frac{2^{2n+1} - 2}{2^{2n+1} + 1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ التعريف الرابع: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x - 1}{-x + 3} \right) = 1 * (1)$
0.25	$f(\alpha) = (\alpha + 1) \ln(-\alpha + 3)$ (2) $\ln(-\alpha + 3) = \frac{\alpha + 1}{-\alpha + 3}$ وبما أن $g(\alpha) = 0$ فإن: $f(\alpha) = (\alpha + 1) \times \frac{\alpha + 1}{-\alpha + 3}$ بالتعويض نجد	0.25	$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(-x + 3) = +\infty$ $\lim_{x \xrightarrow{<} 3} \left(\frac{-x - 1}{-x + 3} \right) = -\infty *$
0.25	$f(\alpha) = \frac{(\alpha + 1)^2}{-\alpha + 3}$: إذن • حصر	0.25	$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} g(x) = -\infty$ ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 3} \ln(-x + 3) = -\infty$ الدالة المشتقة: من أجل $x \in]-\infty; 3[$ فإن: $g'(x) = \frac{-4}{(-x + 3)^2} + \frac{-1}{-x + 3} = \frac{x - 7}{(-x + 3)^2}$
0.25	$0,7 < \alpha < 0,8$ بإضافة العدد 1 للأطراف الثلاثة نجد: $1,7 < \alpha + 1 < 1,8$ وبما أن الدالة مربع متزايدة على $[1,7; 1,8]$ فإن: $(1,7)^2 < (\alpha + 1)^2 < (1,8)^2$ ومن جهة أخرى $0,7 < \alpha < 0,8$: $0,7 < \alpha < 0,8$ بالضرب في العدد -1 وإضافة العدد 3 نجد $2,2 < -\alpha + 3 < 2,3$. وبما أن الدالة مقلوب متناقصة فإن:	0.25	إشارة $g'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 3[$ فإن الدالة g متناقصة تماماً على $]-\infty; 3[$ جدول التغيرات:
(0.5)	$\frac{1}{2,3} < \frac{1}{-\alpha + 3} < \frac{1}{2,2} \dots (2)$ $\frac{(1,7)^2}{2,3} < \frac{(\alpha + 1)^2}{-\alpha + 3} < \frac{(1,8)^2}{2,2}$: $1,26 < f(\alpha) < 1,47$: ومنه	0.25	
(0.5)	$(x + 1) \ln(-x + 3) = 0$ يكفي : $f(x) = 0$ -3 $\ln(-x + 3) = \ln 1$ أو $(x + 1) = 0$: منه إذن: $(x = 2)$ أو $(x = -1)$: $f(x) = 0$	0.25	(2) الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على $]-\infty; 3[$ $g(0,8) \approx -0,02$ ، $g(0,7) \approx 0,09$ بما أن $0 < 0,7 < 0,8$ فإن $g(1,7) \times g(0,8) < 0$ تقبل حلاً وحيداً من المجال $0,7; 0,8[$ حيث $g(\alpha) = 0$ إشارة $g(x)$ على $]-\infty; 3[$
(0.5)	$f(-3) \approx -3,58$ ، $f(-2) \approx -1,6$ (4) الرسم على الورقة الأخيرة .	0.25	$x \in]-\infty; \alpha]$ من أجل $g(x) \geq 0$ * $x \in [\alpha; 3[$ من أجل $g(x) \leq 0$ * $f(x) = (x + 1) \ln(-x + 3)$ ب (-)
0.25	$\begin{cases} k(x) = (x + 1) \ln(-x + 3); x \geq -1 \\ k(x) = -(x + 1) \ln(-x + 3); x \leq -1 \end{cases}$ (ج) حساب ما يلي: -1	(0.5)	$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$: (1) الدالة المشتقة: من أجل $x \in]-\infty; 3[$ فإن: $f'(x) = \ln(-x + 3) + \frac{-(x + 1)}{-x + 3} = g(x)$
0.25	$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{k(-1+h) - k(-1)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{-h \ln(4-h)}{h} = -\ln 4$	0.25	إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ $x \in]-\infty; \alpha]$ من أجل $f'(x) \geq 0$ * $x \in [\alpha; 3[$ من أجل $f'(x) \leq 0$ *
0.25	$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{k(-1+h) - k(-1)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{h \ln(4-h)}{h} = \ln 4$		

عنصر الإجابة	عنصر الإجابة
<p>س-ت</p> 	<p>النتيجة : الدالة k غير قابلة للإشتقاق عند العدد $x_0 = -1$ لأن العدد المشتق من اليمين يختلف عن العدد المشتق من اليسار</p> <p>التفسير الهندسي: المنحنى (C_k) يقبل نصف مماسين عند النقطة ذات الفاصلة $-1 = x_0$ معامل توجيههما $-\ln 4$ و $\ln 4$ على الترتيب . وتدعى النقطة $A(-1; 0)$ ب نقطة زاوية</p> <p>(2) معادلتي نصف المماسين :</p> <p>(Δ_1) نصف المماس على اليسار ; $y = -\ln 4(x + 1)$</p> <p>(Δ_2) نصف المماس على اليمين ; $y = \ln 4(x + 1)$</p> <p>(3) الرسم</p>
<p>0.75</p> 	
<p>0.5</p>	